Suites et séries de fonctions

Licence de Mathématiques, 2ème année

Table des matières

Chapitre 1

Convergence des suites et séries de fonctions

1. Convergence simple des suites de fonctions

Définition 1.1. *Soit $a \in \mathbb{N}$, et soit $(f_n)_{n \geqslant a}$ une suite de fonctions à valeurs (réelles ou) complexes définies sur un ensemble I.*

(1) *Étant donné $t_0 \in I$, on dit que la suite (f_n)* ***converge au point*** *t_0, ou* ***converge en*** *t_0, si la suite numérique $(f_n(t_0))$ admet une limite quand $n \to \infty$.*
(2) *Étant donné un ensemble $E \subseteq I$, on dit que (f_n)* ***converge simplement sur*** *E si elle convergeen tout point $t \in E$; autrement dit, si pour tout $t \in E$, la suite $(f_n(t))_{n \geqslant a}$ est convergente. On peut aussi dire "$f_n(t)$ converge simplement sur E".*
(3) *Étant donné $E \subseteq I$ et une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, on dit que la suite (f_n)* ***tend simplement vers*** *f* ***sur*** *E si $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in E$. On écrit alors "$f_n \to f$ simplement sur E", ou encore "$f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur E".*

Remarque. On note $\lim f_n$ la fonction f définie par $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ en tout point t où la suite $(f_n(t))$ converge.

Fait évident. Si (f_n) converge simplement sur E, alors elle converge simplement sur tout ensemble $E' \subseteq E$.

Tautologie. Pour montrer que $f_n \to f$ simplement sur E, il faut

- fixer un point quelconque $t \in E$;
- se débrouiller pour montrer que $f_n(t) \to f(t)$.

Exemple 1. Pour $n \geqslant 0$, soit f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f_n(t) := t^n$.

(i) La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $]-1, 1[$.
(ii) La suite (f_n) converge simplement sur $]-1, 1]$ vers la fonction f définie par $f(1) := 1$ et $f(t) := 0$ si $-1 < t < 1$.
(iii) La suite f_n ne converge pas au point $t = -1$, donc ne converge pas simplement sur $[-1, 1]$.

Exemple 2. Pour $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) := (t + \frac{1}{n})^2$. La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f(t) := t^2$.

Exemple 3. Soit $\alpha : I \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in I \ : \ |\alpha(t)| < 1$. Alors $f_n(t) := \alpha(t)^n \to 0$ simplement sur I.

EXEMPLE 4. Soient I et Λ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $F : \Lambda \times I \to \mathbb{C}$ une fonction *continue*. Si (λ_n) est une suite de points de Λ telle que $\lambda_n \to \lambda \in \Lambda$, alors $f_n(t) := f(\lambda_n, t) \to f(t) = F(\lambda, t)$ simplement sur I.

ÉCRITURE DE LA DÉFINITION AVEC DES QUANTIFICATEURS. $f_n \to f$ simplement sur E si et seulement si

$$\forall t \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_{t,\varepsilon} \quad \text{tel que} \quad |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

Donc : pour montrer que $f_n \to f$ simplement sur E, il faut en principe

- fixer un point quelconque $t \in E$;
- se débrouiller pour obtenir une majoration de la forme $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon_n(t)$, où "on voit bien" que $\varepsilon_n(t) \to 0$ quand $n \to \infty$.

CRITÈRE DE CAUCHY. La suite (f_n) converge simplement sur E si et seulement si

$$\forall t \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_{t,\varepsilon} \quad \text{tel que} \quad |f_q(t) - f_p(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geqslant N.$$

Donc : pour montrer que $f_n \to f$ simplement sur E, on peut

- fixer un point quelconque $t \in E$;
- se débrouiller pour trouver une majoration de la forme $|f_p(t) - f_q(t)| \leqslant \varepsilon_{p,q}(t)$, où "on voit bien" que $\varepsilon_{p,q}(t) \to 0$ quand p et q tendent vers l'infini.

INTÉRÊT. Le critère de Cauchy permet de montrer qu'une suite converge sans connaitre *a priori* la limite.

2. Convergence uniforme des suites de fonctions

DÉFINITION 2.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions, $f_n : I \to \mathbb{C}$, et soit $E \subseteq I$.*

(1) *On suppose que (f_n) converge simplement sur E vers une fonction f. Alors, on dit que f_n tend **uniformément vers** f **sur** E si la chose suivante a lieu*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \quad \textit{tel que} \quad |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour tout } n \geqslant N \textit{ et pour tout } t \in E.$$

Autrement dit, si pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre "le même N_ε pour tous les t de E". On écrit alors "$f_n(t) \to f(t)$ uniformément sur E", ou encore $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur E".

(2) *On dit que (f_n) **converge uniformément sur** E si elle tend uniformément sur E vers une certaine fonction f.*

Remarque triviale 1. CVU $\Longrightarrow$ CVS.

Remarque triviale 2. CVS sur E $\Longrightarrow$ CVU sur tout ensemble *fini* $F \subseteq E$.

Démonstration. Exo. □

TAUTOLOGIE. Pour montrer que $f_n \to f$ uniformément sur E, il suffit de trouver une suite (ε_n) de nombres réels positifs telle que

$$\forall t \in I\ \forall n\ :\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

Démonstration. Exo. □

Pratique. Pour montrer que $f_n \to f$ uniformément sur E, on procède comme suit.

- On montre *d'abord* que $f_n \to f$ *simplement* ; autrement dit, on fixe un $t \in E$ quelconque, et on essaye d'obtenir une majoration de la forme $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon_n(t)$, où $\varepsilon_n(t) \to 0$;
- On se débrouille pour montrer qu'on peut se débarasser de la dépendance en t dans $\varepsilon_n(t)$, *i.e.* on cherche une majoration de la forme $\varepsilon_n(t) \leqslant \varepsilon_n$, où ε_n ne dépend pas de $t \in E$ et $\varepsilon_n \to 0$.

Exemple 2.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\alpha : I \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* vérifiant $|\alpha(t)| < 1$ pour tout $t \in I$. Alors $f_n(t) = \alpha(t)^n \to 0$ *uniformément sur tout compact* $E \subseteq I$.

Démonstration. Soit E un compact de I comme la fonction $|\alpha|$ est continue sur E, on peut trouver $t_0 \in E$ tel que $|\alpha(t_0)| \geqslant |\alpha(t)|$ pour tout $t \in E$. Alors $c = |\alpha(t_0)|$ est < 1, et $|f_n(t)| \leqslant \varepsilon_n = c^n$ pour tout $t \in E$; d'où le résultat puisque $c^n \to 0$. □

Exemple 2.3. Soient Λ et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $F : \Lambda \times I \to \mathbb{C}$ une fonction *continue*. Si (λ_n) est une suite de points de Λ telle que $\lambda_n \to \lambda \in \Lambda$, alors $f_n(t) = F(\lambda_n, t) \to f(t) = F(\lambda, t)$ *uniformément sur tout compact* $E \subseteq I$.

Démonstration. Comme $\lambda_n \to \lambda$, on peut trouver un intervalle compact $[a, b] \subseteq \Lambda$ tel que $\lambda \in [a, b]$ et $\lambda_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $[a, b] \times E$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc la fonction continue F est *uniformément continue* sur $[a, b] \times E$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $|F(u', s') - F(u, s)| \leqslant \varepsilon$ dès que $u, u' \in [a, b]$ et $s, s' \in E$ vérifient $|u' - u| \leqslant \delta$ et $|s' - s| \leqslant \delta$. Ensuite, on peut trouver N tel que $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \delta$ pour tout $n \geqslant N$; et on obtient alors $|F(\lambda_n, t) - F(\lambda, t)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$ *et pour tout* $t \in E$. □

Remarque. La "morale" des deux exemples précédents est que *la compacité donne de l'uniformité*. C'est un principe qu'il est important de retenir.

Fait 2.4. *Soient $f_n : I \to \mathbb{C}$, $E \subseteq I$ et $f : E \to \mathbb{C}$. Si $f_n \to f$ uniformément sur E alors, pour toute suite (t_n) de points de E, la suite $f_n(t_n) - f(t_n)$ tend vers* 0.

Démonstration. Supposons que $f_n \xrightarrow{CVU} f$, et soit (t_n) une suite quelconque de points de E. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ *et pour tout* $t \in E$. En particulier $|f_n(t_n) - f(t_n)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui prouve que $f_n(t_n) - f(t_n) \to 0$. □

Conséquence. Si on a réussi à trouver une suite (t_n) de points de E telle que $f_n(t_n) - f(t_n)$ ne tend pas vers 0, alors on peut conclure que (f_n) *ne tend pas uniformément* vers f sur E.

Exemple 1. $f_n(t) := t^n$ ne tend pas uniformément vers 0 sur $]-1, 1[$.

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$, on prend par exemple $t_n := 1 - \frac{1}{n}\cdot$ Alors

$$f_n(t_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \to \infty} 1/e;$$

et en particulier $f_n(t_n)$ ne tend pas vers 0. □

Exemple 2. $f_n(t) := (t + \frac{1}{n})^2$ ne tend pas uniformément vers t^2 sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_n(t) - t^2 = \frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2}$. Si on prend par exemple $t_n := n$, on voit ainsi que $f_n(t_n) - t_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$. □

Exercice. Montrer que la réciproque du Fait 2.4 est vraie : si $f_n(t_n) - f(t_n) \to 0$ pour toute suite $(t_n) \subseteq E$, alors $f_n \to f$ uniforméent sur E.

Critère de Cauchy uniforme. Une suite (f_n) converge uniformément sur $E \subseteq I$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad |f_q(t) - f_p(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geqslant N \text{ et pour tout } t \in E.$$

Démonstration. Si (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, elle vérifie en particulier le critère de Cauchy en tout point $t \in E$; donc (f_n) converge simplement sur E vers une fonction $f : E \to \mathbb{C}$. Si maintenant on se donne $\varepsilon > 0$ et si $N = N_\varepsilon$ est choisi comme plus haut, on obtient en faisant $q \to \infty$:

$$|f(t) - f_p(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } p \geqslant N \text{ et pour tout } t \in E;$$

ce qui prouve que $f_n(t) \to f(t)$ uniformément sur E. □

Conséquence pratique. Pour montrer qu'une suite (f_n) converge uniformément sur E, il suffit d'obtenir des majorations de la forme

$$|f_p(t) - f_q(t)| \leqslant \varepsilon_{p,q},$$

où $\varepsilon_{p,q}$ est *indépendant de* $t \in E$ et $\varepsilon_{p,q} \to 0$ quand $p, q \to \infty$.

3. Convergence simple ou uniforme des *séries* de fonctions

Définition 3.1. *Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, et soit $E \subseteq I$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t)$. On dit que **la série $\sum u_k$ converge simplement sur** E suite la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur E, et que **la série $\sum u_k$ converge uniformément sur** E si la suite (S_n) converge uniformément sur E.*

Remarque. On note $\sum_{k=0}^\infty u_k$ la fonction S définie par $S(t) = \sum_{k=0}^\infty u_k(t)$ en tout point t où la série $\sum u_k(t)$ converge.

Exemple 3.2. Soit $(b_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur I, avec $b_k(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$. On suppose que la suite (b_k) est **décroissante**, *i.e.* $b_{k+1}(t) \leqslant b_k(t)$ pour tout $t \in I$ et pour tout k.

(i) Si $b_k(t) \to 0$ simplement sur I, alors la série $\sum (-1)^k b_k(t)$ converge simplement sur I.

(ii) Si $b_k(t) \to 0$ uniformément sur I, alors la série $\sum (-1)^k b_k(t)$ converge uniformément sur I.

Démonstration. (i) est simplement le critère de convergence des séries alternées. Pour (ii), on utilise la *majoration du reste* d'une série alternée : en posant

$$r_n(t) = S(t) - S_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k b_k(t),$$

on a

$$|r_n(t)| \leqslant b_{n+1}(t);$$

donc $r_n(t) \to 0$ *uniformément sur* I si $b_k(t) \to 0$ uniformément. □

Critères de Cauchy. Si $p < q$, on a

$$S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} u_k.$$

Donc, les critères de Cauchy pour la convergence de la série $\sum u_k(t)$ s'écrivent comme suit.

(a) Critère de Cauchy pour la convergence simple (sur E) :

$$\forall t \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N_{t,\varepsilon} \; : \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k(t) \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

(b) Critère de Cauchy pour la convergence uniforme (sur E) :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N_\varepsilon \; : \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k(t) \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqslant N \text{ et pour tout } t \in E.$$

Proposition 3.3. (Critères d'Abel uniformes)
Soit (u_k) une suite de fonctions $u_k : I \to \mathbb{C}$. On suppose que les u_k sont de la forme $u_k(t) = a_k(t)b_k(t)$, où a_k et b_k sont des fonctions sur I, avec b_k à valeurs réelles et $b_k(t) \geqslant 0$ sur I. On suppose de plus que la suite (b_k) est ***décroissante****. Soit aussi $E \subseteq I$. Dans chacun des 2 cas suivants, la série $\sum u_k(t)$ converge uniformément sur E.*

(1) *La série $\sum a_k(t)$ converge uniformément sur E, et la suite (b_k) est* ***uniformément majorée*** *sur E, i.e il existe une constante M telle que $b_k(t) \leqslant M$ pour tout k et pour tout $t \in E$.*

(2) *$b_k(t) \to 0$ uniformément sur E, et les sommes partielles de la série $\sum a_k(t)$ sont* ***uniformément bornées****, i.e. il existe une constante M telle que*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \right| \leqslant M \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \textit{ et pour tout } t \in E.$$

Démonstration. (1) On va utiliser le critère de Cauchy uniforme ; donc il s'agit de majorer en module des sommes du type

$$S_{p,q}(t) = \sum_{k=p+1}^{q} a_k(t)b_k(t).$$

On effectue une transformation d'Abel sur les restes en posant

$$r_k(t) = \sum_{l=k+1}^{\infty} a_k(t).$$

Par hypothèse, les $r_k(t)$ sont bien définis et

$$r_k(t) \to 0 \qquad \text{uniformément sur } I.$$

De plus, on a

$$a_k(t) = r_{k-1}(t) - r_k(t) \qquad \text{pour tout } k \geqslant 1.$$

Donc, pour tous $p < q$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
S_{p,q}(t) &= \sum_{k=p+1}^{q} \big(r_{k-1}(t) - r_k(t)\big)\, b_k(t) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q} r_{k-1}(t) b_k(t) - \sum_{k=p+1}^{q} r_k(t) b_k(t) \\
&= \sum_{k=p}^{q-1} r_k(t) b_{k+1}(t) - \sum_{k=p+1}^{q} r_k(t) b_k(t) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q-1} r_k(t)\big(b_{k+1}(t) - b_k(t)\big) + r_p(t) b_{p+1}(t) - r_q(t) b_q(t).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
|S_{p,q}(t)| &\leqslant \sum_{k=p}^{q-1} |r_k(t)|\, |b_{k+1} - b_k(t)| + |r_p(t) b_{p+1}(t)| + |r_q(t) b_q(t)| \\
&= \sum_{k=p+1}^{q-1} |r_k(t)|\, \big(b_k(t) - b_{k+1}(t)\big) + |r_p(t)|\, b_{p+1}(t) + |r_q(t)|\, b_q(t),
\end{aligned}$$

où on a utilisé que la suite (b_k) est décroissante avec $b_k \geqslant 0$.
Maintenant, soit $\varepsilon > 0$. Comme $r_k(t) \to 0$ uniformément sur I, on peut trouver un entier K tel que

$$|r_k(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } k \geqslant K \text{ et pour tout } t \in I.$$

On déduit que si $K \leqslant p < q$, alors on a pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
|S_{p,q}(t)| &\leqslant \varepsilon \sum_{k=p+1}^{q-1} \big(b_k(t) - b_{k+1}(t)\big) + \varepsilon \big(b_{p+1}(t) + b_q(t)\big) \\
&= \varepsilon \big(b_{p+1}(t) - b_q(t)\big) + \varepsilon \big(b_{p+1}(t) + b_q(t)\big) \\
&= 2\varepsilon\, b_{p+1}(t) \\
&\leqslant 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que le critère de Cauchy uniforme est satisfait.

(2) Avec les notations de (1), on effectue cette fois une transformation d'Abel sur les sommes partielles, en posant

$$A_k(t) = \sum_{l=0}^{k} a_l(t),$$

de sorte que

$$a_k(t) = A_k(t) - A_{k-1}(t) \qquad \text{pour tout } k \geqslant 1,$$

et donc

$$S_{p,q}(t) = \sum_{k=p+1}^{q} \big(A_k(t) - A_{k-1}(t)\big)\, b_k(t).$$

Le calcul donne cette fois

$$\begin{aligned} S_{p,q}(t) &= \sum_{k=p+1}^{q} A_k(t)b_k(t) - \sum_{k=p}^{q-1} A_k(t)b_{k+1}(t) \\ &= \sum_{k=p+1}^{q-1} A_k(t)\big(b_k(t) - b_{k+1}(t)\big) + A_q(t)b_q(t) - A_p(t)b_{p+1}(t); \end{aligned}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} |S_{p,q}(t)| &\leqslant \sum_{k=p+1}^{q-1} |A_k(t)|\big(b_k(t) - b_{k+1}(t)\big) + |A_{q+1}(t)|\, b_q(t) + |A_{p+1}(t)|\, b_{p+1}(t) \\ &\leqslant 2M\, b_{p+1}(t), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $|A_k(t)| \leqslant M$ pour tout k et pour tout $t \in I$. Comme $b_{p+1}(t) \to 0$ uniformément sur I, cela montre que le critère de Cauchy uniforme est satisfait. $\square$

Exemple 3.4. Soit $\alpha > 0$. Les séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(kt)}{t^\alpha}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kt)}{k^\alpha}$ convergent uniformément sur tout intervalle compact $[a,b]$ tel que $[a,b] \cap 2\pi\mathbb{Z} = \varnothing$.

Démonstration. Comme $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$ sont les parties réelles et imaginaires de e^{ikt}, il suffit de montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikt}}{k}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

On applique “Abel 2” avec $a_k(t) = e^{ikt}$ et les fonctions *constantes* $b_k(t) = \frac{1}{k^\alpha}$. Il est évident que la suite (b_k) est décroissante et que $b_k(t) \to 0$ uniformément. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [a,b]$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \big(e^{it}\big)^k = e^{it}\, \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}},$$

où on a le droit d'écrire le quotient car $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et donc $e^{it} \neq 1$. On en déduit

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{it}|} := \phi(t).$$

Enfin, comme la fonction ϕ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, on peut la majorer par une constante M. Ainsi,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right| \leqslant M \qquad \text{pour tout } n \text{ et pour tout } t \in [a,b];$$

donc le critère d'Abel s'applique. $\square$

4. Convergence normale des séries de fonctions

Notation. Pour toute suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs, on pose $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$; limite qui existe dans $[0,\infty]$ car les sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ forment une suite croissante. Par définition, on a donc $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ si et seulement si la série $\sum \alpha_k$ est convergente. De même, une série de nombres complexes $\sum c_k$ est absolument convergente si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$.

DÉFINITION 4.1. *Soit* (u_k) *une suite de fonctions défies sur* I, *et soit* $E \subseteq I$. *On dit que la série* $\sum u_k$ ***converge normalement sur*** E *si la chose suivante a lieu : il existe une suite* (α_k) *de nombres réels positifs telle que*

$$\forall k\ \forall t \in I\ :\ |u_k(t)| \leqslant \alpha_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

THÉORÈME 4.2. *Toute série normalement convergente est uniformément convergente*

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_k$ converge normalement sur E, et soit (α_k) comme dans la définition. Pour tous $p < q$ et $t \in E$, on a

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k(t) \right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |u_k(t)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k := \varepsilon_{p,q}.$$

Comme $\varepsilon_{p,q}$ ne dépend pas de $t \in E$ et tend vers 0 quand $p, q \to \infty$ puisque la série $\sum \alpha_k$ est convergente, cela montre que la série $\sum u_k$ satisfait le critère de Cauchy uniforme. □

REMARQUE IMPORTANTE. En général, il n'est pas très difficile de montrer qu'une série de fonctions est normalement convergente si elle l'est effectivement. *Donc*, si on doit montrer qu'une série de fonctions $\sum u_k$ est uniformément convergente, il faut avant toute chose essayer de voir si elle ne serait pas normalement convergente.

TAUTOLOGIE. Pour montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur E, il faut obtenir une majoration de la forme $|u_k(t)| \leqslant \alpha_k$ pour $t \in E$, où α_k est *est le terme général d'une série convergente* et *ne dépend pas de* t.

EXEMPLE 4.3. Soit $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument en tout point $s \in \Omega$, et il y a convergence normale sur tout compact $E \subseteq \Omega$. La somme de cette série s'appelle la **fonction ζ de Riemann** :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Démonstration. Soit $s = x + iy \in \Omega$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a *par définition* $k^s = e^{s\log(k)} = e^{x\log(k)}e^{iy\log(k)} = k^x e^{iy\log(k)}$. Donc

$$|k^s| = k^x = k^{\mathrm{Re}(s)}.$$

On a ainsi $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^x}$, et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^s}\right| < \infty$ car $x > 1$. Ainsi, $\sum \frac{1}{k^s}$ converge absolument en tout point $s \in \Omega$.

Maintenant, soit E un compact de Ω. Comme la fonction $s \mapsto \mathrm{Re(s)}$ est *continue sur* E, elle possède un minimum sur E : on a un $s_0 \in E$ tel que $\forall s \in E\ \ \mathrm{Re}(s) \geqslant \beta_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. On en déduit

$$\forall s \in E\ \forall k \geqslant 1\ :\ \left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^{\mathrm{Re(s)}}} \leqslant \frac{1}{k^{\beta_0}} := \alpha_k.$$

Comme $\beta_0 > 1$, la série $\sum \alpha_k = \sum \frac{1}{k^{\beta_0}}$ est convergente ; et comme α_k ne dépend pas de $s \in E$, cela montre que la série $\sum \frac{1}{k^s}$ converge normalement sur E. □

5. Lien avec la “norme uniforme”

NOTATION. Si I est un ensemble quelconque, on note $\ell^\infty(I)$ l'ensemble de toutes les fonctions **bornées** $f : I \to \mathbb{C}$. Pour $f \in \ell^\infty(I)$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|;\ t \in I\}.$$

FAIT. $\ell^\infty(I)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(I)$.

Démonstration. Exo à savoir faire les yeux fermés. □

TAUTOLOGIE IMPORTANTE. Pour $f : I \to \mathbb{C}$ et $M \in \mathbb{R}^+$, on a l'équivalence

$$\left(f \in \ell^\infty(I) \quad \text{avec} \quad \|f\|_\infty \leqslant M\right) \iff \left(\forall t \in I\ :\ |f(t)| \leqslant M\right).$$

Attention : l'équivalence devient fausse si on remplace $\leqslant$ par $<$.

LEMME 5.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Alors $f_n \to f$ uniformément si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$; autrement dit, si $f_n \to f$* dans l'espace $(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$.

Remarque. Pour cette raison, la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle la **norme de la convergence uniforme**.

Preuve du lemme. Par définition $f_n \to f$ uniformément si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \Big(\forall t \in I\ :\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Maintenant, par la “tautologie importante”, on a l'équivalence

$$\Big(\forall t \in I\ :\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon\Big) \iff \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Donc $f_n \xrightarrow{CVU} f$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ :\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon;$$

ce qui signifie exactement que $f_n \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

COROLLAIRE 5.2. *Une suite (f_n) de fonctions bornées converge uniformément sur I si et seulement si elle converge dans $\ell^\infty(I)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

COROLLAIRE 5.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I. Si (f_n) converge uniformément sur I, alors (f_n) est **uniformément bornée** sur I : il existe une constante M telle que*

$$\forall n\ \forall t \in I\ :\ |f_n(t)| \leqslant M.$$

Démonstration. On sait que dans un evn, toute suite convergente est bornée. Donc, si (f_n) converge uniformément sur I, *i.e.* converge dans $\ell^\infty(I)$, elle est bornée dans $\ell^\infty(I)$: on a donc une constante M telle que $\forall n\ :\ \|f_n\|_\infty \leqslant M$, ce qui est la conclusion souhaitée par la “tautologie importante”. □

COROLLAIRE 5.4. *Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si f_n est une suite de fonctions* continues *convergeant uniformément sur $[a, b]$, alors (f_n) est uniformément bornée.*

Démonstration. On sait que toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée ; donc le corollaire précédent s'applique. □

Remarque. Une suite de fonctions (f_n) peut converger uniformément sur un ensemble I sans qu'aucune fonction f_n ne soit bornée sur I. Par exemple, $f_n(t) = t + 2^{-n}$ converge vers $f(t) = t$ uniformément sur $\mathbb{R}$, mais aucune f_n n'est bornée sur $\mathbb{R}$.

Lemme 5.5. *Soit (u_k) une suite de fonctions définies sur I. Alors la série $\sum u_k$ converge normalement sur I si et seulement si les u_k sont dans $\ell^\infty(I)$ et $\sum_{k=0}^\infty \|u_k\|_\infty < \infty$.*

Démonstration. Par définition, $\sum u_k$ converge normalement sur I si et seulement si il existe une suite de nombres réels (α_k) telle que

$$\forall k\ \forall t \in I\ |u_k(t)| \leqslant \alpha_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^\infty \alpha_k < \infty.$$

Autrement dit : $\sum u_k$ converge normalement si et seulement si

$$\exists (\alpha_k) \quad \text{telle que} \quad (\forall k\ : u_k \in \ell^\infty(I) \quad \text{avec} \quad \|u_k\|_\infty \leqslant \alpha_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^\infty \alpha_k < \infty;$$

ce qui est une manière alambiquée d'écrire : "les u_k sont dans $\ell^\infty(I)$ et $\sum_{k=0}^\infty \|u_k\|_\infty < \infty$". □

6. Approximation par des polynômes

Théorème 6.1. (Théorème de Weierstrass)
Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné. Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction ***continue*** *quelconque, on peut trouver une suite de fonctions* ***polynomiales*** *(P_n) telle que* $P_n(t) \to f(t)$ uniformément sur $[a,b]$.

Démonstration. On le fait pour $[a,b] = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Exo : c'est suffisant. (*Indication* : pour un intervalle $[a,b]$ quelconque (non trivial), il y a une bijection affine $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]) = [a,b]$; et si $\widetilde{P}$ est un polynôme, alors $P(t) := \widetilde{P}(\varphi^{-1}(t))$ aussi.)

Soit donc $f : [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \to \mathbb{C}$ continue. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (faire un dessin), et on note encore f ce prolongement.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$K_n(t) := \frac{1}{\alpha_n}(1-t^2)^n, \qquad \text{où} \quad \alpha_n := \textstyle\int_{-1}^1 (1-t^2)^n\, dt.$$

Puis on définit $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$P_n(x) := \int_{-1}^1 f(x-t) K_n(t)\, dt.$$

Fait 1. Les fonctions P_n sont polynomiales sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et donc sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Preuve du Fait 1. Par changement de variable, on a

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u) K_n(x-u)\, du.$$

De plus, si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $x - 1 \leqslant -\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x + 1$; donc l'intervalle $[x-1, x+1]$ contient $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Comme $f \equiv 0$ en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on peut donc *remplacer $\int_{x-1}^{x+1}$ par*

$\int_{-1/2}^{1/2}$:

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ : \ P_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) K_n(x-u)\, du.$$

Maintenant, comme $K_n(t)$ est une fonction polynomiale, $K_n(x-u)$ est une fonction polynomiale en x et u : on peut donc écrire $K_n(x-u) = \sum_{i=0}^{N} h_i(u) x^i$, où les h_i sont des polynômes. Donc, pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$P_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) \left(\sum_{i=0}^{N} h_i(u) x^i\right) du = \sum_{i=0}^{N} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) h_i(u)\, du\right) x^i := \sum_{i=0}^{N} c_i\, x^i,$$

où les coefficients c_i ne dépendent pas de x. □

FAIT 2. La suite (K_n) possède les propriétés suivantes.

(i) $K_n \geqslant 0$ et $\int_{-1}^{1} K_n(t)\, dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour tout δ vérifiant $0 < \delta < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{1} K_n(t)\, dt = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\delta} K_n(t)\, dt.$$

Preuve du Fait 2. (i) est évident par définition de α_n.

(ii) Fixons δ avec $0 < \delta < 1$. Comme K_n est paire, il suffit de montrer que $\int_{\delta}^{1} K_n(t)\, dt \to 0$. Comme la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est positive et décroissante sur $[0,1]$, on a d'une part

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt \geqslant \int_{0}^{\delta/2} (1-t^2)^n dt \geqslant (1-(\delta/2)^2)^n \times \frac{\delta}{2},$$

et d'autre part

$$\int_{\delta}^{1} (1-t^2)^n dt \leqslant (1-\delta^2)^n \times (1-\delta) \leqslant (1-\delta^2)^n.$$

Donc

$$\int_{\delta}^{1} K_n(t)\, dt = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\delta}^{1} (1-t^2)^n\, dt \leqslant \frac{2}{\delta}\, \frac{(1-\delta^2)^n}{\left(1-(\delta/2)^2\right)^n} = \frac{2}{\delta}\, \rho^n,$$

où $\rho := \frac{1-\delta^2}{1-(\delta/2)^2} < 1$. Et donc en effet $\int_{\delta}^{1} K_n(t)\, dt \to 0$.

□

FAIT 3. Pour tout $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et pour tout n, on a

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} \big(f(x-t) - f(x)\big) K_n(t)\, dt, \quad \text{et donc}$$

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt.$$

Preuve du Fait 3. Comme $\int_{-1}^{1} K_n(t)\, dt = 1$, on peut écrire

$$f(x) = f(x) \times \int_{-1}^{1} K_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(x) K_n(t)\, dt;$$

donc $P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t) K_n(t)\, dt - \int_{-1}^{1} f(x) K_n(t)\, dt$. □

On a maintenant tout ce qu'il faut pour montrer que $P_n(t) \to f(t)$ uniformément sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ (en fait, sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N\ \forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\ :\ |P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f est continue, elle est *uniformément continue* sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On peut donc trouver $\delta > 0$, *avec* $\delta \leqslant 1/4$ *si on veut*, tel que

$$\forall u, v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{vérifiant } |u - v| \leqslant \delta, \qquad \text{on a} \quad |f(v) - f(u)| \leqslant \varepsilon/2.$$

En particulier :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\ \forall t \in [-\delta, \delta]\ \ :\ \ |f(x-t) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Enfin, la fonction f est *bornée* sur $\mathbb{R}$ car elle est continue, donc bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; donc on a une constante M telle que

$$\forall x, t \in \mathbb{R}\ :\ |f(x-t) - f(x)| \leqslant M.$$

Par le Fait 3, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt \\
&\leqslant \int_{-1}^{-\delta} (\cdots) + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, K_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{1} (\cdots) \\
&\leqslant M \left(\int_{-1}^{-\delta} K_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{1} K_n(t)\, dt \right) + \varepsilon/2 \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\, dt \\
&\leqslant M\, \varepsilon_n + \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Mais par le Fait 2, $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$; donc on peut trouver un entier N tel que $\forall n \geqslant N\ :\ M\varepsilon_n \leqslant \varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n \geqslant N\ \ \forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\ :\ |P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Rappel. Soit E un evn. Une partie D de E est dite **dense dans** E si on a $\overline{D} = E$. Il revient au même de dire

- qu'on a $D \cap O \neq \varnothing$ pour tout ouvert non vide $O \subseteq E$;
- que pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $z \in D$ tel que $\|z - x\| < \varepsilon$;
- que pour tout $x \in E$, on peut trouver une suite (z_n) d'éléments de D telle que $z_n \to x$.

Corollaire 6.2. *Notons $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$. Alors les fonctions polynomiales sont denses dans $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Démonstration. Le Théorème de Weierstrass dit que pour toute $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on peut trouver une suite de fonctions polynomiales (P_n) telle que $\|P_n - f\|_\infty \to 0$; ce qui est la définition (ou en tous cas une formulation équivalente) de la densité. □

Chapitre 2

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

1. Intégrabilité

Le théorème suivant est facile à démontrer, et suffira amplement pour toutes les "interversions de limites et d'intégrales" qu'on aura besoin de faire ultérieurement. Des résultat plus sophistiqués seront démontré à la fin du chapitre.

THÉORÈME 1.1. *Soit $[a,b]$ un intervalle **fermé borné** de $\mathbb{R}$, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$. On suppose que (f_n) converge **uniformément** sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et $\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$. Ainsi, on a le droit d'écrire*

$$\int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

si on a vérifié que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Démonstration. (i) *Supposons avoir montré* que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, et montrons que $\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(t)-f(t)\big)\,dt\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \leqslant \|f_n-f\|_\infty \times (b-a);$$

donc tout est clair !

(ii) Maintenant, *montrons* que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. En considérant séparément parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas où f et les f_n sont à valeurs réelles.

Soit $\varepsilon>0$. On cherche des fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi\leqslant f\leqslant\psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \big(\psi(t)-\varphi(t)\big)\,dt\leqslant\varepsilon.$$

Comme $f_n\to f$ uniformément, on peut trouver un entier N tel que

$$\forall t\in[a,b]\ :\ |f_N(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon;$$

autrement dit :

$$\forall t\in[a,b]\ :\ f_N(t)-\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant f_N(t)+\varepsilon.$$

Ensuite, f_N est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$; donc on peut trouver des fonctions en escalier φ_N et ψ_N telles que

$$\varphi_N\leqslant f_N\leqslant\psi_N \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \big(\psi_N(t)-\psi_N(t)\big)\,dt\leqslant\varepsilon.$$

On a alors

$$\forall t \in [a,b] \ : \ \underbrace{\varphi_N(t) - \varepsilon}_{\varphi(t)} \leqslant f_N(t) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f_N(t) + \varepsilon \leqslant \underbrace{\varphi_N(t) + \varepsilon}_{\psi(t)}.$$

Les fonctions φ et ψ sont *en escalier*, et

$$\int_a^b \big(\psi(t) - \varphi(t)\big)\, dt \leqslant \int_a^b \big((\psi_N - \varphi_N) + 2\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon\big(1 + 2(b-a)\big).$$

Conclusion : en partant de $\varepsilon' := \varepsilon/\big(1+2(b-a)\big)$ au lieu de ε, on obtient le résultat souhaité. □

Corollaire 1.2. *Soit (u_k) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$. Si la série $\sum u_k$ converge **normalement** sur $[a,b]$, alors on a le droit d'écrire*

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\Big)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t)\, dt.$$

Démonstration. On applique le théorème à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, qui converge uniformément vers $S = \sum_{k=0}^\infty u_k$ puisque la convergence normale entraine la convergence uniforme. Cela donne

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k.$$

□

Exemple 1.3. Pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x).$$

Démonstration. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \qquad \text{pour tout } t \in [0,x],$$

où la série converge normalement sur $[0,x]$ car $|t^k| \leqslant x^k$ sur $[0,x]$ et $x<1$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

□

Exemple. Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions sur $[0,1]$ définie comme suit : $f_n(t) := 0$ en dehors de $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et $f_n(t) := n$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ (faire un dessin). Alors $f_n(t) \to 0$ simplement sur $[0,1]$ (exo), mais $\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$ pour tout n. Donc : pour pouvoir intervertir une limite et une intégrale, la convergence simple ne suffit pas.

2. Continuité

THÉORÈME 2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On suppose que les f_n sont* ***continues****, et que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec de plus* ***convergence uniforme*** *sur tout compact $E \subseteq I$. Alors la fonction $f := \lim f_n$ est* ***continue*** *sur I.* En particulier *: si les f_n sont continues et si $f_n \to f$* uniformément sur I, *alors f est continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est continue sur tout intervalle *fermé borné* $[a, b] \subseteq I$ (exo).

Soit $t_0 \in [a, b]$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. On cherche un $\delta > 0$ tel que

$$|f(t) - f(t_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [a, b] \text{ vérifiant } |t - t_0| \leqslant \delta.$$

Comme $[a, b]$ est compact, on sait que $f_n \to f$ uniformément sur $[a, b]$. Donc on peut trouver un entier N tel que

$$\forall t \in [a, b] \ : \ |f_N(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon/3.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leqslant |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leqslant 2\varepsilon/3 + |f_N(t) - f_N(t_0)| \qquad \text{pour tout } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Ensuite, f_N étant continue au point t_0, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|f_N(t) - f_N(t_0)| \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } t \in I \text{ vérifiant } |t - t_0| \leqslant \delta.$$

Alors, si $t \in [a, b]$ vérifie $|t - t_0| \leqslant \delta$, on a

$$|f(t) - f(t_0)| \leqslant 2\varepsilon/3 + |f_N(t) - f_N(t_0)| \leqslant \varepsilon.$$

□

REMARQUE. La preuve donne en fait le résultat suivant : *Si $f_n \to f$ uniformément sur tout compact, alors f est continue en tout point où les f_n sont continues.*

COROLLAIRE 2.2. *Soit (u_k) une suite de fonctions* ***continues*** *sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que la série $\sum u_k(t)$ converge en tout point $t \in I$, avec* ***convergence normale*** *sur tout compact $E \subseteq I$. Alors la fonction $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.* En particulier *: si la série $\sum u_k$ converge* normalement sur I, *alors $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.*

Démonstration. On applique le théorème aux sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, qui sont des fonctions continues et convergent vers f uniformément sur tout compact. □

EXEMPLE 1. La fonction ζ est continue sur $]1, \infty[$.

Démonstration. On a vu que la série $\sum \frac{1}{k^s}$ converge normalement sur tout compact $E \subseteq]1, \infty[$. Donc $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ est continue puisque les fonctions $u_k(s) = \frac{1}{k^s}$ le sont. □

EXEMPLE 2. La fonction $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Les fonctions $u_k(t) = \frac{e^{ikt}}{k^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et la série $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ □

Exemple 3. Soit (f_n) la suite de fonctions continues définies sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$. La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ par la fonction *non continue* valant 0 sur $[0,1[$ et 1 au point 1. Donc : même si les f_n sont continues, la convergence simple ne suffit pas pour conclure à la continuité de $f = \lim f_n$.

Corollaire 2.3. *L'espace $\mathcal{C}([a,b])$ est un sous-espace **fermé** de $\ell^\infty([a,b])$.*

Démonstration. Le théorème peut se reformuler comme suit : si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}([a,b])$ convergeant pour la norme de $\ell^\infty([a,b])$ vers une une certaine f, alors $f \in \mathcal{C}([a,b])$; ce qui signifie exactement que $\mathcal{C}([a,b])$ est fermé dans $\ell^\infty([a,b])$. $\square$

3. Dérivabilité

Théorème 3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ définies sur I, et soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que*

(i) *$f_n(t) \to f(t)$ simplement sur I ;*

(ii) *la **suite des dérivées** (f_n') converge simplement sur I vers une fonction $g : I \to \mathbb{C}$, avec **convergence uniforme** sur tout compact $E \subseteq I$.*

Alors on peut conclure que la fonction $f := \lim f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $f' = g = \lim f_n'$. En particulier *: si $f_n \to f$ simplement sur I et si (f_n') converge* uniformément sur *I, alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \lim f_n'$.*

Démonstration. D'abord, la fonction g est *continue* sur I d'après le théorème de continuité, car les f_n' sont continues.

Soit $x_0 \in I$ fixé. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout $x \in I$ et pour tout n :

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt.$$

Comme $f_n' \to g$ uniformément sur l'intervalle compact $[x_0, x]$ (ou $[x, x_0]$ si $x < x_0$), on peut passer à la limite sous l'intégrale d'après le théorème 1.1, et on obtient

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

Comme g est continue, on en déduit (à nouveau par le théorème fondamental de l'analyse) que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f' = g$. $\square$

Remarque. Le théorème reste en fait vrai si les f_n sont seulement supposées *dérivables* : la conclusion est que la fonction limite f est dérivable avec $f' = g$. La preuve est cependant un peu plus délicate.

Corollaire 3.2. *Soit (u_k) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum u_k(t)$ converge simplement sur I et si la série des dérivées $\sum u_k'(t)$ converge normalement sur tout compact $E \subseteq I$, alors la fonction $f = \sum_{k=0}^\infty u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $f' = \sum_{k=0}^\infty u_k'$.* En particulier*, si la série $\sum u_k$ converge simplement sur I et si la série $\sum u_k'$ converge normalement sur I, alors $f = \sum_{k=0}^\infty u_k$ est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \sum_{k=0}^\infty u_k'$.*

Démonstration. On applique le théorème aux sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. $\square$

Exemple 1. La fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, \infty[$.

Démonstration. On a $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(s)$, où $u_k(s) = \frac{1}{k^s} = e^{-s\log(k)}$ Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,\infty[$, avec $u_k'(s) = -\log(k)e^{-s\log(k)} = -\frac{\log(k)}{k^s}\cdot$ On vérifie (exo) que la série $\sum u_k'(s)$ converge normalement sur tout compact $E \subseteq]1,\infty[$; donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,\infty[$, avec $\zeta'(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^s}\cdot$ En répétant ce raisonnement, on montre par récurrence que ζ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$ (donc de classe $\mathcal{C}^\infty$), avec $\zeta^{(n)}(s) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k)^n}{k^s}\cdot$ □

Exemple 2. La fonction $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k^3}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si on pose $u_k(t) = \frac{e^{ikt}}{k^3}$, alors la série $\sum u_k(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $|u_k(t)| = \frac{1}{k^3}$; donc f est bien définie. Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $u_k'(t) = i\,\frac{e^{ikt}}{k^2}\cdot$ Donc la série$\sum u_k'(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (micro-exo), et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Exemple 3. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales telle que $P_n(t) \to f(t) = |t|$ uniformément sur $[-1,1]$; et la fonction f n'est pas dérivable en 0. Donc : même si les f_n sont $\mathcal{C}^\infty$, la convergence uniforme de la suite (f_n) ne suffit pas à assurer la dérivabilité de $f = \lim f_n$. Voici un exemple plus “élémentaire” : pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t) := \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}\cdot$ Alors les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (micro-exo, la suite (f_n) converge simplement vers $f(t) = |t|$ (autre micro-exo), et la convergence est en fait uniforme car $|f_n(t) - f(t)| = \sqrt{t^2 + 1/n} - \sqrt{t^2} \leqslant \sqrt{1/n}$ pour tout n et pour tout $t \in [-1,1]$ (exo : on a $\sqrt{u+v} \leqslant \sqrt{u} + \sqrt{v}$ pour tous $u, v \geqslant 0$).

Exemple 4. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{in^2t}$. Alors $f_n(t) \to 0$ simplement, les f_n sont $\mathcal{C}^1$, $f_n(t) \to 0$ uniformément, mais $|f_n'(t)| \to \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc : même si $f = \lim f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, la convergence uniforme de la suite f_n vers f ne suffit pas pour affirmer que $f_n' \to f'$.

4. Application : intégrales à paramètres

Soit Λ un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse à une fonction $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ de la forme

$$f(\lambda) = \int_a^b F(\lambda, t)\, dt,$$

où $F : \Lambda \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $t \mapsto F(\lambda, t)$ soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Proposition 4.1. *Si la fonction $F : \Lambda \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est **continue sur** $\Lambda \times [a,b]$, alors la fonction $f(\lambda) = \int_a^b F(\lambda,t)\,dt$ est **continue sur** Λ.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \Lambda$ fixé, et soit (λ_n) une suite d'éléments de Λ telle que $\lambda_n \to \lambda$. On veut montrer que $f(\lambda_n) \to f(\lambda)$.

Comme F est continue sur $\Lambda \times [a,b]$, on sait que $F(\lambda_n, t) \to F(\lambda, t)$ uniformément sur $[a,b]$ (*cf* l'Exemple 2.3 du Chapitre 1). Donc $f(\lambda_n) = \int_a^b F(\lambda_n, t)\,dt$ tend vers $\int_a^b F(\lambda,t)\,dt = f(\lambda)$, d'après le Théorème 1.1. □

Proposition 4.2. *On suppose que la fonction $F : \Lambda \times [a,b] \to \mathbb{C}$ vérifie les hypothèses suivantes :*

(i) *pour tout $t \in [a,b]$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda, t)$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur Λ ;*

(ii) *la fonction* $(\lambda, t) \mapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t)$ *est* ***continue sur*** $\Lambda \times [a, b]$.

Alors la fonction $f(\lambda) = \int_a^b F(\lambda, t)\, dt$ *est* ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ *sur* Λ*, et* ***on peut dériver sous l'intégrale*** *:*

$$\forall \lambda \in \Lambda \ : \ f'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt.$$

Démonstration. En considérant séparément partie réelle et partie imaginaire, on se ramène au cas où F est à valeurs réelles.

Par le "théorème de continuité", la fonction $g(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt$ est *continue* sur Λ. Donc, il suffit de montrer que f est *dérivable* en tout point, avec $f' = g$.

Soit $\lambda \in \Lambda$ fixé. Il s'agit de montrer que pour toute suite (λ_n) tendant vers λ (avec $\lambda_n \neq \lambda$ pour tout n), on a que $\frac{f(\lambda_n) - f(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \to g(\lambda)$. On fixe donc une telle suite (λ_n).

On a par définition

$$f(\lambda_n) - f(\lambda) = \int_a^b \big(F(\lambda_n, t) - F(\lambda, t)\big)\, dt,$$

et donc

$$\frac{f(\lambda_n) - f(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} = \int_a^b \frac{F(\lambda_n, t) - F(\lambda, t)}{\lambda_n - \lambda}\, dt.$$

De plus, par le *théorème des accroissements finis* (applicable car F est à valeurs réelles), on peut écrire, pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout n :

$$\frac{F(\lambda_n, t) - F(\lambda, t)}{\lambda_n - \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(c_{n,t}, t),$$

où le point $c_{n,t}$ est entre λ et λ_n. En particulier, $c_{n,t} \to \lambda$ quand $n \to \infty$, **uniformément par rapport à** $t \in [a, b]$ (car $|c_{n,t} - \lambda| \leqslant |\lambda_n - \lambda|$, qui tend vers 0 et ne dépend pas de t). Comme la fonction $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ est continue sur $\Lambda \times [a, b]$, on en déduit (*cf* l'Exemple 2.3 du Chapitre 1) que

$$\frac{F(\lambda_n, t) - F(\lambda, t)}{\lambda_n - \lambda} \to \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t) \qquad \text{uniformément sur } [a, b].$$

Donc, d'après le théorème 1.1,

$$\frac{f(\lambda_n) - f(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \to \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt = g(\lambda).$$

□

Exemple. Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\, dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{\lambda e^{it}}\, dt.$$

On vérifie sans aucune difficulté (micro-exo) que la fonction $F(\lambda, t) = e^{\lambda e^{it}}$ vérifie les hypoythèses du "théorème de dérivabilité". Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda}\Big(e^{\lambda e^{it}}\Big)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{it} e^{\lambda e^{it}}\, dt.$$

Mais si $\lambda \neq 0$ est fixé, alors

$$e^{it}e^{\lambda e^{it}} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{i\lambda}\, e^{\lambda e^{it}}\Big).$$

Donc

$$f'(\lambda) = \Big[\frac{1}{i\lambda}\, e^{\lambda e^{it}}\Big]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \neq 0.$$

Comme f' est continue, c'est vraie également pour $\lambda = 0$. Ainsi $f' \equiv 0$, et donc la fonction f est *constante* sur $\mathbb{R}$. En particulier $f(1) = f(0)$, autrement dit

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{0\, e^{it}}\, dt = 2\pi.$$

Exercice. Soit $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$I(x) = \int_0^{\pi} e^{x\cos\theta} d\theta.$$

Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle

$$x^2 I''(x) + xI'(x) - x^2 I(x) = 0.$$

5. Convergence bornée et convergence dominée

Dans cette section, on va démontrer deux résultats d'interversion de limite et d'intégrale beaucoup plus "performants" que le Théorème 1.1. Ces résultats s'appellent le **Théorème de convergence bornée** et le **Théorème de convergence dominée**. (Le second est en fait plus général que le premier, mais le premier est plus simple à énoncer.)

5.1. Convergence bornée. Le *Théorème de convergence bornée* est un résultat d'interversion de limite et d'intégrale sur un intervalle compact $[a, b]$, où l'hypothèse de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) est remplacée par une hypothèse du type "convergence simple + bornitude uniforme".

THÉORÈME 5.1. *Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle* compact*, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. On suppose que (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et que la suite (f_n) est **uniformément bornée**, autrement dit qu'il existe une constante M telle que $|f_n(t)| \leqslant M$ pour tout n et pour tout $t \in [a, b]$. Alors $\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$.*

Remarque. Formellement, le "point faible" du Théorème 5.1 est qu'on doit *supposer* que la fonction limite f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. L'hypothèse ne peut pas être omise si on reste dans le cadre de l'intégrale au sens de Riemann : il y a des cas où la fonction limite *n'est pas* intégrable au sens de Riemann. Cependant, il existe des théories de l'intégration plus générales, par exemple l'intégration dite **au sens de Lebesgue**, qui permettent d'éliminer ce "point faible" : sous l'hypothèse "convergence simple + bornitude uniforme", la fonction limite f est automatiquement intégrable sur $[a, b]$ au sens de la théorie considérée.

La preuve du Théorème 5.1 va être un peu longue et un peu délicate ; mais le résultat en vaut la peine. On aura besoin de manipuler des sous-ensembles particuliers de $[a, b]$, qu'on qualifiera d'"élémentaires".

Définition 5.2. *On dira qu'un ensemble $E \subseteq [a,b]$ est un* ***ensemble élémentaire*** *si E est une réunion finie d'intervalles.*

Remarque 1. Si E est un ensemble élémentaire, alors E est réunion finie d'intervalles *deux à deux disjoints.*

Démonstration. C'est un bon exo de rédaction. □

Remarque 2. Un ensemble $E \subseteq [a,b]$ est élémentaire si et seulement si sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ est en escalier sur $[a,b]$.

Fait 1. La famille des ensembles élémentaires possède les propriétés de "stabilité" suivantes.

(1) Si E est un ensemble élémentaire, alors $E^c = [a,b]\backslash E$ aussi.
(2) Si $E_1, \dots, E_N$ sont des ensembles élémentaires, alors $E_1 \cup \cdots \cup E_N$ et $E_1 \cap \cdots \cap E_N$ aussi.

Démonstration. On la laisse à nouveau en exo. □

Notation. Si E est un ensemble élémentaire, $E = E = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ où les intervalles I_k sont deux à deux disjoints, on pose

$$|E| = |I_1| + \cdots + |I_n|.$$

Ceci ne dépend pas de la façon d'écrire E sous la forme $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ avec des I_k disjoints : on a en fait

$$|E| = \int_a^b \mathbf{1}_E.$$

On dit que $|E|$ est la **longueur** de l'ensemble élémentaire E.

Remarque. On a $|E| \leqslant b-a$ pour tout ensemble élémentaire $E \subseteq [a,b]$.

Fait 2. Si E et F sont des ensembles élémentaires tels que $E \cap F = \varnothing$, alors $|E \cup F| = |E| + |F|$. Plus généralement, si E et F sont des ensembles élémentaires quelconques, alors

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|.$$

En particulier :

$$|E \cup Fs| \leqslant |E| + |F|.$$

Démonstration. On a $\mathbf{1}_{E\cup F} = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F - \mathbf{1}_{E\cap F}$ (exo) ; d'où le résultat en intégrant entre a et b. □

Voici maintenant le lemme crucial.

Lemme 5.3. *Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles élémentaires. Si $|E_n|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, alors il existe un point $x \in [a,b]$ qui appartient à une infinité de E_n.*

Démonstration. D'abord, on remarque que pour tout ensemble élémentaire E, on peut trouver un ensemble élémentaire *compact* $\widetilde{E} \subseteq E$ tel que $|\widetilde{E}|$ est aussi proche qu'on veut de $|E|$ (exo). Donc on peut trouver une suite d'ensembles élémentaires compacts $\widetilde{E}_n$ tels que $\widetilde{E}_n \subseteq E_n$ pour tout n et $|\widetilde{E}_n|$ ne tend pas vers 0. Par conséquent : quitte à remplacer E_n par $\widetilde{E}_n$, on peut suposer que *les E_n sont compacts*.

Il s'agit de montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (m_k) telle que $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_{m_k} \neq \varnothing$.

Fait. Il existe un entier m_0 tel que $|E_n \cap E_{m_0}|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.

Preuve du Fait. Comme $|E_n|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|E_n| \geqslant \alpha \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Supposons que $|E_l \cap E_n|$ tende vers 0 quand $n \to \infty$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, et essayons d'obtenir une contradiction.

Posons $l_0 = 0$. Par hypothèse, on peut trouver un entier l_1 tel que $|E_{l_0} \cap E_{l_1}| \leqslant \alpha/2$; et on a alors

$$|E_{l_0} \cup E_{l_1}| = |E_{l_0}| + |E_{l_1}| - |E_{l_0} \cap E_{l_1}| \geqslant 3\alpha/2.$$

Ensuite, comme $|(E_{l_0} \cup E_{l_1}) \cap E_n| \leqslant |E_{l_0} \cap E_n| + |E_{l_1} \cap E_n|$, notre hypothèse donne que $|(E_{l_0} \cup E_{l_1}) \cap E_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc on peut trouver un entier l_2 tel que $|(E_{l_0} \cup E_{l_1}) \cap E_{l_2}| \leqslant \alpha/2$, et on a alors

$$|E_{l_0} \cup E_{l_1} \cup E_{l_2}| = |E_{l_0} \cup E_{l_1}| + |E_{l_2}| - |(E_{l_0} \cup E_{l_1}) \cap E_{l_2}| \geqslant 4\alpha/2.$$

On voit maintenant qu'on peut construire par récurrence une suite d'entiers $(l_k)_{k\geqslant 0}$ telle que

$$|E_{l_0} \cup \cdots \cup E_{l_k}| \geqslant (k+1)\alpha/2 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Alors $|E_{l_0} \cup \cdots \cup E_{l_k}| \to \infty$, ce qui n'est pas possible car $|E_{l_0} \cup \cdots \cup E_{l_k}| \leqslant b - a$ pour tout k. □

On a donc démontré le Fait : il existe un entier m_0 tel que $|E_n \cap E_{m_0}|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$. Si on réapplique le Fait avec la suite $(E'_n) := (E_n \cap E_{m_0})_{n>m_0}$, on obtient un entier $m_1 > m_0$ tel que $|E_n \cap E_{m_1} \cap E_{m_0}|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$; et ainsi de suite. Ainsi, on obtient une suite strictement croissante d'entiers (m_k) telle que $|E_n \cap E_{m_k} \cap \cdots \cap E_{m_0}|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $C_k := E_{m_k} \cap \cdots \cap E_{m_0}$ est *non vide* pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais (C_k) est une suite décroissante de compacts car les E_n sont compacts. Donc $\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \neq \varnothing$, *i.e.* $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_{m_k} \neq \varnothing$. Si on choisit $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} E_{m_k}$, alors x appartient à une infinité de E_n par définition. □

Avant de donner la preuve du Théorème de convergence bornée, introduisons une autre notation.

Notation. Si $E \subseteq [a, b]$ est un ensemble élémentaire et si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, on pose

$$\int_E \varphi := \int_a^b \mathbf{1}_E\, \varphi.$$

Ceci a un sens car la fonction $\mathbf{1}_E\, \varphi$ est en escalier.

Remarque. Pour toute constante c, on a $\int_E c\mathbf{1} = c\,|E|$.

Fait 3. Si E, F sont des ensembles élémentaires tels que $E \cap F = \varnothing$ et et si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, alors

$$\int_{E\cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

Démonstration. C'est clair par linéarité de l'intégrale puisque $\mathbf{1}_{E\cup F} = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F$. □

On peut maintenant démontrer le Théorème de convergence bornée.

Preuve du Théorème 5.1. Quitte à remplacer f_n par $|f_n - f|$ et M par $2M$, on peut supposer que $f_n \geqslant 0$ et que $f_n \to 0$ simplement. Il s'agit alors de montrer que $\int_a^b f_n \to 0$.

De plus, on peut également supposer que *les f_n sont des fonctions en escalier*. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver une fonction φ_n en escalier telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f_n$ et $\int_a^b \varphi_n \geqslant \int_a^b f_n - 2^{-n}$. Alors $\varphi_n \to 0$ simplement ; et si on sait montrer que $\int_a^b \varphi_n \to 0$, on saura que $\int_a^b f_n \to 0$ car $\int_a^b f_n - \int_a^b \varphi_n \to 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$E_{\varepsilon,n} = \big\{x \in [a,b];\ f_n(x) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Comme les f_n sont des fonctions en escalier, on voit facilement que les $E_{\varepsilon,n}$ sont des ensembles élémentaires (exo). De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|E_{\varepsilon,n}| \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

En effet, si si $|E_{\varepsilon,n}|$ ne tendait pas vers 0, alors, par le Lemme 5.3, on pourrait trouver un point $x \in [a,b]$ appartenant à une infinité de $E_{\varepsilon,n}$, autrement dit tel que $f_n(x) \geqslant \varepsilon$ pour une infinité de n ; ce qui n'est pas possible puisque $f_n(x) \to 0$.

Il est temps de conclure. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, on peut trouver un entier N tel que $|E_{\varepsilon,n}| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Si $n \geqslant N$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n &= \int_{E_{\varepsilon,n}} f_n + \int_{E^c_{\varepsilon,n}} f_n && \text{par le Fait 3}\\
&\leqslant \int_{E_{\varepsilon,n}} M\mathbf{1} + \int_{E^c_{\varepsilon,n}} \varepsilon\mathbf{1} && \text{car } f_n \leqslant M \text{ et } f_n \leqslant \varepsilon \text{ sur } E^c_{\varepsilon,n}\\
&= M\,|E_{\varepsilon,n}| + \varepsilon\,|E^c_{\varepsilon,n}|\\
&\leqslant M\varepsilon + (b-a)\varepsilon = (M+b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc bien montré que $\int_a^b f_n \to 0$. □

Remarque 5.4. On peut affaiblir légèrement les hypothèses du Théorème de convergence bornée : au lieu de supposer que (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, il suffit de supposer qu'il existe une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ intégrable sur $[a,b]$ telle que $f_n(t) \to f(t)$ **pour tout $t \in [a,b]\backslash S$, où S est un ensemble fini**.

Démonstration. Il suffit de redéfinir les f_n sur l'ensemble S. De façon précise, on pose $\widetilde{f}_n(t) := f_n(t)$ si $t \in [a,b]\backslash S$ et $\widetilde{f}_n(t) := f(t)$ si $t \in S$. Alors chaque $\widetilde{f}_n$ est intégrable avec $\int_a^b \widetilde{f}_n = \int_a^b f_n$, car $\widetilde{f}_n$ ne diffère de f_n que sur un nombre fini de points ; la suite $(\widetilde{f}_n)$ converge *en tout point* vers f ; et la suite $(\widetilde{f}_n)$ est toujours uniformément bornée. Si on applique la Théorème de convergence bornée à $(\widetilde{f}_n)$, on obtient le résultat souhaité. □

Remarque 5.5. La conclusion du Théorème de convergence bornée peut être renforcée : en appliquant le théorème aux fonctions $\widetilde{f_n} := |f_n - f|$ (exo : on peut le faire), on voit qu'en fait

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Exemple 1. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. On supose qu'on a $|\varphi(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [a,b]$, et que $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in [a,b]\backslash S$, où S est un ensemble fini. Alors $\int_a^b \varphi(t)^n dt \to 0$ quand $n \to \infty$.

Démonstration. Si on pose $f_n(t) := \varphi(t)^n$, alors $f_n(t) \to 0$ pour tout $t \in [a,b]\backslash S$, et $|f_n(t)| \leqslant 1$ pour tout n et pour tout $t \in [a,b]$. Donc le Théorème de convergence bornée "amélioré" s'applique (Remarque 5.4). $\square$

Exemple 2. Montrons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\log|2\sin(\theta/2)|. \tag{5.1}$$

Le fait que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ découle par exemple du critère d'Abel pour les séries (exo).

Le point de départ est d'écrire que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}\right),$$

et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(k+1)\theta} \int_0^1 x^k dx = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{ik\theta} x^k dx.$$

En intervertissant formellement la somme et l'intégrale et en se souvenant que

$$\forall x \in [0,1[\, : \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta} x^k = \frac{1}{1 - e^{i\theta} x},$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{ik\theta} x^k dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta} x^k\right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{i\theta} x}. \tag{5.2}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{i\theta} x} = \int_0^1 \frac{dx}{e^{-i\theta} - x}.$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}-x}\right) dx \\
&= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}-x}{|e^{-i\theta}-x|^2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta + x^2}\, dx \\
&= -\int_0^1 \frac{x-\cos\theta}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\log\big((x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\big)\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\log\big(2(1-\cos\theta)\big);
\end{aligned}
$$

ce qui est la formule souhaitée car $2(1-\cos\theta) = 4\sin^2(\theta/2)$.

Pour achever la démonstration, il reste donc à justifier proprement (5.2) ; ce qu'on va faire en utilisant le Théorème de convergence bornée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}x^k$$

Chaque fonction f_n est continue, donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. De plus,

$$f_n(x) \to f(x) := \frac{1}{1-e^{i\theta}x} \quad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Enfin, comme $f_n(x) = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}x^{n+1}}{1-e^{i\theta}x}$, on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-e^{i\theta}x|} \qquad \text{pour tout } n \text{ et pour tout } x \in [0,1].$$

Le 2ème membre de l'inégalité est une fonction continue de $x \in [0,1]$, et peut donc se majorer par une constante M indépendante de x puisque $[0,1]$ est compact. On a ainsi

$$\forall n \;\; \forall x \in [0,1] \; : \; |f_n(x)| \leqslant M.$$

Donc le Théorème de convergence bornée "amélioré" s'applique (Remarque 5.4 avec $S = \{1\}$) : on peut affirmer que

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1-e^{i\theta}x},$$

autrement dit que $\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 e^{ik\theta}x^k dx \to \int_0^1 \frac{dx}{1-e^{i\theta}x}$ quand $n \to \infty$; ce qui est exactement le contenu de (5.2).

Exercice. Le but de l'exercice est de donner une preuve de la formule (5.1) qui n'utilise pas le Théorème de convergence bornée.

(1) Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle compact, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann, $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$. Soit également $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers f sur $[a,b[$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a,\beta]$, $\beta < b$. De plus, on suppose que la suite (f_n) est *uniformément bornée* sur $[a,b]$. Montrer (sans utiliser le Théorème de convergence bornée !) qu'on peut passer à la limite sous l'intégrale, *i.e.* que $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ quand $n \to \infty$.

(2) Démontrer la formule (5.1).

5.2. Convergence dominée. Pour finir ce chapitre, on va aller un cran plus loin dans la généralisation, en démontrant un théorème d'interversion de limite et d'intégrale où on intègre sur un intervalle quelconque (pas forcément fermé borné).

On a d'abord besoin d'un peu de notations et de vocabulaire. Dans tout ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, qu'on écrit

$$I = (a,b), \quad \text{où } -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty.$$

Le fait qu'on mette des parenthèses signifie qu'on ne précise pas quelle est la nature de l'intervalle I (ouvert, fermé, semi-ouvert).

• On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **localement intégrable sur** I si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle compact $[\alpha,\beta] \subseteq I$. Par exemple, toute fonction *continue* sur I est localement intégrable. Et si I est lui même *compact*, $I = [a,b]$, alors "localement intégrable sur $[a,b]$" est synonyme de "intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$" (micro-exo).

• Si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable positive, on pose

$$\int_I g(t)\,dt := \lim_{\substack{\alpha \to a^+ \\ \beta \to b^-}} \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Cette limite *existe toujours dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ car $g \geqslant 0$: en effet, $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt$ croit quand l'intervalle $[\alpha,\beta] \subseteq]a,b[$ "croit", *i.e.* quand α décroit et quand β croit. Avec cette notation, on voit qu'on a l'équivalence suivante :

$$\int_I g(t)\,dt < \infty \iff \text{l'intégrale "généralisée" } \int_a^b g(t)\,dt \text{ existe;}$$

et que dans ce cas on a $\int_I g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$. En conséquence, si l'intégrale généralisée" $\int_a^b g(t)\,dt$ n'existe pas on posera $\int_a^b g(t)\,dt := \infty$. Ainsi, que l'intégrale "généralisée" $\int_a^b g(t)\,dt$ existe ou non, on a

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_{(a,b)} g(t)\,dt = \lim_{\substack{\alpha \to a^+ \\ \beta \to b^-}} \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Insistons lourdement : ceci n'a pour le moment de sens que pour une fonction $g \geqslant 0$.

• Une remarque : si I est un intervalle *fermé borné*, $I = [a,b]$ et si $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est intégrable au sens de Riemann, alors $\int_{[a,b]} g(t)\,dt$ est l'intégrale de g entre a et b au sens usuel (exo). Il n'y a donc pas de conflit de notation : $\int_a^b g(t)\,dt$ a bien le sens qu'on pense.

• On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **intégrable sur** I si f est localement intégrable et si on a $\int_I |f(t)|\, dt < \infty$ (ce qui a bien un sens car la fonction $g := |f|$ est localement intégrable et $\geqslant 0$) ; autrement dit, si l'intégrale "généralisée" $\int_a^b f(t)\, dt$ est *absolument convergente*. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on pose

$$\int_I f(t)\, dt := \int_a^b f(t)\, dt == \lim_{\substack{\alpha \to a^+ \\ \beta \to b^-}} \int_\alpha^\beta f(t)\, dt.$$

• Comme plus haut, si I est compact, $I = [a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ est l'intégrale de f sur $[a, b]$ au sens usuel : l'intégrale n'est pas du tout "généralisée".

On peut maintenant énoncer le *Théorème de convergence dominée.*

THÉORÈME 5.6. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables, $f_n : I \to \mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction* localement intégrable $f : I \to \mathbb{C}$. *De plus, on suppose que l'**hypothèse de domination** suivante est vérifiée : il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$* intégrable sur I *telle que $\forall n\ \forall t \in I\ :\ |f_n(t)| \leqslant g(t)$; autrement dit :*

$$\forall n\ \forall t \in I\ :\ |f_n(t)| \leqslant g(t) \qquad \text{et} \qquad \int_I g(t)\, dt < \infty.$$

Alors la fonction $f = \lim f_n$ est intégrable sur I, et $\int_I f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$. Ainsi : on a le droit d'écrire

$$\int_I \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$$

si on a su montrer *que l'hypothèse de domination est satisfaite.*

Démonstration. On sait par hypothèse que f est localement intégrable sur I. De plus, en faisant $n \to \infty$ dans l'hypothèse de domination, on obtient $|f(t)| \leqslant g(t)$ pour tout $t \in I$. Donc $\int_I |f(t)|\, dt \leqslant \int_I g(t)\, dt < \infty$, et donc f est intégrable sur I.

Dans la suite, on écrit $I = (a, b)$. Il reste donc à montrer que $\int_a^b f_n(t)\, dt \to \int_a^b f(t)\, dt$ quand $n \to \infty$.

Comme la fonction g est intégrable sur I, elle est en localement intégrable, et donc *bornée* sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subseteq I$ (les fonctions intégrables au sens de Riemann sont bornées). D'après l'hypothèse de domination, on voit donc que la suite (f_n) est uniformément bornée sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subseteq I$. D'après le *Théorème de convergence bornée* et la Remarque 5.5, on en déduit que

$$\int_\alpha^\beta |f_n(t) - f(t)|\, dt \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{pour tous } a < \alpha < \beta < b. \tag{5.3}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g est intégrable sur $I = (a, b)$, on sait, par définition de $\int_a^b g(t)\, dt$, qu'on peut trouver $\alpha > a$ et $\beta < b$ tels que

$$\int_a^\alpha g(t)\, dt < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_\beta^b g(t)\, dt < \varepsilon.$$

Comme de plus $|f_n| \leqslant g$ et $|f| \leqslant g$ et donc $|f_n - f| \leqslant 2g$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \\
&= \int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b \\
&\leqslant \int_a^\alpha 2g(t)\,dt + \int_\alpha^\beta |f_n(t)-f(t)|\,dt + \int_\beta^b 2g(t)\,dt \\
&\leqslant 4\varepsilon + \int_\alpha^\beta |f_n(t)-f(t)|\,dt.
\end{aligned}
$$

Comme α et β sont fixés, on peut ensuite, par (5.3), choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_\alpha^\beta |f_n(t)-f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

On obtient ainsi

$$\forall n \geqslant N\ :\ \left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant 5\varepsilon;$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque 5.7. La conclusion du Théorème de convergence dominée reste valable si on suppose seulement que $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in I\backslash S$, où S est un ensemble fini. De plus, on peut renforcer cette conclusion : on a en fait que $\int_I |f_n(t)-f(t)|\,dt \to 0$ quand $n \to \infty$.

Démonstration. Exo. □

Exemple. On va (à moitié) établir la célèbre formule suivante :

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

On sait que l'intégrale "généralisée" $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}dt$ existe (exo : le redémontrer). De plus, en utilisant la parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ et le changement de variable $u := t/\sqrt{2}$, on voit (exo) que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

L'idé de départ est de dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n;$$

ce qui se voit en écrivant $(1-\frac{x}{n})^n = \exp\big(n\log(1-\frac{x}{n})\big)$ pour $n > x$. Par conséquent, on a

$$e^{-u^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \qquad \text{pour tout } u \in [0,\infty[.$$

Cela incite à introduire les fonctions $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(u) = \begin{cases} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u \geqslant \sqrt{n} \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0,\infty[$ (exo), et $f_n(u) \to f(u) := e^{-u^2}$ pour tout $u \in I := [0,\infty[$. La fonction f est continue, donc localement intégrable (et il même clair qu'elle est intégrable sur $[0,\infty[$). De plus, comme $\log(1-t) \leqslant -t$ pour tout $t < 1$, et donc $(1-t)^n \leqslant e^{-nt}$, on voit qu'on a

$$0 \leqslant f_n(u) \leqslant e^{-u^2} := g(u) \quad \text{pour tout } n \text{ et pour tout } u \in [0,\infty[.$$

La fonction g étant intégrable sur $[0,\infty[$ (exo déjà fait...), on peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée :

$$\int_0^\infty f(u)\, du = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(u)\, du,$$

autrement dit

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du.$$

Ensuite, le changement de variable $x := \frac{u}{\sqrt{n}}$ donne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du = \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx;$$

et si on pose maintenant $x := \cos t$, on obtient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\, dt := \sqrt{n}\, W_{2n+1}.$$

Les intégrales $W_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^k dt$ sont célèbres : on les appelle les **intégrales de Wallis**. Ainsi, on a montré que

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, W_{2n+1}.$$

Pour conclure, on utilise le "fait bien connu" suivant (qui est non trivial, mais a sûrement été démontré en exercice un jour...) :

$$W_k \sim \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \qquad \text{quand } k \to \infty.$$

Ainsi $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} = \sqrt{\frac{n\pi}{4n+2}}$, et on en déduit immédiatement le résultat souhaité :

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Chapitre 3

Espaces métriques complets

1. “Rappel” : espaces métriques

1.1. Définition et exemples.

Définition 1.1. *Soit M un ensemble non vide. Une* ***distance*** *sur M est une fonction $d : M \times M \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(o) $d(u,v) \geqslant 0$ *pour tous* $u, v \in M$*, et* $d(u,u) = 0$ *;*

(i) $d(u,v) = 0$ seulement *pour* $u = v$ (*séparation des points*) *;*

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$ *pour tous* $u, v \in M$ (*symétrie*) *;*

(iii) $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ *pour tous* $u, v, w \in M$ (*inégalité triangulaire*).

Un ***espace métrique*** *est un ensemble M muni d'une distance d.*

Exemple 1.2. Soit E un espace vectoriel normé, et soit M une partie non vide de E. On définit une distance sur M en posant

$$d(u,v) := \|v - u\| \qquad \text{pour } u, v \in M.$$

On dit que d est la distance sur M **induite par la norme de** E. Ainsi, toute partie d'un evn (et en particulier tout evn) est de manière canonique un espace métrique.

Exemple 1.3. Soit M un ensemble quelconque (non vide). On définit une distance sur M en posant

$$d(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 1 & \text{si } u = v \end{cases}$$

On dit que d est la **distance discrète** sur M.

Remarque. “Par défaut”, toutes les distances s'appellent d, même si on considère plusieurs espaces métriques à la fois.

1.2. Ce qu'on peut faire avec des espaces métriques. On peut faire avec les espaces métriques exactement les mêmes choses qu'avec les espaces vectoriels normés : définir les notions de suites convergentes, d'applications continues, de boules, d'ouverts, de fermés, la notion d'espace métrique compact, la convergence simple ou uniforme d'une suite d'applications... Seule différence : au lieu de $|v - u|$ (pour des nombres) ou de $\|v - u\|$ (pour des éléments d'un evn général), il faut écrire $d(u,v)$.

Exemple 1. Soit (M,d) un espace métrique, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de M, et soit $a \in M$. Alors “$x_n \to a$” s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geqslant N \; : \; d(x_n, x) \leqslant \varepsilon.$$

Exercice. Montrer qu'on a “unicité de la limite” : si $x_n \to a$ et $x_n \to a'$, alors $a = a'$.

EXEMPLE 2. Soit (M,d) un espace métrique, et soit $O \subseteq M$. On dit que O est un ouvert de M si, pour tout $a \in M$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq M$.

Exercice. Montrer que toute boule ouverte de M est un ouvert de M.

EXEMPLE 3. Un espace métrique (K,d) est dit compact si toute suite (x_n) de points de K possède une sous-suite qui converge vers un point de K.

Exercice. Montrer que si K est un espace métrique compact et si M est un espace métrique quelconque, alors toute application continue $f : K \to M$ est uniformément continue.

EXEMPLE 4. Soient M et M' deux espaces métriques, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de M dans M'. Soit aussi $f : M \to M'$. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ :\ d\big(f_n(x), f(x)\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geqslant N \text{ et pour tout } x \in M.$$

Exercice. Si les f_n sont continues, $f_n : M \to M'$, et si $f_n \to f$ uniformément sur M, alors f est continue.

1.3. Sous-espaces.

FAIT ÉVIDENT. Soit (E,d) un espace métrique et soit M une partie de E. Alors M est lui même de façon canonique un espace métrique quand on le munit de la restriction de d à $M \times M$ (qu'on appelle la **distance induite par d sur M**).

CONSÉQUENCE. Si E est un espace métrique et si $M \subseteq E$, il y a *des ouverts de E*, et aussi *des ouverts de M*.

PROPOSITION 1.4. *Soit (E,d) un espace métrique, et soit M une partie de E. Soit également $O \subseteq M$. Les propriétés suivantes ont équivalentes :*

(1) *O est un ouvert de M ;*
(2) *il existe un ouvert $\widetilde{O}$ de E tel que $O = \widetilde{O} \cap M$.*

Démonstration. On doit utiliser des notations différentes pour distinguer les boules *de* E et les boules *de* M. Si $a \in E$ et $r > 0$, on notera $B(a,r)$ la boule ouvert de centre a et de rayon r *dans* E, autrement dit

$$B(a,r) = \{x \in E;\ d(x,a) < r\};$$

et si $a \in M$, on note $B_M(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r *dans* M :

$$B_M(a,r) = \{x \in M;\ d(x,a) < r\}.$$

Par définition, on a donc pour tout $a \in M$:

$$B_M(a,r) = B(a,r) \cap M.$$

Supposons que O soit un ouvert de M. Pour tout point $a \in O$, on peut donc trouver $r_a > 0$ tel que $B_M(a,r_a) \subseteq O$. Alors

$$O = \bigcup_{a\in O} B_M(a,r_a);$$

autrement dit

$$O = \bigcup_{a\in O} \big(B(a,r) \cap M\big) = \Big(\bigcup_{a\in O} B(a,r)\Big) \cap M.$$

Comme l'ensemble $\widetilde{O} := \bigcup_{a\in O} B(a,r)$ est un ouvert de E (car les boules ouvertes $B(a,r_a)$ sont des ouverts), on a donc montré que (1) entraine (2).

Inversement, supposons que $O = \widetilde{O} \cap M$ où $\widetilde{O}$ est un ouvert de E. Alors tout point $a \in O$ appartient à $\widetilde{O}$, donc on peut trouver $r_a > 0$ tel que $B(a,r_a) \subseteq \widetilde{O}$; et on a ainsi $B_M(a,r_a) = B(a,r_a) \cap M \subseteq \widetilde{O} \cap M = O$. Ceci étant vrai pour tout $a \in O$, on en déduit que O est un ouvert de M. □

Exemple. On prend $E = \mathbb{R}$ et $M = [0,1]$. Alors $O = [0,1[$ est un ouvert de $[0,1]$ car $[0,1[=]-\infty,1[\cap [0,1]$ et $\widetilde{O} :=]-\infty,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$; mais $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.5. *Si O est un ouvert de E tel que $O \subseteq M$, alors O est un ouvert de M.*

Démonstration. C'est évident par la proposition : comme $O \subseteq M$, on a $O = O \cap M$; donc $\widetilde{O} := O$ témoigne que O est un ouvert de M. □

Corollaire 1.6. *Si Ω est un* ouvert de E, *alors tout ouvert de Ω est aussi un ouvert de E.*

Démonstration. C'est à nouveau évident : si $O = \widetilde{O} \cap \Omega$ où $\widetilde{O}$ est ouvert dans E, alors O est un ouvert de E car l'intersection de deux ouverts est un ouvert. □

Corollaire 1.7. *Un ensemble $F \subseteq M$ est un fermé de M si et seulement si il est de la forme $F = \widetilde{F} \cap M$, où $\widetilde{F}$ est un fermé de E.*

Démonstration. Exo. (Utiliser le fait qu'un ensemble est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.) □

Corollaire 1.8. *Tout fermé de E contenu dans M est fermé dans M. Inversement,* si M est fermé dans E, *alors tout fermé de M est aussi un fermé de E.*

1.4. Produits.

Définition 1.9. *Soient $(M_1,d),\dots,(M_N,d)$ des espaces métriques, et soit $M = M_1 \times \cdots \times M_N$. On écrit un élément x de M sous la forme $x = \big(x(1),\dots,x(N)\big)$, où $x(i) \in M_i$ pour $i = 1,\dots,N$. La **distance produit** sur M, notée d_∞, est définie comme suit : si $u,v \in M$, alors*

$$d_\infty(u,v) := \max\big(d(u(1),v(1)),\dots,d(u(N),v(N))\big).$$

Exercice. Montrer que d_∞ est bien une distance sur $M_1 \times \cdots \times M_N$.

Lemme 1.10. *Une suite (x_n) de points de $M = M_1 \times \cdots \times M_N$ converge vers $x \in M$ pour la distance produit si et seulement si elle converge “coordonnée par coordonnée”, i.e. $x_n(i) \to x(i)$ pour tout $i \in [\![1,N]\!]$.*

Démonstration. Si $x_n \to x$ pour d_∞, alors $x_n(i) \to x(i)$ pour tout $i \in [\![1,N]\!]$ car $d(x_n(i),x(i)) \leqslant d_\infty(x_n,x)$. Inversement, si $x_n(i) \to x(i)$ pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, alors $x_n \to x$ pour d_∞ car $d_\infty(x_n,x) \leqslant \sum_{i=1}^N d(x_n(i),x(i))$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. □

Exercice. Montrer que si $O_1,\dots,O_N$ sont des ouverts de $M_1,\dots,M_N$ respectivement, alors $O_1 \times \cdots \times O_N$ est un ouvert de $M_1 \times \cdots \times M_N$.

2. Suites de Cauchy, espaces métriques complets

DÉFINITION 2.1. *Soit (M, d) un espace métrique, et soit (x_n) une suite de points de M. On dit que (x_n) est une* ***suite de Cauchy*** *si $d(x_p, x_q)$ tend vers 0 quand p et q tendent vers l'infini ; autrement dit, si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall p, q \geqslant N\ :\ d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon.$$

Lorsque M est une partie d'un evn*, cela s'écrit donc*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall p, q \geqslant N\ :\ \|x_q - x_p\| \leqslant \varepsilon.$$

REMARQUE 2.2. Toute suite convergente est de Cauchy

Démonstration. Si $x_n \to a$ alors, comme $d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, a) + d(a, x_q)$ pour tous $q \in \mathbb{N}$, on voit que $d(x_p, x_q) \to 0$ quand $p, q \to \infty$. □

REMARQUE 2.3. La réciproque est fausse en général.

Démonstration. Prenons par exemple $M :=]0, \infty[$, muni de la distance usuelle induite par la valeur absolue de $\mathbb{R}$. Si on pose $x_n := \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors la suite (x_n) et de Cauchy dans M car $d(x_p, x_q) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \to 0$ quand $p, q \to \infty$, mais elle ne converge pas *dans M* car elle tend vers 0 et $0 \notin M$. □

REMARQUE 2.4. Dans un evn, toute suite de Cauchy (x_n) est *bornée*, *i. e.* il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \|x_n\| \leqslant C$.

Démonstration. Par définition d'une suite de Cauchy, on peut trouver un entier N tel que $\|x_q - x_p\| \leqslant 6$ pour tous $p, q \geqslant N$. On a ainsi

$$\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leqslant 6 + \|x_N\| \quad \text{pour } n \geqslant N.$$

Donc, si on pose $C := \max\big(\|x_0\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, 6 + \|x_N\|\big)$, alors $\|x_n\| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exercice. Montrer que dans tout evn $E \neq \{0\}$, il existe des suites bornées qui ne sont pas de Cauchy.

DÉFINITION 2.5. *On dit qu'un espace métrique (M, d) est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy d'éléments de M est en fait convergente dans M.*

Remarque. Un *espace vectoriel normé* complet s'appelle un **espace de Banach**.

Exercice. Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes *équivalentes* sur E, alors E est complet pour $\|\cdot\|$ si et seulement si il est complet pour $\|\cdot\|'$.

EXEMPLE 2.6. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets pour leurs distances usuelles.

Démonstration. C'est exactement ce que dit le *critère de Cauchy* pour les suites numériques. □

EXEMPLE 2.7. $]0, \infty[$ n'est pas complet pour la distance usuelle.

Démonstration. On l'a faite plus haut. □

EXEMPLE 2.8. Tout evn E *de dimensions finie* est complet.

Démonstration. Par *équivalence des normes en dimension finie*, on peut supposer que $E = (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $d \geqslant 1$ (*cf* l'exo donné plus haut). On écrit un élément x de E sous la forme $x = \big(x(1), \dots, x(d)\big)$ avec $x(i) \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \dots, d$.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $E = (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Comme $|x_q(i) - x_p(i)| \leqslant \|x_q - x_p\|_\infty$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on voit que pour chaque $i \in [\![1, d]\!]$, la suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, on en déduit que $x_n(i)$ admet une limite $x(i) \in \mathbb{K}$ quand $n \to \infty$, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$. Si on pose $x = \big(x(1), \dots, x(d)\big) \in \mathbb{K}^d$, alors $x_n \to x$ "coordonnée par coordonnée", *et donc* pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (exo). Ainsi, toute suite de Cauchy $(x_n) \subseteq E$ est convergente. $\square$

Exemple 2.9. Pour tout ensemble $I \neq \varnothing$, l'espace $\big(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty\big)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$. Pour montrer que (f_n) converge dans $\ell^\infty(I)$, on procède en 3 étapes.

Étape 1. Identification d'un "candidat limite" f.

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$, on a $|f_q(t) - f_p(t)| \leqslant \|f_q - f_p|_\infty$ par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donc, comme (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on voit que pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, et donc admet une limite $f(t) \in \mathbb{C}$. Ainsi, on voit apparaitre une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in I$.

Étape 2. Le "candidat limite" est dans le bon espace, *i.e.* $f \in \ell^\infty(I)$.

Comme (f_n) est de Cauchy, elle est *bornée* dans $\ell^\infty(I)$: on a une constante C telle que $\|f_n\|_\infty \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in I\ :\ |f_n(t)| \leqslant C.$$

Comme $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in I$, on en déduit

$$\forall t \in I\ :\ |f(t)| \leqslant C;$$

autrement dit $f \in \ell^\infty(I)$ et $\|f\|_\infty \leqslant C$.

Étape 3. La suite (f_n) tend vers f *pour la distance de* $\ell^\infty(I)$, *i.e.* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme (f_n) est de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$, on peut trouver un entier N tel que $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tous $m, n \geqslant N$; autrement dit

$$\forall m, n \geqslant N\ \ \forall t \in I\ :\ |f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f_m(t) \to \infty$ pour tout $t \in I$ quand $m \to \infty$, on en déduit

$$\forall n \geqslant N\ \forall t \in I\ :\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon;$$

autrement dit $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc bien montré que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. $\square$

Remarque. Pour cet exemple, on aurait pu aller plus vite en invoquant le *critère de Cauchy uniforme* (exo : écrire les détails). Mais il est important d'avoir bien retenu le principe de la "preuve en 3 étapes".

Exercice. Soit $\ell^1(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites de nombres complexes $x = (x(i))_{i\geqslant 0}$ telles que la série $\sum x(i)$ est absolument convergente. Pour $x \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|.$$

Montrer que $\big(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\big)$ est complet. (Suivre le même plan que pour $\ell^\infty(I)$. Il sera utile de remarquer que pour $x = (x(i))_{i\geqslant 0} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^+$, on a l'équivalence suivante : $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ avec $\|x\|_1 \leqslant c$ si et seulement si $\forall K \geqslant 0\ :\ \sum_{i=0}^K |x(i)| \leqslant c$).

Exemple 2.10. Si $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{C}([a,b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\big(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$. Alors (f_n) est de Cauchy dans $\ell^\infty([a,b])$, donc elle converge dans $\ell^\infty([a,b])$ vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ puisque $\ell^\infty([a,b])$ est complet ; autrement dit $f_n \to f$ uniformément. Mais les f_n sont continues, donc f est continue, *i.e.* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, donc $f_n \to f$ au sens de la convergence dans $\mathcal{C}([a,b])$. □

Exemple 2.11. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{C}^1([a,b])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, on pose $\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Alors $\mathcal{C}^1([a,b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\big(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}\big)$. Comme $\|f_q - f_p\|_\infty \leqslant \|f_q - f_p\|_{\mathcal{C}^1}$ et $\|f'_q - f'_p\|_\infty \leqslant \|f_q - f_p\|_{\mathcal{C}^1}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, et comme les f_n et les f'_n sont continues, on voit que les suites (f_n) et (f'_n) sont de Cauchy dans $\big(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$, qui est complet. Donc (f_n) et (f'_n) convergent dans $\mathcal{C}([a,b])$; autrement dit, on a deux fonctions continues f et g telles que $f_n \to f$ uniformément et $f'_n \to g$ uniformément. Alors, par le théorème sur les suite de fonctions $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et $\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - g\|_\infty \to 0$; donc $f_n \to f$ au sens de la convergence dans $\mathcal{C}^1([a,b])$. □

Exemple 2.12. Tout espace métrique **compact** est complet.

Démonstration. Soit (K,d) un espace métrique compact, et soit (x_n) une suite de Cauchy dans K. Comme K est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in K$. On va montrer que la suite (x_n) "tout entière" converge vers x.

Soit $\varepsilon > 0$ quleconque. Comme (x_n) est de Cauchy, on peut trouver un entier N tel que $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$ pour tous $p, q \geqslant N$, puis un entier k_0 tel que $n_k \geqslant N$ pour tout $k \geqslant k_0$. On a alors $d(x_n, x_{n_k}) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \geqslant k_0$; et comme $x_{n_k} \to x$, on en déduit (en faisant $k \to \infty$) que $d(x_n, x) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Donc $x_n \to x$. □

Remarque. On a en fait démontré le résultat suivant : dans un espace métrique (M,d) quelconque, si une suite de Cauchy (x_n) possède une sous-suite convergente, alors la suite (x_n) "tout-entière" converge.

Exemple 2.13. Soit M un ensemble quelconque, et soit d la distance discrète sur M. Alors (M,d) est complet.

Démonstration. Exo. □

3. Sous-espaces et produits

3.1. Parties complètes d'un espace métrique.

Proposition 3.1. *Soit (E,d) un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Si M est complet pour la distance induite (autrement dit : si l'espace métrique (M,d) est complet), alors M est* fermé *dans E.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de points de M telle que $x_n \to x \in E$. Il s'agit de montrer que $x \in M$. Comme (x_n) converge dans E, elle est de Cauchy dans E, donc de Cauchy dans M ; et comme M est supposé complet, la suite (x_n) *converge dans* M, autrement dit $x_n \to x' \in M$. Par unicité de la limite, on a $x' = x$; et donc $x \in M$! $\square$

Corollaire 3.2. *Si E est un evn quelconque, alors tout sous ev* de dimension finie *$M \subseteq E$ est fermé dans E.*

Démonstration. On a vu que tout evn de dimension finie est complet. $\square$

Exemple 1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $]0,\infty[$ ne sont pas complets pour la distance usuelle.

Démonstration. Ils ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$. $\square$

Exemple 2. $\mathcal{C}^1([a,b])$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (si $a<b$).

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{C}^1([a,b])$ n'est pas fermé dans l'espace $\big(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty\big)$.

Cela peut se voir par exemple à l'aide du théorème de Weierstrass : l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$, donc *a fortiori* $\mathcal{C}^1([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$; donc si $\mathcal{C}^1([a,b])$ était fermé dans $\mathcal{C}([a,b])$, on devrait avoir $\mathcal{C}^1([a,b]) = \mathcal{C}([a,b])$, ce qui n'est visiblement pas le cas (exo).

On peut aussi donner une preuve "élémentaire". Soit $m = \frac{a+b}{2}$ le milieu de $[a,b]$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t) := \sqrt{(t-m)^2 + \frac{1}{n}}$. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ (exo), et convergent uniformément vers $f(t) = \sqrt{(t-m)^2} = |t-m|$ (autre exo). Comme f n'est *pas* de classe $\mathcal{C}^1$, cela montre que $\mathcal{C}^1([a,b])$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}([a,b])$. $\square$

Proposition 3.3. *Soit (E,d) un espace métrique* complet, *et soit $M \subseteq E$. Si M est* fermé dans E, *alors M est* complet *pour la distance induite, i.e. l'espace métrique (M,d) est complet.*

Démonstration. Supposons M fermé dans E. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans M. Alors (x_n) est de Cauchy dans E qui est complet, donc (x_n) converge dans E vers un certain $x \in E$. Comme M est supposé fermé dans E et comme tous les x_n sont dans M, on a $x \in M$; donc (x_n) converge *dans M*. $\square$

Exemple 1. $[0,\infty[$ est complet pour la distance usuelle, car il est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2. On a vu que si $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}([a,b])$ est fermé dans $\ell^\infty([a,b])$ (c'est la traduction du théorème sur la limite d'une suite de fonctions continues). Comme $\ell^\infty([a,b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, cela entraine que $\mathcal{C}([a,b])$ est également complet (ce qu'on a déjà démontré, avec en fait exactement la même preuve).

3.2. Produits d'espaces complets.

Proposition 3.4. *Si $M_1,\dots,M_N$ sont des espaces métriques complets, alors l'espace produit $M = M_1 \times \cdots \times M_N$ est complet pour la distance produit.*

Démonstration. Aux notations près, la preuve est identique à celle de la complétude de $(\mathbb{K}^d,\|\cdot\|_\infty)$. Exo : écrire les détails. $\square$

4. Séries dans un evn

DÉFINITION 4.1. *Soit E un evn, et soit (u_k) une suite de points de E. On dit que* ***la série*** $\sum u_k$ ***converge dans*** E *si la suite des sommes partielles* $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$ *admet une limite dans E.*

Exemple 1. Si on prend $E := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors une série $\sum u_k$ converge dans E si et seulement si elle converge au sens usuel.

Exemple 2. Si on prend $E := (\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$, alors une série $\sum u_k$ converge dans E si et seulement si la série de fonctions $\sum u_k(t)$ converge uniformément sur I.

THÉORÈME 4.2. *Soit E une espace* de Banach. *Si (u_k) est une suite d'éléments de E telle que la série à termes positifs $\sum \|u_k\|$ est convergente, alors la série $\sum u_k$ converge dans E.*

Démonstration. Comme E est supposé complet, il suffit de montrer que les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ forment une suite de Cauchy. Mais ceci est “évident” : si $p < q$, alors

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \xrightarrow{p,q\to\infty} 0,$$

puisque la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. □

Remarque 1. Si on prend $E := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on retrouve le théorème disant que toute série absolument convergente est convergente ; et si on prend $E := \ell^\infty(I)$, on retrouve le théorème disant que pour une série de fonctions, la convergence normale entraine la convergence uniforme. La preuve dans le cas d'un espace de Banach général est en fait exactement la même que dans ces deux cas particuliers.

Remarque 2. Le théorème peut s'énoncer comme suit : *dans un evn* complet*, toute série “normalement convergente” est convergente.*

Il se trouve que le théorème 4.2 est en fait une *caractérisation* de la complétude :

PROPOSITION 4.3. *Soit E un evn. Si on sait que toute série “normalement convergente” à termes dans E est convergente dans E, alors on peut conclure que E est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de E. Si on applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 2^{-k}$, on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_k tel que

$$\forall p, q \geqslant n_k \;:\; \|x_q - x_p\| \leqslant 2^{-k}.$$

De plus, on peut supposer que la suite (n_k) est strictement croissante (micro-exo). Comme $n_{k+1} \geqslant n_k$, on a alors en particulier

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant 2^{-k} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Donc, si on pose $u_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, on voit que la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. Par hypothèse sur E, on en déduit que la série $\sum u_k$ converge dans E. Mais pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) = x_{n_k} - x_{n_0};$$

et par conséquent, la *suite* (x_{n_k}) est convergente.

Ainsi, la suite (x_n) possède une sous-suite convergente (x_{n_k}). Comme (x_n) est de Cauchy, on en déduit (*cf* la preuve du fait que tout espace métrique compact est complet) que la suite (x_n) "tout entière" est convergente. Donc E est complet. □

5. Points fixes pour les applications contractantes

DÉFINITION 5.1. *Soient (M, d) et (M', d) deux espaces métriques, et soit $f : M \to M'$.*

(1) *Étant donné $k \in \mathbb{R}^+$, on dit que f est **k-lipschitzienne** si*
$$\forall u, v \in M \;:\; d(f(u), f(v)) \leqslant k\, d(u, v).$$
(2) *On que f est **lipchitzienne** si elle est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}^+$.*
(3) *On dit que f est **contractante** si elle est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.*

Exemple 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f' est *bornée* sur I, alors f est lipschitzienne. Plus précisément, f est k-lipschitzienne avec $k := \|f'\|_\infty$.

Démonstration. Exo (utiliser l'*inégalité des accroissements finis*). □

Exercice. Montrer que la réciproque est vraie : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et lipschitzienne, alors la fonction f' est bornée sur I.

Exemple 2. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si on a $|f'(t)| < 1$ pour tout $t \in [a, b]$, alors f est contractante.

Démonstration. Par hypothèse f' est bornée ; donc, d'après l'Exemple 1, f est k-lipschitzienne avec $k = \|f'\|_\infty \leqslant 1$. De plus, comme la fonction $|f'|$ est continue sur le compact $[a, b]$, elle atteint sa borne supérieure. Donc $k = |f'(t_0)|$ pour un certain $t_0 \in [a, b]$, et donc $k < 1$. Par conséquent f est contractante. □

THÉORÈME 5.2. (Théorème du point fixe)
Soit (E, d) un espace métrique complet, *et soit $M \subseteq E$ une partie* fermée *de E. Soit également $f : M \to E$. On suppose que*

- *le fermé M est* stable par f, *i.e.* $f(M) \subseteq M$;
- *l'application f est* contractante.

*Alors f possède un et un seul **point fixe** dans M, autrement dit, il existe un unique point $a \in M$ tel que $f(a) = a$.*
De plus, *si on part d'un point quelconque $x_0 \in M$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a, et la convergence a lieu "à vitesse géométrique" : il existe une constante $k < 1$ telle que $d(x_n, a) = O(k^n)$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. Par hypothèse, f est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.

(i) Si a et b sont deux points fixes de f, alors $0 \leqslant d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant k\, d(a, b)$. Comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $d(a, b) = 0$, *i.e.* $a = b$. Ainsi, f possède au plus 1 point point fixe.

(ii) Montrons maintenant l'exsitence d'un point fixe, et la partie “de plus”. Soit $x_0 \in M$. Comme M est stable par f, la suite (x_n) est bien définie. Si $n \geqslant 1$, alors $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant k\, d(x_{n-1}, x_n)$. Par récurrence, on en déduit qu'on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, si $p < q$, alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leqslant d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leqslant d(x_0, x_1) \times \sum_{i=p}^{q-1} k^i. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum k^i$ est convergente (puisque $k < 1$), on en déduit que $d(x_p, x_q) \to 0$ quand $p, q \to \infty$. Ainsi, la suite (x_n) est de Cauchy, donc elle converge vers un point $a \in E$ car E est complet ; et on a $a \in M$ car les x_n sont dans M et M est fermé dans E. Comme $a = \lim x_n$ et comme f est continue (car lipschitzienne), on a $f(a) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$. Ainsi, a est un point fixe de f. Enfin, pour la vitesse de convergence, on revient à l'inégalité

$$d(x_n, x_q) \leqslant d(x_0, x_1) \times \sum_{i=n}^{q-1} k^i,$$

valable dès que $n < q$. En faisant tendre q vers l'infini, on en déduit

$$d(x_n, a) \leqslant d(x_0, x_1) \times \sum_{i=n}^{\infty} k^i = \frac{d(x_0, x_1)}{1-k} \times k^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

et donc $d(x_n, a) = O(k^n)$. □

ILLUSTRATION. Soit E un espace de Banach. Si $h : E \to E$ est une application contractante, alors $\Phi = id_E + h$ est une bijection de E sur E.

Démonstration. On veut montrer que pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in E$ tel que $\Phi(x) = y$. Autrement dit, on veut montrer que l'équation $x + h(x) = y$ possède une unique solution $x \in E$. Cette équation est équivalente à

$$x = f_y(x)\ , \quad \text{où } f_y(x) := y - h(x).$$

Ainsi, on veut montrer que l'application $f_y : E \to E$ *possède un unique point fixe* ; et comme E est un evn complet, il suffit pour cela de montrer que f_y est contractante. Mais ceci est évident car h est contractante et

$$\|f_y(v) - f_y(u)\| = \|\big(y - h(v)\big) - \big(y - h(u)\big)\| = \|h(u) - h(v)\| \quad \text{pour tous } u, v \in E.$$

□

6. Fermés emboités

“RAPPEL” : THÉORÈME DES COMPACTS EMBOITÉS. Soit M un espace métrique. Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *décroissante* de *compacts non vides* de M, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit un point $x_n \in K_n$. Comme la suite (K_n) est décroissante, tous les x_n sont dans K_0, qui est compact ; donc (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x_\infty \in K_0$. Si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, on a $n_k \geqslant n$ pour k assez grand, et donc $x_{n_k} \in K_n$ car $K_{n_k} \subseteq K_n$. Donc $x_\infty = \lim x_{n_k} \in K_n$ car K_n

est *fermé* dans M. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ainsi $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, et donc cette intersection est bien non vide. $\square$

REMARQUE. Le résultat est faux si les K_n sont seulement supposés *fermés dans* M : considérer par exemple $M := \mathbb{R}$ et $K_n := [n, \infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 6.1. *Soit* (M, d) *un espace métrique, et soit* $A \subseteq M$ *avec* $A \neq \emptyset$*. Le* ***diamètre de*** A *est le "nombre"* $\mathrm{diam}(A) \in [0, \infty]$ *défini par*

$$\mathrm{diam}(A) = \sup \{d(u, v);\ u, v \in F\}.$$

.

Exercice 1. Si $M = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 2. On suppose que M est un evn. Alors $\mathrm{diam}(A) < \infty$ si et seulement si A est **borné**, *i.e.* il existe une constante C telle que $\forall x \in A\ :\ \|x\| \leqslant C$.

Exercice 3. Si $B \subseteq M$ est une boule de rayon $r > 0$ (ouverte ou fermée), alors $\mathrm{diam}(B) \leqslant 2r$.

PROPOSITION 6.2. (Théorème des fermés emboités)
Soit (M, d) *un espace métrique* complet*, et soit* (F_n) *une suite de* fermés *non vides de* M*. On suppose que la suite* (F_n) *est* décroissante*, et que* $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ *quand* $n \to \infty$*. Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *est non vide, et réduite à un point.*

Démonstration. (i) Pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit un point $x_n \in F_n$. Si $p, q \in \mathbb{N}$, alors x_p et x_p sont dans $F_{\min(p,q)}$ car la suite (F_n) est décroissante ; donc $d(x_p, x_q) \leqslant \mathrm{diam}\big(F_{\min(p,q)}\big)$, et donc $d(x_p, x_q) \to 0$ quand $p, q \to \infty$ car $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme M est supposé complet, on en déduit que (x_n) converge vers un point $x_\infty \in M$. Si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, on a $x_k \in F_n$ pour tout $k \geqslant n$ car $x_k \in F_k$ et $F_k \subseteq F_n$, et donc $x_\infty = \lim x_k \in F_n$ car F_n est fermé dans M. Ainsi $x_\infty \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

(ii) Si $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors $0 \leqslant d(a, b) \leqslant \mathrm{diam}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc $d(a, b) = 0$ car $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, et donc $a = b$. Ainsi, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduite à un point. $\square$

ILLUSTRATION. Soit (M, d) un espace métrique complet. On suppose que toute boule ouverte non vide de M contient au moins deux points. Alors M est nécessairement *non dénombrable.*

Démonstration. Supposons que M soit dénombrable, autrement dit qu'on puisse écrire $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Par hypothèse, M n'est pas réduit à 1 point ; donc on peut choisir un point $b_0 \neq a_0$ dans M. Soit ε_0 tel que $0 < \varepsilon_0 < 2^{-0}$ et $d(b_0, a_0) > \varepsilon_0$, et soit $F_0 := \overline{B}(b_0, \varepsilon_0)$. Alors $a_0 \notin F_0$.

Ensuite, la boule ouvert $B(b_0, \varepsilon_0)$ n'est pas réduite à 1 point ; donc on peut choisir un point $b_1 \neq a_1$ dans $B(b_0, \varepsilon_0)$, puis ε_1 tel que $0 < \varepsilon_1 < 2^{-1}$ et $d(b_1, a_1) > \varepsilon_1$, avec de plus $B(b_1, \varepsilon_1) \subseteq B(b_0, \varepsilon_0)$. Alors $F_1 := \overline{B}(b_1, \varepsilon_1)$ est contenu dans $F_0 = \overline{B}(b_0, \varepsilon_0)$, et $a_1 \notin F_1$.

Par récurrence, on voit maintenant qu'on peut construire une suite décroissante de boules fermées $F_n = \overline{B}(b_n, \varepsilon_n)$, avec $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$, telle que $a_n \notin F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ car $\mathrm{diam}(F_n) \leqslant 2\varepsilon_n$; donc, par le Théorème des fermés emboités, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide, et réduite à un point a. Comme $a_n \notin F_n$, on a $a \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Exercice 1. En utilisant le résultat précédent, montrer que $\mathbb{Q}$ n'est complet pour *aucune* distance d telle que la convergence dans $(\mathbb{Q}, d)$ soit équivalente à la convergence dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Exercice 2. Pour $x, y \in \,]0, \infty[$, on pose $d(x,y) := |y-x| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|$. Montrer que d est une distance, que la convergence dans $(]0,\infty[, d)$ est équivalente à la convergence dans $(]0,\infty[, |\cdot|)$, et que cependant $(]0,\infty[, d)$ est complet.

7. Théorème de Baire

Rappel. Soit M un espace métrique. On dit qu'un ensemble $D \subseteq M$ est **dense dans** M si on a $\overline{D} = M$ (ce qui revient à dire que tout point de M est limite d'une suite de points de D).

Exercice 1. Montrer que D est dense dans M si et seulement si $D \cap O \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide $O \subseteq M$.

Exercice 2. Montrer que D est dense dans M si et seulement si $M \backslash D$ est *d'intérieur vide* dans M.

Théorème 7.1. (Théorème de Baire)
Soit (M,d) un espace métrique complet, *et soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'*ouverts *de M. On suppose que tous les O_n sont* denses dans M. *Alors $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans M ; et en particulier, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide $O \subseteq M$, on a $G \cap O \neq \emptyset$.

Comme O_0 est dense dans M et O est un ouvert non vide, on a $O_0 \cap O \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in O_0 \cap O$. Comme $O \cap O_0$ est un *ouvert* de M, on peut trouver un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O_0 \cap O$, avec de plus $\varepsilon_0 < 2^{-0}$.

Comme O_1 est dense dans M et $B(x_0, \varepsilon_0)$ est un ouvert non vide, on a $O_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Soit $x_1 \in O_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$. Comme $O_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$ est un ouvert, on peut trouver $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq O_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$, avec de plus $\varepsilon_1 < 2^{-1}$. On a alors en particulier $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq \overline{B}(x_0, \varepsilon_0)$ et $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq O_1$.

On voit maintenant qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante de boules fermées $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_n < 2^{-n}$, de sorte que $\overline{B}(x_n, \varepsilon) \subseteq O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par le Théorème des fermés emboités (applicable car $\varepsilon_n \to 0$), l'intersection de toutes les boules $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ est non vide, réduite à un point a. Par le choix des $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$, le point a appartient à O_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $a \in G$; et $a \in O$ également car $a \in \overline{B}(x_0, \varepsilon_0)$ et $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O$. Ainsi, on a bien montré que $G \cap O \neq \emptyset$ pour tout ouvert $O \neq \emptyset$. □

Corollaire 7.2. *Soit (M,d) un espace métrique complet, et soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de* fermés *de M. Si tous les F_n sont* d'intérieur vide *dans M, alors $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide, et donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq M$. Par contraposée : si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est* d'intérieur non vide *dans M (par exemple si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = M$), alors l'un au moins des F_n doit être d'intérieur non vide dans M.*

Démonstration. C'est immédiat par le théorème, en passant aux complémentaires et en se souvenant qu'un ensemble $A \subseteq E$ est d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est dense. □

Illustration 1. Soit M un espace métrique complet dans lequel toute boule ouverte non vide contient au moins 2 points. Montrons à nouveau que M n'est pas dénombrable.

Supposons qu'on puisse écrire $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, où $F_n = \{a_n\}$. Les F_n sont des *fermés* de M ; donc, par le Théorème de Baire, il existe un entier n tel que F_n soit d'intérieur non vide dans M. Alors F_n contient une boule ouverte $B \neq \varnothing$, et donc $F_n = \{a_n\}$ contient au moins 2 points ; ce qui est par hypothèse faux.

Illustration 2. Montrons que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour *aucune* norme.

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}[X]$. Pour montrer que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est pas complet, il suffit de trouver une suite (F_n) de fermés de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ telle que chaque F_n est d'intérieur vide et cependant $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n := \big\{p \in \mathbb{R}[X];\ \deg(p) \leqslant n\big\}.$$

On a évidemment $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}[X]$. De plus, chaque F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$, et donc F_n est fermé dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ par le Corollaire 3.2. Il reste à voir que les F_n sont d'intérieur vide dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ et supposons que $F := F_{n_0}$ soit d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}[X]$. Alors F contient une boule ouvert $B(p_0, r)$ avec $r > 0$. Comme F est stable par soustractions, on en déduit que F contient la boule $B(0, r)$, car $B(0, r) = B(p_0, r) - p_0$. Et comme F est également stable par dilatations, on en déduit qu'en fait $F = \mathbb{R}[X]$: en effet, si $p \in \mathbb{R}[X]$ est quelconque, on peut trouver $\lambda > 0$ tel que $\|\lambda p\| = \lambda\|p\| < r$: et on a alors $\lambda p \in F$, et donc $p = \frac{1}{\lambda} \times \lambda p \in F$. Cependant, $F = F_{n_0}$ n'est *pas* égal à $\mathbb{R}[X]$ tout entier ; donc on a obtenu une contradiction.

Chapitre 4

Séries entières

1. Définition et remarques

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k\geqslant 0} \underbrace{a_k z^k}_{u_k(z)},$$

où les a_k sont des constantes complexes, et la "variable" z appartient *a priori* à $\mathbb{C}$.

Remarque 1. Par convention, on a

$$z^0 = 1 \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Remarque 2. Une série entière est un objet formel ; et ceci ne veut rien dire. Si on veut être vraiment précis, on peut dire qu'étant donné une suite de nombres complexes $(a_k)_{k\geqslant 0}$, la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ est la *suite de fonctions* $(S_n)_{n\geqslant 0}$, où les $S_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont les fonction définies par $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Remarque 3. On peut évidemment écrire $\sum a_n z^n$ au lieu de $\sum a_k z^k$

Remarque 4. Si $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite définie seulement à partir d'un certain entier $k_0 \geqslant 0$, alors on peut définir la série entière $\sum_{k\geqslant k_0} a_k z^k$ de la même façon. On peut même dire que $\sum_{k\geqslant k_0} a_k z^k = \sum_{k\geqslant 0} \widetilde{a}_k z^k$, où $\widetilde{a}_k = 0$ si $0 \leqslant k < k_0$ et $\widetilde{a}_k = a_k$ si $k \geqslant k_0$.

Remarque 5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^{\phi(n)}$ est une série entière : c'est la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, où $a_k = b_n$ si $k = \phi(n)$ pour un certain (unique) $n \in \mathbb{N}$, et $a_k = 0$ sinon. Par exemple, si $k_0 \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^{n+k_0} = \sum_{k\geqslant k_0} b_{k-k_0} z^k$.

Remarque 6. Étant donné une série entière $\Sigma = \sum_{k\geqslant k_0} a_k z^k$ et un nombre $z \in \mathbb{C}$, on dit que Σ **converge au point** z si la série *numérique* $\sum a_k z^k$ converge. Dans ce cas, on pose $\Sigma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Remarque 7. Il faut donc bien distinguer l'*objet formel* $\Sigma = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ et le *nombre* $\Sigma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

2. Convergence des séries entières

2.1. Lemme d'Abel ; rayon de convergence.

Lemme 2.1. (Lemme d'Abel)
Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ une série entière, et soit $\xi \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_k \xi^k)$ est bornée, alors la série entière Σ converge absolument en tout point z tel que $|z| < |\xi|$.

Démonstration. Il n'y a rien à démontrer si $\xi = 0$. Si $\xi \neq 0$, on écrit $a_k z^k = a_k \xi^k \times (\frac{z}{\xi})^k$, de sorte que

$$|a_k z^k| = |a_k \xi^k|\, c^k \quad , \quad \text{où} \quad c = \left|\frac{z}{\xi}\right| < 1.$$

Comme $|a_k \xi^k|$ reste borné et comme la série $\sum c^k$ est convergente puisque $c < 1$, cela montre que la série $\sum |a_k z^k|$ est convergente. □

Notation. Pour $0 \leqslant r \leqslant \infty$, on pose

$$D(0,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r\} \qquad \text{et} \qquad \overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant r\}.$$

Les cas "dégénérés $r = 0$ et $r = \infty$ sont autorisés : on a $D(0,0) = \varnothing$ et $D(0,\infty) = \mathbb{C}$.

Théorème 2.2. *Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ une série entière.*

(1) *Il existe une unique "nombre" $R \in [0,\infty]$ tel que la série Σ converge en tout point $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, et diverge en tout point z vérifiant $|z| > R$. Le nombre R s'appelle le* ***rayon de convergence*** *de la série entière Σ, et se note $R(\Sigma)$.*

(2) *La série Σ converge* normalement *sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ contenu dans le disque ouvert $D(0,R)$ (i.e sur tout disque $\overline{D}(0,r)$ avec $r < R$).*

Démonstration. (1) *Existence.* Posons

$$R = \sup\big\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|a_k|\, r^k)_{k\geqslant 0} \text{ est bornée}\big\},$$

qui est un élément bien défini de $[0,\infty]$. Comme r^k croit avec r (pour tout $k \in \mathbb{N}$), on voit que la suite $(|a_k|\, r^k)$ est bornée pour tout $r < R$, et non bornée pour tout $r > R$ (exo).

Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$, on peut choisir r tel que $|z| < r < R$. Alors la suite $|a_k r^k|$ est bornée, donc la série $\sum a_k z^z$ converge (absolument) d'après le Lemme d'Abel. À l'inverse, si $|z| > R$ alors la suite $(|a_k|\, |z|^k)$ est non bornée, donc $a_k z^k$ ne tend pas vers 0, et donc la série $\sum a_k z^k$ ne converge pas. Ainsi, R vérifie (1).

Unicité. Soient R et R' vérifiant (1). Si $R \neq R'$, par exemple $R' < R$, et si on choisit x tel que $R' < x < R$, alors la série $\sum a_k x^k$ converge par (1) appliqué à R, et en même temps diverge par (1) appliqué à R'. Ceci est absurde, donc $R = R'$.

(2) Si $r < R$, on peut choisir ρ tel que $r < \rho < R$. Alors la suite $(|a_k|\, \rho^k)$ est bornée par définition de R, donc la série $\sum |a_k|\, r^k$ converge d'après le Lemme d'Abel, et donc la série $\sum a_k z^k$ converge normalement sur le disque $D(0,r)$ puisque $|a_k z^k| \leqslant |a_k|\, r^k$ pour tout $z \in D(0,r)$. □

Remarque 2.3. La preuve du théorème a montré que si $\Sigma = \sum a_k z^k$, alors

$$R(\Sigma) = \sup\big\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|a_k|\, r^k) \text{ est bornée}\big\}.$$

Remarque 2.4. Étant donné $r \in \mathbb{R}^+$, on peut dire que

(i) si la suite $(|a_k| r^k)$ est bornée, alors $R(\Sigma) \geqslant r$;

(ii) si la série $\sum a_k r^k$ diverge, alors $R(\Sigma) \leqslant r$.

Démonstration. La partie (i) découle de la remarque précédente ; et (ii) est évident par définition de R. □

Remarque 2.5. Si $\Sigma_1 = \sum a_k z^k$ et $\Sigma_2 = \sum b_k z^k$ sont deux séries entières et si $|a_k| = O(|b_k|)$ quand $k \to \infty$, alors $R(\Sigma_1) \geqslant R(\Sigma_2)$. Ainsi : *plus les coefficients d'une série entière sont petits en module, et plus le rayon de convergence est grand.* En particulier, si $|a_k| \sim C\,|b_k|$ pour une certaine constante C, alors $R(\Sigma_1) = R(\Sigma_2)$.

2.2. Détermination pratique du rayon de convergence. Commençons par donner deux "règles" très simples qui permettent souvent de déterminer sans effort un rayon de convergence.

"Règle $|a_k|^{1/k}$". *Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ une série entière et soit $R = R(\Sigma)$. Si $|a_k|^{1/k}$ admet une limite $L \in [0, \infty]$ quand $k \to \infty$, alors $R = 1/L$.*

Démonstration. Si $r < 1/L$, alors $Lr < 1$, donc $|a_k|^{1/k} r < 1$ à partir d'un certain rang, et donc $|a_k|\, r^k$ reste borné. Donc $R \geqslant r$ pour tout $r < 1/L$, et donc $R \geqslant 1/L$ en faisant tendre r vers $1/L$. Inversement, si $r > 1/L$, alors $Lr > 1$, donc on a certainement $|a_k|^{1/k} r > 1$ pour une infinité d'entiers k ; en particulier $a_k r^k$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_k r^k$ diverge. Donc $R \leqslant r$ pour tout $r > 1/L$, et donc $R \leqslant 1/L$. □

Exemple 1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{k \geqslant 1} k^\alpha z^k$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Démonstration. On a $|a_k| = k^\alpha = e^{\alpha \log(k)}$, donc $|a_k|^{1/k} = e^{\alpha \frac{\log(k)}{k}} \to 1$ quand $k \to \infty$. □

Exemple 2. La série entière $\sum k^k z^k$ a pour rayon de convergence $R = 0$.

Démonstration. Exo. □

"Règle $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$". *Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ une série entière et soit $R = R(\Sigma)$. Si $a_k \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ admet une limite $L \in [0, \infty]$ quand $k \to \infty$, alors $R = 1/L$.*

Démonstration. Pour k assez grand, disons $k \geqslant k_0$, on peut considérer $u_k = \log |a_k|$; et on posera également $u_k = 0$ pour $k < k_0$. On a pour tout $k \geqslant k_0$:

$$u_{k+1} - u_k = \log \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|},$$

donc $u_{k+1} - u_k \to \log(L)$ quand $k \to \infty$. (On pose $\log(0) = -\infty$ et $\log(\infty) = \infty$.) Par le *théorème de Cesáro*, on en déduit que

$$v_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i) \to \log(L) \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Mais $v_k = \frac{u_k}{k} - \frac{u_0}{k}$ car on a une "somme télescopique" ; donc $\frac{u_k}{k} \to \log(L)$, et donc

$$|a_k|^{1/k} = \exp\left(\frac{1}{k} \log |a_k|\right) = \exp\left(\frac{u_k}{k}\right) \to e^{\log(L)} = L.$$

Ainsi, $R = 1/L$ par le "test $|a_k|^{1/k}$". □

Exemple 1. La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ pour rayon de convergence $R = \infty$.

Démonstration. On a $a_k = \frac{1}{k!} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)!}{k!} = k + 1 \to \infty$ quand $k \to \infty$. □

Exemple 2. Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{k^k}{k!} z^k$.

On a $a_k = \frac{k^k}{k!} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; et si $k \geqslant 1$:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \exp\Big(k \log\big(1 + \frac{1}{k}\big)\Big).$$

Comme $\log(1 + \frac{1}{k}) \sim \frac{1}{k}$ quand $k \to \infty$, on voit que $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to e^1 = e$; donc $R = 1/e$.

On va maintenant donner une formule pour le rayon de convergence qui est valable pour n'importe quelle série entière $\sum a_k z^k$, sans aucune hypothèse sur les coefficients a_k.

Définition 2.6. *Soit (α_k) une suite de nombres réels. On dit qu'un "nombre" $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est une **valeur d'adhérence** de (α_k) s'il existe une sous-suite de (α_k) qui tend vers α.*

Exemples. (i) Si $\alpha_k := (-1)^k$, alors possède 2 valeurs d'adhérences, qui sont 1 et -1. (ii) Si $\alpha_k := (-2)^k$, alors les valeurs d'adhérence sont ∞ et $-\infty$. (iii) Si (α_k) admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, alors l est la seule valeur d'adhérence de (α_k).

Le fait suivant est une extension du "Théorème de Bolzano-Weierstrass".

Fait 2.7. *Toute suite $(\alpha_k) \subseteq \mathbb{R}$ possède au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Si (α_k) est bornée, alle possède une valeur d'adhérence $\alpha \in \mathbb{R}$ par Bolzano-Weierstrass. Sinon, (α_k) est ou bien non majorée, ou bien non minorée ; donc ou bien elle possède un sous-suite qui tend vers ∞, ou bien elle possède une sous-suite qui tend vers $-\infty$; et donc elle admet ∞ ou $-\infty$ comme valeur d'adhérence. $\square$

Exercice 4.1. Montrer qu'une suite $(\alpha_k) \subseteq \mathbb{R}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ si et seulement si elle possède exactement une valeur d'adhérence.

Lemme 2.8. *Si (α_k) est une suite de nombres réels, alors (α_k) possède une* plus petite *valeur d'adhérence et une* plus grande *valeur d'adhérence dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. La plus petite valeur d'adhérence de (α_k) s'appelle la **limite inférieure** de (α_k), et se note $\underline{\lim}\, \alpha_k$ (prononcer "lim-inf de (α_k)") ; et la plus grande valeur d'adhérence s'appelle la **limite supérieure** de (α_k) et se note $\overline{\lim}\, \alpha_k$ (prononcer "lim-sup de (α_k)").*

Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de la suite (α_k). Par le Fait 2.7, $\mathcal{E}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, donc on peut définir $L := \sup \mathcal{E}$ et $l := \inf \mathcal{E}$. Il suffit de montrer que l et L sont des valeurs d'adhérence de $\mathcal{E}$ (par définition, ce seront alors nécessairement la plus petite et la plus grande valeur d'adhérence). De plus, par symétrie, on peut évidemment se contenter de montrer que l est une valeur d'adhérence de (α_k).

Choisissons une suite de nombres réels $(s_k)_{k \geqslant 0}$ telle que $s_k \to l$ et $s_k > l$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $l = \inf \mathcal{E}$, on peut pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisir $l_k \in \mathcal{E}$ telle que $l \leqslant l_k < s_k$. Comme l_0 est une valeur d'adhérence de (α_k) et $l_0 < s_0$, on peut trouver un entier n_0 tel que $l_0 < \alpha_{n_0} < s_0$. Ensuite, comme l_1 est une valeur d'adhérence de (α_k) et $l_1 < s_1$, on peut trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que $l_1 < \alpha_{n_1} < s_1$. En continuant ainsi, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \geqslant 0}$ telle que $l \leqslant l_k < \alpha_{n_k} < s_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $s_k \to l$, on voit que $\alpha_{n_k} \to l$; ce qui montre que l est en effet une valeur d'adhérence de (α_k). $\square$

Exemples. (i) Si $\alpha_k := (-1)^k$, alors $\overline{\lim}\,\alpha_k = 1$ et $\underline{\lim}\,\alpha_k = -1$. (ii) Si $\alpha_k := (-2)^k$, alors $\overline{\lim}\,\alpha_k = \infty$ et $\underline{\lim}\,\alpha_k = -\infty$. (iii) Par l'Exercice 4.1, la suite (α_k) admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ si et seulement si $\overline{\lim}\,\alpha_k = \underline{\lim}\,\alpha_k$.

Exercice 4.2. Soit (α_k) une suite de nombres réels, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\overline{\lim}\,\alpha_k < \alpha$, alors $\alpha_k < \alpha$ à partir d'un certain rang, et que si $\overline{\lim}\,\alpha_k > \alpha$, alors $\alpha_k > \alpha$ pour une infinité d'entiers k.

Formule d'Hadamard. *Pour* toute *série entière* $\Sigma = \sum a_k z^k$*, on a*

$$\frac{1}{R(\Sigma)} = \overline{\lim}\,|a_k|^{1/k}.$$

Démonstration. C'est un bon exo de compréhension : adapter la preuve de la "règle $|a_k|^{1/k}$" donnée plus haut, en utilisant l'Exercice 4.2. □

Remarque. L'intérêt de la formule d'Hadamard est qu'elle "marche toujours", sans qu'il soit besoin de faire une hypothèse sur la suite (a_k).

3. Comportement au bord du disque de convergence

Si $\Sigma = \sum a_k z^k$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors "on ne peut rien dire de général" sur la convergence de la série pour $|z| = R$. Par exemple :

- pour $\Sigma = \sum z^k$, on a $R = 1$ et la série diverge pour tout z vérifiant $|z| = 1$;
- pour $\Sigma = \sum_{k \geqslant 1} \frac{z^k}{k^2}$, on a $R = 1$ et la série converge pour tout z vérifiant $|z| = 1$;
- pour $\Sigma = \sum_{k \geqslant 1} \frac{z^k}{k}$, on a $R = 1$, la série diverge pour $z = 1$, et la série converge pour tout $z = e^{i\theta} \neq 1$ par application d'un critère d'Abel.

Cependant, on peut quand même "dire quelque chose de non trivial" :

Théorème 3.1. (Théorème d'Abel)
Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Pour* $z \in D(0, R)$*, on pose* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$*. Soit également* $\xi \in \mathbb{C}$*. On suppose que la série* $\sum a_k \xi^k$ *converge (ce qui implique que* $|\xi| \leqslant R$*). Alors :*

(i) *La série* $\sum a_k r^k \xi^k$ *converge uniformément par rapport à* $r \in [0, 1]$ *;*

(ii) $f(r\xi) \to \sum a_k \xi^k$ *quand* $r \to 1^-$*, autrement dit, on peut écrire*

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k.$$

Démonstration. (i) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$u_k(r) = a_k r^k \xi^k.$$

Il s'agit de montrer que la série $\sum u_k(r)$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Pour cela, on écrit

$$u_k(r) = a_k \xi^k \times r^k := \alpha_k(r) \times \beta_k(r).$$

Les α_k sont des fonctions constantes (!) et la série $\sum \alpha_k$ converge uniformément sur $[0, 1]$ puisqu'on suppose que la série $\sum a_k \xi^k$ converge. De plus, les β_k sont $\geqslant 0$, la suite

(β_k) est *décroissante*, et $\beta_k(r) \leqslant 1$ pour tout k et pour tout $r \in [0,1]$. Par le critère "Abel uniforme 1", on en déduit que la série $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(ii) Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r)$ Par (i) et comme les fonctions u_k sont continues, on voit que φ est *continue* sur $[0,1]$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \xi^k = \varphi(r) \to \varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \quad \text{quand } r \to 1^-.$$

□

Remarque. Le théorème d'Abel est "non trivial" seulement pour $|\xi| = R$: si $|\xi| < R$, la série $\sum a_k r^k \xi^k$ converge en fait normalement sur $[0,1]$ par définition du rayon de convergence, donc tout est évident.

Corollaire 3.2. *Soit (a_k) une suite de nombres complexes. Si la série $\sum a_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ quand $r \to 1^-$.*

Démonstration. C'est évident par le théorème en prenant $\xi := 1$. □

4. Sommes et produits

Proposition 4.1. *Soient $\Sigma_1 = \sum a_k z^k$ et $\Sigma_2 = \sum b_k z^k$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_k + b_k) z^k$ est au moins égal à $R = \min(R_1, R_2)$, et pour tout $z \in D(0,R)$, on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Démonstration. C'est évident. □

Proposition 4.2. *Soient $\Sigma_1 = \sum a_n z^n$ et $\Sigma_2 = \sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence R_1 et R_2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est au moins égal à $R = \min(R_1, R_2)$, et pour $z \in D(0,R)$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$; autrement dit*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n.$$

Démonstration. Si $z \in D(0,R)$, alors les séries $\sum \alpha_n := \sum a_n z^n$ et $\sum \beta_n := \sum b_n z^n$ sont *absolument* convergentes. Donc, si on pose

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k},$$

alors (par le "théorème sur les séries produits") la série $\sum \gamma_n$ est (absolument) convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right).$$

Comme

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \times b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n,$$

cela donne le résultat souhaité : la série $\sum c_n z^n$ converge pour tout $z \in D(0,R)$, avec la bonne formule pour la somme. □

Remarque. On dit que $\Sigma = \sum c_n z^n$ est la **série entière produit** des séries entières $\Sigma_1 = \sum a_n z^n$ et $\Sigma_2 = \sum b_n z^n$.

Exercice. Soient (a_k) et (b_k) deux suites de nombres complexes. Pour $n \geqslant 0$, on pose $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. Montrer que si les trois séries $\sum a_k$, $\sum b_k$ et $\sum c_k$ convergent, alors $\sum_{k=0}^\infty c_k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right)$. (Utiliser le Théorème d'Abel.)

5. Régularité de la somme d'une série entière

Proposition 5.1. *Si $\Sigma = \sum a_k z^k$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.*

Démonstration. Si on pose $u_k(z) = a_k z^k$, alors la série $\sum u_k(z)$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r) \subseteq D(0,r)$. Comme les fonctions u_k sont continues, on en déduit que $f = \sum_{k=0}^\infty u_k$ est continue sur tout disque $\overline{D}(0,r)$ et donc (exo) continue sur $D(0,R)$. □

Définition 5.2. *Soit $\Sigma = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ une série entière. La **série dérivée** de Σ est la série entière $\Sigma' = \sum_{k\geqslant 1} k a_k z^{k-1}$. Autrement dit, Σ' est la série entière obtenue en "dérivant formellement" Σ.*

Lemme 5.3. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ un série entière de rayon de convergence R. Alors $\Sigma' = \sum_{k\geqslant 1} k a_k z^{k-1}$ a le même rayon de convergence que la série $z\Sigma' = \sum_{k\geqslant 1} k a_k z^k$ (micro-exo). En notant R' ce rayon de convergence, on a par la formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim}\,\big(k|a_k|\big)^{1/k} = \overline{\lim}\,\big(k^{1/k}|a_k|^{1/k}\big).$$

Comme $k^{1/k} \to 1$ quand $k \to \infty$, on en déduit (exo)

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim}\,|a_k|^{1/k} = \frac{1}{R};$$

et donc $R' = R$. □

Théorème 5.4. *Soit $\Sigma = \sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et on peut* dériver terme à terme *:*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1} \qquad \textit{pour tout } x \in\,]-R,R[\,;$$

et plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^\infty k(k-1)\cdots(k-p+1)\, a_k\, x^{k-p} = \sum_{k=p}^\infty \frac{k!}{(k-p)!}\, a_k\, x^{k-p}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et que $f'(x)$ s'obtient en dérivant terme à terme : une fois ceci acquis, une récurrence instantanée montre que f est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, avec la bonne formule pour $f^{(p)}(x)$.

On a $f(x) = \sum_{k=0}^\infty u_k(x)$, où $u_k(x) = a_k x^k$. Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u_0'(x) = 0$ et $u_k'(x) = k a_k x^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$. Par le Lemme 5.3, la série entière $\sum_{k\geqslant 1} k a_k z^{k-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum a_k z^k$, à savoir R. Donc, la série $\sum u_k'$ converge normalement sur tout intervalle compact $[-r,r] \subseteq\,]-R,R[$. Par le théorème sur les suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ avec $f' = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'$; ce qui est le résultat souhaité. □

Remarque. La formule pour $f^{(p)}(x)$ peut également s'écrire

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!}\, a_{n+p}\, x^n.$$

6. Fonctions développables en série entière

6.1. Définition, et exemples "indispensables".

Définition 6.1. *Soit $R > 0$.*

- *On dit qu'une fonction f définie sur le disque $D(0, R)$ est **développable en série entière sur** $D(0, R)$ si f est la somme d'une série entière dans le disque $D(0, R)$; autrement dit, s'il existe une suite de coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in D(0, R)$, on puisse écrire $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.*
- *De même, une fonction f définie sur l'intervalle $]-R, R[$ est **développable en série entière sur** $]-R, R[$ s'il existe une suite de coefficients (a_k) telle qu'on puisse écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ pour tout $x \in\,]-R, R[$.*

Remarque. Pour aller plus vite, on écrira "DSE" au lieu de "développable en série entière".

Exemple 6.2. La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est DSE sur le disque $D(0, 1)$, et on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad \text{pour tout } z \in D(0, 1).$$

Par conséquent, la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ est DSE sur $D(0, 1)$, avec

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k.$$

Démonstration. La première partie est bien connue depuis longtemps (somme d'une série géométrique). Pour la 2ème formule, il suffit d'écrire $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$ et d'appliquer la 1ère formule à $-z$ (qui appartient aussi au disque $D(0, 1)$). □

Remarque 1. Une fonction DSE sur $]-R, R[$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Démonstration. C'est une partie du Théorème 5.4. □

Remarque 2. Si f est DSE sur $]-R, R[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, alors les coefficients a_k sont déterminés de manière unique : on a

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_N$ sont les coefficients apparaissant dans le développement limité à l'ordre N de f en 0.

Démonstration. Par le Théorème 5.4, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{n+k}\, x^n;$$

et donc $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. □

REMARQUE 3. Une fonction f peut parfaitement être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ sans être DSE sur aucun intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. De plus, on vérifie par récurrence que pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$ pour un certain polynôme P_k. Donc $f^{(k)}(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $f^{(k)}(x) = 0$ pour $x < 0$, on voit ainsi que $f^{(k)}(x) \to 0$ quand $x \to 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit (exo) que f est infiniment dérivable en 0 (donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), avec $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si f était DSE sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, on devrait donc avoir $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = 0$ pour tour $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, ce qui n'est visiblement pas le cas. □

PROPOSITION 6.3. *Soit $R > 0$, et soit $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors f est DSE sur $]-R, R[$ si et seulement si*

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(sx)\, x^{n+1} ds \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \textit{pour tout } x \in]-R, R[.$$

Démonstration. Par la formule de Taylor avec "reste intégrale", on a pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n(x),$$

où $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$; donc le résultat est immédiat. □

COROLLAIRE 6.4. *La fonction exponentielle est DSE sur $\mathbb{C} = D(0, \infty)$, et on a*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \textit{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t) = e^{tz}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec

$$f^{(k)}(t) = z^k e^{tz} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Avec les notations de la proposition, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} z^{n+1} e^{sz}\, x^{n+1} ds = \frac{(zx)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n e^{sz} ds.$$

Comme $|e^{sz}| \leqslant e^{|z|}$ pour tout $s \in [0, 1]$, on en déduit

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|zx|^{n+1}}{n!} \times e^{|z|} \int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{|zx|^{n+1} e^{|z|}}{(n+1)!}.$$

Comme $(n+1)!$ l'emporte très largement sur C^{n+1} pour toute constante C, on voit ainsi que $R_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est DSE sur $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. En particulier, on peut écrire

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, 1^k;$$

autrement dit

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

□

Corollaire 6.5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1,1[$; et pour $x \in]-1,1[$, on a*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \textit{où}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \textit{si } k \geqslant 2.$$

Démonstration. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, avec $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ et

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \qquad \text{pour } k \geqslant 2.$$

En particulier,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Avec la notation de la proposition, si $x \in]-1,1[$ et $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} \times \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\,(1+sx)^{\alpha-n-1} x^{n+1}\, ds \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \times x^{n+1} \times \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1+sx}\right)^n (1+sx)^{\alpha-1}\, ds \end{aligned}$$

De plus, comme $-1 < x < 1$, on a $0 \leqslant 1-s \leqslant 1+sx$ et donc

$$\left|\frac{1-s}{1+sx}\right| \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leqslant \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n)}{n!}\, |x|^{n+1} \int_0^1 (1+sx)^{\alpha-1} ds \\ &:= C\, \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n)}{n!}\, |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

En choisissant un entier $N_0 \geqslant |\alpha|$, on a donc

$$|R_n(x)| \leqslant C\, \frac{(n+N_0)!}{n!}\, |x|^{n+1} \leqslant C\,(n+N_0)^{N_0}\, |x|^{n+1} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1;$$

et comme $|x| < 1$, on en déduit que $R_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \in]-1,1[$. Donc $f(x) = (1+x)^\alpha$ est bien DSE sur $]-1,1[$, et son développement est bien celui annoncé puisque $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Remarque. Si α est un *entier positif*, alors $\binom{\alpha}{k} = 0$ pour tout $k > \alpha$ car le produit $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ contient le facteur $(\alpha-\alpha)$; et $\binom{\alpha}{k}$ est le coefficient binomial "k parmi α" si $0 \leqslant k \leqslant \alpha$. On retrouve donc la **formule du binôme** pour $(1+x)^\alpha$.

6.2. Opérations sur les fonctions DSE.

Proposition 6.6. *Soit $R > 0$, et soient f et g deux fonctions DSE sur $]-R,R[$. On écrit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.*

(1) *Les fonctions $f+g$ et fg sont DSE sur $]-R,R[$, avec*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k \qquad \text{et} \qquad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n.$$

(2) *Toutes les fonctions $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ sont DSE sur $]-R,R[$, et le développement de $f^{(p)}$ s'obtient en* dérivant terme à terme *:*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-p+1)\, a_k\, x^{k-p} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{k!}{(k-p)!}\, a_k\, x^{k-p},$$

ce qui s'écrit encore

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!}\, a_{n+p}\, x^n.$$

(3) *La fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est DSE sur $]-R,R[$, et le DSE de F s'obtient en* intégrant terme à terme *:*

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}.$$

Démonstration. (1) et (2) sont des conséquences des Propositions 4.1 et 4.2 et du Théorème 5.4. Pour (3), on observe que pour tout $x \in]-R,R[$ fixé, la série $\sum a_k t^k$ converge normalement sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x<0$), donc on peut effectivement intégrer terme à terme. □

Corollaire 6.7. *Les fonctions sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont DSE sur $\mathbb{R}$, avec*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n};$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration. Pour sin et cos, on utilise le DSE de l'exponentielle complexe et on applique (1) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ix)^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^k)\,i^k}{2}\,x^k.\end{aligned}$$

Les termes d'indices impairs dans la somme valent 0 ; et pour un indice pair $k=2n$, on a $(1+(-1)^k)\,i^k = 2i^{2n} = 2\times(-1)^n$; donc

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}.$$

On procède de même pour $\sin x$ en écrivant

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot$$

Pour ch et sh, on écrit la définition :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

et on utilise le DSE de l'exponentielle réelle. □

Corollaire 6.8. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^p}$ est DSE sur $]-1,1[$, avec*

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n \qquad \textit{pour tout } x\in\,]-1,1[.$$

Démonstration. On applique (2) à la fonction f définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k.$$

En dérivant $p-1$ fois f on constate que

$$f^{(p-1)}(x) = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}\cdot$$

Donc, par (2)

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\,f^{(p-1)}(x) = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)!}{n!}\,x^n,$$

ce qui est la formule annoncée. □

Remarque. On peut aussi dire que $(1-x)^{-p} = (1+(-x))^{-p}$ et utiliser le DSE de $(1+u)^{-p}$. Exo : écrire les détails.

Corollaire 6.9. *Les fonctions $x\mapsto \log(1-x)$ et $x\mapsto\log(1+x)$ sont DSE sur $]-1,1[$, avec*

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad \text{et} \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n.$$

Démonstration. On a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right) dt;$$

donc, en intégrant terme à terme (ce qui est permis par (3)),

$$\log(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\cdot$$

Pour $\log(1+x)$, on écrit $\log(1+x) = \log(1-(-x))$ et on applique la formule précédente ; ou bien (ce qui revient au même), on part de

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\right) dt.$$

□

Corollaire 6.10. *La fonction arctangente est DSE sur $]-1,1[$, avec*

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \textit{pour tout } x \in]-1,1[.$$

Démonstration. On écrit

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\right),$$

et on intègre terme à terme. □

Exercice. Montrer que arctan n'est pas DSE sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 6.11. *Si f est une fonction DSE sur un intervalle $]-R,R[$ alors f^p aussi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et on a*

$$f(x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} x^n \qquad \textit{où} \quad a_{n,p} = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n} a_{k_1} \cdots a_{k_p}.$$

Démonstration. On procède par récurrence en utilisant (1). Exo : écrire les détails. □

Définition 6.12. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0. On dit que f est **développable en série entière au voisinage de** 0 s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que f est DSE sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$.*

Exemple. La fonction arctan (qui est définie sur $\mathbb{R}$) est DSE au voisinage de 0.

Proposition 6.13. *Soit f une fonction DSE au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$, et soit Φ une fonction DSE au voisinage de 0. Alors la fonction $\Phi \circ f$ est bien définie et DSE au voisinage de 0.*

Démonstration. On peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sur un certain intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$, et $\Phi(u) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p u^p$ sur un certain intervalle $]-\eta,\eta[$. De plus, comme $f(0) = 0$ on a $a_0 = 0$.

On sait que la série entière $\sum a_k x^k$ converge normalement sur tout compact de $]-\varepsilon,\varepsilon[$. Donc

$$\mathbf{f}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|x|^k$$

est bien défini pour tout $x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, la fonction $\mathbf{f}$ est continue sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, et $\mathbf{f}(0)=0$. On peut donc trouver un $\alpha>0$ tel que $0 \leqslant \mathbf{f}(x) < \eta$ pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$. Comme $|f(x)| \leqslant \mathbf{f}(x)$, on a alors $|f(x)| < \eta$ pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$. Donc $\Phi \circ f$ est bien définie sur $]-\alpha,\alpha[$, et on a

$$\Phi \circ f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p f(x)^p \qquad \text{pour tout } x \in]-\alpha,\alpha[.$$

De plus, par le Corollaire 6.11 on a aussi

$$f(x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} x^n \qquad \text{où} \quad a_{n,p} = \sum_{k_1+\cdots k_p=n} a_{k_1}\cdots a_{k_p}.$$

Donc, en faisant un calcul formel, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi \circ f(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} b_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p a_{n,p}\right) x^n,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\Phi \circ f$ est DSE sur $]-\alpha,\alpha[$.

Justification du calcul formel : par le théorème sur les permutations de séries doubles absolument convergentes, il suffit de montrer que si $x \in]-\alpha,\alpha[$, alors

$$S := \sum_{p=0}^{\infty} |b_p| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,p} x^n| < \infty.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,p} x^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_{n,p} |x|^n \qquad \text{où} \quad \mathbf{a}_{n,p} = \sum_{k_1+\cdots k_p=n} |a_{k_1}|\cdots|a_{k_p}|;$$

autrement dit, par le Corollaire 6.11 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,p} x^n| \leqslant \mathbf{f}(x)^p.$$

On obtient donc

$$S \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} |b_p|\, \mathbf{f}(x)^p.$$

Mais comme la série entière $\sum b_p u^p$ a un rayon de convergence au moins égal à η, on sait qu'on a $\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|\,|u|^p < \infty$ pour tout $u \in]-\eta,\eta[$; et en particulier $S < \infty$ puisque $u := \mathbf{f}(x)$ vérifie $0 \leqslant u < \eta$. □

Corollaire 6.14. *Si g est une fonction DSE au voisinage de 0 telle que $g(0) \neq 0$, alors la fonction $1/g$ est DSE au voisinage de 0.*

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ au voisinage de 0, avec $b_0 \neq 0$. Si on pose $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$, alors $h(0) = 0$ et

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + f(x)} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + (h(x)/b_0)} \qquad \text{au voisinage de } 0.$$

Ainsi, on a $1/g = \Phi \circ f$ au voisinage de 0, où $\Phi(u) := \frac{1}{b_0} \frac{1}{1+u}$ et $f := h/b_0$. Comme Φ est DSE au voisinage de 0 et comme f est DSE au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$, on en déduit que $1/g$ est elle aussi DSE au voisinage de 0. □

7. Développements des “fonctions usuelles”

7.1. Ceux qu'il faut absolument connaitre par coeur. Les 3 DSE suivants sont *à connaitre impérativement par coeur* :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{pour } |z| < 1;$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C};$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

7.2. Ceux qu'on doit savoir retrouver. À l'aide des trois DSE “de base”, *on doit savoir retrouver très rapidement* :

- le DSE de $\frac{1}{a \pm u}$ pour $|u| < |a|$ (où $a \neq 0$), en écrivant

$$\frac{1}{a \pm u} = \frac{1}{1 \pm (u/a)}$$

et en utilisant le DSE de $\frac{1}{1-z}$;

- Les DSE de $\sin x$ et $\cos x$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant ceux de e^{ix} et e^{-ix} ;
- Les DSE de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant ceux de e^x et e^{-x}.
- Les DSE de $\log(1-x)$ et $\log(1+x)$ sur $]-1, 1[$ en écrivant

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} \qquad \text{et} \qquad \log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

et en intégrant terme à terme le DSE de $\frac{1}{1 \pm t}$;

- Le DSE de $\arctan x$ sur $]-1, 1[$ en écrivant

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

et en intégrant terme à terme ;

- Le DSE de $\frac{1}{(1-u)^p}$ sur $]-1, 1[$, en dérivant $p-1$ fois $\frac{1}{1-u}$ ou bien en écrivant que $\frac{1}{(1-u)^p} = (1 + (-u))^{-p}$ et en utilisant le DSE de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -p$.

8. Fonctions holomorphes

Définition 8.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

(1) *Étant donné $z \in \Omega$, on dit que f est **$\mathbb{C}$-dérivable en** z si $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $h \to 0$. Dans ce cas, on pose*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

(2) *On dit que f est **holomorphe sur** Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z \in \Omega$, et si de plus la fonction $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est* continue *sur Ω.*

Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $p_n(z) := z^n$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ avec $p_0'(z) \equiv 0$ et $p_n' = nz^{n-1}$ si $n \geqslant 1$.

Démonstration. Le résultat est évident pour $n = 0$ ou $n = 1$; donc on suppose que $n \geqslant 2$. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. D'après la formule du binôme, on a

$$p_n(z+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = z^n + nz^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k.$$

Donc

$$\frac{p_n(z+h) - p_n(z)}{h} = nz^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \xrightarrow{h\to 0} nz^{n-1}.$$

□

Exemple 2. La fonction $f(z) = e^z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, avec $(e^z)' = e^z$.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z\, \frac{e^h - 1}{h},$$

De plus,

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}.$$

Donc $\frac{e^h-1}{h} \to \frac{1}{1!} = 1$ quand $h \to 0$, et donc $\frac{e^{z+h}-e^z}{h} \to e^z$. □

Exemple 3. La fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Démonstration. Exo. (*Suggestion* : $z \in \mathbb{C}$ étant fixé, considérer $h = \varepsilon$ et $h = i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ tendant vers 0.) □

Remarque 8.2. La dérivation “au sens complexe” possède les mêmes propriétés formelles que la dérivation des fonctions d'une variable réelle (somme, produit, composition).

Démonstration. Exo. (Les preuves sont exactement les mêmes que pour les fonctions d'une variable réelle.) □

Proposition 8.3. *Soit $R > 0$. Si $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ est une fonction DSE sur $D(0,R)$, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$, et donc en particulier holomorphe sur $D(0,R)$.*

Démonstration. Écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Il suffit de montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, avec

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

En effet, une fois ceci acquis on pourra montrer par récurrence que f est p fois $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, avec la formule qu'on imagine pour $f^{(p)}(z)$.

On fixe $z \in D(0,R)$, et r tel que $|z| < r < R$. On pose aussi $\delta := r - |z|$.

Si $h \in D(0,\delta)$ (et $h \neq 0$), alors $z + h \in D(0,r) \subseteq D(0,R)$ et

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \frac{(z+h)^n - z^n}{h} := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(h).$$

Quand $h \to 0$, on sait par l'Exemple 1 ci-dessus que $a(n,h) \to n c_n z^{n-1}$ quand $h \to 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc on a envie de dire que $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \to \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ quand $h \to 0$; autrement dit, en posant $u_n(0) := c_n z^{n-1}$, on voudrait écrire que

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0).$$

Ceci sera légitime si on arrive à montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur le disque $D(0,\delta)$. En effet, comme les fonctions u_n sont continues sur le disque $D(0,\delta)$, on en déduira que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est continue sur $D(0,\delta)$, donc en particulier continue en 0 ; ce qui est exactement la conclusion souhaitée.

Il s'agit donc d'obtenir une majoration de la forme

$$|u_n(h)| \leqslant \alpha_n \qquad \text{pour tout } h \in D(0,\delta),$$

où α_n ne dépend pas de h et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$.

Par le formule du binôme, on a $(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k}$. En retranchant z^n et en divisant par h, on en déduit que pour $h \neq 0$:

$$u_n(h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_n \binom{n}{k} z^k h^{n-1-k};$$

et on vérifie que cette formule est valable également pour $h = 0$.

Par conséquent, on a pour tout $h \in D(0,\delta)$:

$$\begin{aligned}
|u_n(h)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |c_n| \binom{n}{k} |z|^k |h|^{n-1-k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |c_n| \binom{n}{k} |z|^k \delta^{n-1-k} \\
&= |c_n| \, \frac{\big(|z| + \delta\big)^n - \delta^n}{\delta} \\
&\leqslant |c_n| \, \frac{r^n}{\delta} := \alpha_n.
\end{aligned}$$

La série $\sum |c_n|\, r^n$ est convergente car $r < R$; donc la série $\sum \alpha_n$ est convergente, ce qui termine la preuve. □

Il est tout à fait remarquable que la réciproque de la Proposition 8.3 soit vraie :

Théorème 8.4. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque $D(0,R)$, alors f est DSE dans $D(0,R)$.*

Démonstration. Tout repose sur le fait suivant.

Fait. Soit $r \in D(0,R)$. Pour tout r vérifiant $|z| < r < R$, on a la formule suivante, qu'on appelle la **formule de Cauchy** :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\, ire^{it}dt.$$

Preuve du Fait. On introduit la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)}{re^{it}-z}\, ire^{it}dt.$$

Si on note $F(\lambda,t)$ l'expression apparaissant dans l'intégrale, alors la fonction F est continue sur $[0,1]\times[0,2\pi]$ car $(1-\lambda)z+\lambda re^{it} \in [z, re^{it}] \subseteq \overline{D}(0,r) \subseteq D(0,R)$ pour tout $(\lambda,t) \in [0,1]\times[0,2\pi]$ et f est continue sur $D(0,R)$. Donc la fonction φ est *continue sur* $[0,1]$, d'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres.

De plus, $F(\lambda,t)$ admet une dérivée partielle par rapport à λ donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,t) = \frac{(-z+re^{it})f'\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)}{re^{it}-z}\, ire^{it} = f'\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\, ire^{it}.$$

La fonction $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,t)$ est continue sur $[0,1]\times[0,2\pi]$ car f' est supposée continue sur $D(0,R)$. D'après le théorème de dérivabilité pour les intégrales à paramètres, la fonction φ est donc *de classe $\mathcal{C}^1$* sur $[0,1]$, avec

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\, ire^{it}dt.$$

Mais si $\lambda > 0$, alors

$$f'\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\, ire^{it} = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\Big(f\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\Big(f\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\Big)\, dt\\ &= \Big[f\big((1-\lambda)z+\lambda re^{it}\big)\Big]_{t=0}^{t=2\pi}\\ &= 0\,(!)\end{aligned}$$

On en déduit que φ est constante sur $]0,1]$, donc sur $[0,1]$ par continuité. En particulier,

$$\varphi(1) = \varphi(0);$$

autrement dit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\, ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{re^{it}-z}\, ire^{it}dt = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}-z}\, dt.$$

Il suffit donc maintenant de vérifier que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}-z}\, dt$ vaut $2i\pi$.

Comme $|z| < r$, on peut écrire

$$\frac{ire^{it}}{re^{it}-z} = i\,\frac{1}{1-\frac{ze^{-it}}{r}} = i\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{ze^{-it}}{r}\right)^k,$$

où la série converge normalement sur $[0, 2\pi]$ puisque $|ze^{-it}/r| = |z|/r < 1$. Par convergence normale, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}-z}\,dt = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{r^k}\int_0^{2\pi}e^{-ikt}dt.$$

Mais toutes les intégrales $\int_0^{2\pi}e^{-ikt}dt$ sont nulles, sauf celle pour $k = 0$ qui vaut 2π (exo) ; donc on obtient ce qu'on veut. □

Pour montrer que f est développable en série entière dans le disque $D(0, R)$, il suffit de montrer qu'elle est DSE dans tout disque $D(0, r)$ avec $r < R$. En effet, on pourra alors écrire

$$\forall r < R\ \forall z \in D(0,r)\ :\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,r}z^n,$$

où les coefficients $c_{k,r}$ dépendent *a priori* de r. Mais par *unicité d'un DSE*, on voit que les $c_{k,r}$ ne dépendent en fait pas de r (micro-exo). On peut donc les appeler c_k ; et comme la formule précédente est valable pour tout $r < R$, on en déduit que f est DSE dans tout le disque $D(0, R)$.

Fixons $r < R$, et soit $z \in D(0, r)$. Par la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-\frac{ze^{-it}}{r}}. \end{aligned}$$

Comme $|ze^{-it}/r| = |z/r| < 1$, on peut ensuite écrire

$$\frac{1}{1-\frac{ze^{-it}}{r}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{ze^{-it}}{r}\right)^k,$$

où la série converge normalement sur $[0, 2\pi]$; et on en déduit comme plus haut

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}f(re^{it})e^{-ikt}dt\right)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}c_{k,r}z^k.$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in D(0, r)$ (avec des $c_{k,r}$ indépendants de z), on a donc bien montré que f est DSE dans le disque $D(0, r)$. □

Remarque. En fait, le théorème reste vrai si on suppose seulement que f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point (sans rajouter l'hypothèse que f' est continue) ; mais la preuve est plus délicate.

Corollaire 8.5. *Une fonction* $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ *est DSE sur* $D(0, R)$ si et seulement *si elle est holomorphe sur* $D(0, R)$

Démonstration. C'est la conjonction du théorème et de la proposition précédente. □

Corollaire 8.6. *Toute fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est* infiniment $\mathbb{C}$-dérivable *sur* Ω.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ fixé, et choisissons $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Pour $u \in D(0, r)$, on peut alors poser

$$\widetilde{f}(u) := f(z_0 + u).$$

Comme f est holomorphe sur $D(z_0, r)$, la fonction $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $D(0, r)$. Donc $\widetilde{f}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0, r)$ par le théorème, et donc $f(z) = \widetilde{f}(z - z_0)$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, r)$. En particulier, f est est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$. □

Corollaire 8.7. *La fonction tangente est DSE sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on peut définir $\cos z$ et $\sin z$ pour tout nombre complexe z en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\cdot$$

Comme la fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, les fonctions sin et cos le sont également. De plus, on vérifie (exo) que les solutions complexes de l'équation $\cos z = 0$ sont les mêmes que les solutions réelles, *i.e* les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ est bien défini pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big)$. En particulier, la fonction tan est bien défini sur le disque $D(0, \frac{\pi}{2})$, et holomorphe dans ce disque car sin et cos le sont avec $\cos z \neq 0$ pour tout $z \in D(0, \frac{\pi}{2})$. Par conséquent, tan est DSE sur $D(0, \frac{\pi}{2})$; et donc la fonction tangente est DSE sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est l'intersection de $D(0, \frac{\pi}{2})$ avec $\mathbb{R}$. □

Corollaire 8.8. ("Théorème fondamental de l'algèbre")
Si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors P possède au moins une racine complexe.

Démonstration. Supposons que P ne possède aucune racine complexe. Alors $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est bien défini pour tout $z \in \mathbb{C}$, et la fonction f est *holomorphe sur* $\mathbb{C}$, en tant qu'inverse d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Par conséquent, f est DSE sur $\mathbb{C}$. Ainsi, on peut écrire

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

pour une certaine suite de coefficients (a_k).

Si $r > 0$ est fixé, on a donc (pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{P(re^{it})} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikt},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $|a_k r^k e^{ikt}| = |a_k r^k|$ et la série $\sum a_k r^k$ est absolument convergente.

On en déduit (exo) que pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{P(re^{it})}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^r \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = 2\pi a_n r^n,$$

car dans la somme toutes les intégrales sont nulles sauf celle pour $k = n$ qui vaut 2π.

Par conséquent,

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|P(re^{it})|} \tag{8.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.

Mais comme P est un polynôme *non constant*, $|P(z)|$ tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$ (exo), et donc $1/P(z) \to 0$. Donc $\frac{1}{|P(re^{it})|} \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $r \to \infty$; et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|P(re^{it})|} \to 0 \qquad \text{quand } r \to \infty.$$

En faisant tendre r vers l'infini dans (8.1), on en déduit que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C},$$

ce qui est évidemment absurde.

$\square$

Chapitre 5

Séries de Fourier

1. Fonctions périodiques, coefficients de Fourier

1.1. Généralités.

Définition 1.1. *Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-**périodique** si*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; f(x+T) = f(x).$$

Exemple 1.2. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Exemple 1.3. La fonction "partie fractionnaire" est 1-périodique.

Exemple 1.4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction e_k définie par

$$e_k(t) := e^{ikt}$$

est 2π-périodique. Plus généralement, toute fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$P(t) = \sum_{k \in \Lambda} c_k e^{ikt} \qquad \text{où} \qquad \Lambda \subseteq \mathbb{Z} \text{ est fini}$$

est 2π-périodique. Une fonction de ce type s'appelle un **polynôme trigonométrique**.

Notations. Étant donné $T > 0$, on note $\mathcal{R}_T$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont T-périodiques et **localement Riemann-intégrables**, *i.e.* intégrables au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. On note également $\mathcal{C}_T$ l'ensembles des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont T-périodiques et *continues sur* $\mathbb{R}$. Par définition, $\mathcal{C}_T$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_T$.

Remarque 1.5. Pour qu'une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit dans $\mathcal{R}_T$, il suffit qu'elle soit intégrable au sens de Riemann sur *un* intervalle $[a, b]$ de longueur T.

Démonstration. Exo. □

Remarque 1.6. L'espace $\mathcal{R}_T$ est en fait une **algèbre**, c'est-à-dire un espace vectoriel stable par produit.

Démonstration. Il est évident que le produit de deux fonctions T-périodiques est encore T-périodique ; et on sait que le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann est encore intégrable au sens de Riemann. □

Remarque 1.7. Toute fonction $f \in \mathcal{R}_T$ est *bornée sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{R}_T$, alors f est bornée sur $[0, T]$ car Riemann-intégrable sur $[0, T]$; donc f est bornée *sur* $\mathbb{R}$ par T-périodicité. □

Exercice 5.3. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_T$ est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1.8. *Si $f \in \mathcal{R}_T$ alors, pour tous intervalles fermés bornés $I, J \subseteq \mathbb{R}$ de* longueur T, *on a*

$$\int_I f(t)\,dt = \int_J f(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\int_I f(t)\,dt = \int_0^T f$ pour tout intervalle I de longueur T. On écrit $I = [a, a+T]$. Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,dt &= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt \\ &= \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f - \int_0^a f.\end{aligned}$$

De plus, comme f est T-périodique, on a aussi

$$\int_T^{a+T} f = \int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f;$$

d'où le résultat. □

1.2. Un problème naturel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Une question naturelle est de savoir si on peut "reconstituer" f à partir des fonctions 2π-périodiques élémentaires $e_k(t) = e^{ikt}$.

Terminologie. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) indexée par $\mathbb{Z}$. On dira que la série $\sum f_k$ converge en un point $t \in \mathbb{R}$ si les **sommes partielles symétriques** $S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} f_k(t)$ admettent une limite quand $n \to \infty$. On dit que la série $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si elle converge en tout point $t \in \mathbb{R}$, et que la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si la suite (S_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple d'énoncé "plausible". Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique "raisonnable", alors on peut écrire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

où $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de coefficients (indépendants de t) et la série $\sum c_k e^{ikt}$ converge en un sens à préciser.

Lemme 1.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. On suppose qu'on peut écrire*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

où la série $\sum c_k e^{ikt}$ converge uniformément *sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que les "sommes partielles symétriques" $S_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ convergent uniformément. Dans ces conditions, les coefficients c_k sont* déterminés de manière unique *: on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Démonstration. Comme $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilt}$ avec *convergence uniforme* de la série sur $[-\pi, \pi]$, on peut écrire

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilt}\Big)\, e^{ikt} dt$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt.$$

De plus, si $m \in \mathbb{Z}$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad m = 0, \\ \left[\frac{1}{m}\, e^{imt}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si} \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Donc le seul terme non nul dans la somme précédente est celui où $l = k$, qui vaut $2\pi c_k$; et on obtient ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt = 2\pi\, c_k.$$

□

1.3. Coefficients de Fourier. On rappelle qu'on note $\mathcal{R}_{2\pi}$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et localement Riemann-intégrables. Le Lemme 1.9 "motive" la définition suivante.

DÉFINITION 1.10. *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$c_k(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

On dit que les c_k sont les ***coefficients de Fourier*** *de f, et que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ est la* ***série de Fourier*** *de f.*

REMARQUE 1. Par périodicité, on a aussi $c_k(f) = \int_I f(t)e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$ pour n'importe quel intervalle I de longueur 2π. En particulier,

$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

REMARQUE 2. L'application qui à une fonction f associe la suite $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est *linéaire* : on a $c_k(f + g) = c_k(f) + c_k(g)$ et $c_k(\lambda f) = \lambda c_k(f)$ pour toute constante λ.

REMARQUE 3. Si on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, \frac{dt}{2\pi}$, alors

$$|c_k(f)| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. C'est évident. □

NOTATION. Si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikt}.$$

Autrement dit,

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k.$$

La question qui va nous occuper. A quelle(s) condition(s) peut-on dire que $S_n f$ "tend vers f", en un (ou plusieurs) sens à préciser ?

1.4. Fourier et convolution.

Définition 1.11. *Soient $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi}\cdot$$

On dit que la fonction $f * g$ est la ***convolée*** *de f et g.*

Remarque 1. $f * g$ est 2π-périodique, et elle est continue si f et g sont continues.

Démonstration. Exo utilisant le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre. □

Remarque 2. On a $f * g = g * f$.

Démonstration. En effectuant le changement de variable $u = x - t$ et en utilisant la périodicité, on voit que

$$\begin{aligned} f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} &= \int_{-t}^{-t+2\pi} f(x-u)g(u)\,\frac{du}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)\,\frac{du}{2\pi} = g * f(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 3. L'application $(f, g) \mapsto f * g$ est *bilinéaire.*

Démonstration. C'est évident par linéarité de l'intégrale. □

Le lemme suivant est "évident", mais on verra qu'il est aussi très important.

Lemme 1.12. *Si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, alors $f * e_k = c_k(f)e_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. C'est clair par définition :

$$f * e_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,\frac{dt}{2\pi} = e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = c_k(f)e_k(x).$$

□

Le lemme suivant ne nous servira en fait à rien ; mais il est tout de même important de connaitre ce résultat ("la transformation de Fourier change le produit de convolution en produit ordinaire").

Lemme 1.13. *On a $c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve formelle. En admettant qu'on peut permuter les intégrales,

$$\begin{aligned}
c_k(f*g) &= \int_{-\pi}^{\pi} f*g(x)\, e^{-ikx}\,\frac{dx}{2\pi}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi}\right) e^{-ikx}\,\frac{dx}{2\pi}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)e^{-ik(x-t)}\,\frac{dx}{2\pi}\right)\frac{dt}{2\pi}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\left(\int_{-t}^{-t+2\pi} g(u)e^{-iku}\,\frac{du}{2\pi}\right)\frac{dt}{2\pi}\\
&= c_k(g)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = c_k(g)c_k(f).
\end{aligned}$$

□

1.5. Le "Lemme de Riemann-Lebesgue".

PROPOSITION 1.14. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on a* $\lim_{k\to\pm\infty} c_k(f) = 0$.

Démonstration. On démontrera un résultat plus fort un peu plus loin ; mais on peut quand même donner une preuve direct de Riemann-Lebesgue dès maintenant. En considérant séparément $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on se ramène au cas où f est à valeurs réelles.

CAS 1. On suppose que la fonction f est en escalier sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $(s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[-\pi, \pi]$ adaptée à f, et notons α_j la valeur constante de f sur $]s_j, s_{j+1}[$, $j = 0, \dots, N-1$. Pour tout $k \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
2\pi\, c_k(f) &= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t)e^{-ikt}dt\\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j\int_{s_j}^{s_{j+1}} e^{-ikt}dt\\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j\times\frac{-1}{ik}\big(e^{-iks_{j+1}} - e^{-iks_j}\big).
\end{aligned}$$

Comme $|e^{-iks_{j+1}} - e^{-iks_j}| \leqslant 2$, on en déduit

$$2\pi\,|c_k(f) \leqslant \frac{C}{|k|}\quad\text{pour tout } k\neq 0,\qquad\text{où}\quad C = 2\sum_{j=0}^{N-1}|\alpha_j|;$$

ce qui prouve le résultat dans ce cas.

CAS GÉNÉRAL. On suppose que $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est quelconque (à valeurs réelles).

FAIT. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{R}_{2\pi}$ en escalier sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\|\varphi - f\|_1 \leqslant \varepsilon$.

Preuve du Fait. Comme f est intégrable au sens de Riemann sur $[-\pi, \pi]$, on peut trouver deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[-\pi, \pi]$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad\text{et}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

De plus, quitte à redéfinir $\varphi(-\pi)$ et $\varphi(\pi)$, on peut supposer que $\varphi(-\pi) = f(-\pi)$ et $\varphi(\pi) = f(\pi)$, et donc $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. On peut ainsi prolonger φ en une fonction 2π-périodique, encore notée φ. Alors φ convient, puisque

$$\|\varphi - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - f| \, \frac{dt}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

□

On peut maintenant finir la preuve. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, et soit $\varphi \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction en escalier sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\|\varphi - f\|_1 \leqslant \varepsilon$. Par linéarité, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|c_k(f)| = |c_k(f - \varphi) + c_k(\varphi)| \leqslant |c_k(f - \varphi)| + |c_k(\varphi)|,$$

et donc

$$|c_k(f)| \leqslant \|f - \varphi\|_1 + |c_k(\varphi)| \leqslant \varepsilon + |c_k(\varphi)|.$$

Comme $c_k(\varphi) \to 0$ quand $k \to \pm\infty$, on peut ensuite trouver un entier K tel que $|c_k(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ pour tout k vérifiant $|k| \geqslant K$. On a ainsi

$$|c_k(f)| \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{pour } |k| \geqslant K;$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque. La preuve a en fait établi le résultat plus général suivant : *Si f est une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors*

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \to 0 \qquad \textit{quand } \lambda \to \pm\infty.$$

2. Densité des polynômes trigonométriques

2.1. Le résultat de base. Au Chapitre 1, on a démontré le *Théorème de Weierstrass*, d'après lequel les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$ pour tout intervalle compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (Théorème 6.1). L'analogue "périodique" est le théorème suivant, qui porte parfois le nom de **Théorème de Weierstrass trigonométrique**. On rappelle qu'on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et *continues sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. Autrement dit : si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors on peut trouver une suite de polynômes trigonométriques (P_n) telle que $P_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.*

La preuve de ce théorème repose sur deux lemmes et une remarque.

Lemme 2.2. *Il existe une suite de polynômes trigonométriques $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) \, \frac{dt}{2\pi} = 1$, *et $Q_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *pour tout δ vérifiant $0 < \delta < \pi$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\delta^\pi Q_n(t) \, \frac{dt}{2\pi} = 0 = \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t) \, \frac{dt}{2\pi}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$Q_n(t) := \frac{1}{\alpha_n}\,(1+\cos t)^n\ , \qquad \text{où} \quad \alpha_n := \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos t)^n\,\frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Les Q_n sont des polynômes trigonométriques car la fonction cos en est un, et il est évident que Q_n vérifie (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que la suite (Q_n) vérifie (ii) ; et comme de plus les fonctions Q_n sont visiblement paires, on peut se contenter de montrer que $\int_\delta^\pi Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Comme la fonction $t \mapsto 1 + \cos$ est décroissante et positive sur $[0, \pi]$, on a d'une part

$$\alpha_n \geqslant \int_0^{\delta/2} (1+\cos t)^n\,\frac{dt}{2\pi} \geqslant (1+\cos(\delta/2))^n \times \frac{\delta}{4\pi};$$

et d'autre part

$$0 \leqslant \int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\frac{dt}{2\pi} \leqslant (1+\cos(\delta))^n \times \frac{\pi-\delta}{2\pi}\cdot$$

Donc

$$0 \leqslant \int_\delta^\pi Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{\alpha_n}\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\frac{dt}{2\pi} \leqslant \frac{2(\pi-\delta)}{\delta}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{1+\cos(\delta/2)}\right)^n.$$

Si on pose $C := \frac{2(\pi-\delta)}{\delta}$ et $\rho := \frac{1+\cos(\delta)}{1+\cos(\delta/2)}$ (qui sont des constantes indépendantes de n) on a ainsi

$$0 \leqslant \int_\delta^\pi Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \leqslant C\,\rho^n \qquad \text{avec } \rho < 1;$$

et donc $\int_\delta^\pi Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \to 0$ quand $n \to \infty$. □

DÉFINITION 2.3. *On dira qu'un suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}_{2\pi}$ est une* ***suite de Dirac*** *si elle vérifie les propriétés* (i) *et* (ii) *du Lemme 2.2.*

LEMME 2.4. *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}_{2\pi}$ est une suite de Dirac, et si on pose $P_n := f * Q_n$, alors $P_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Comme la fonction f est continue et périodique, elle est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$ (Exercice 5.3). En utilisant ce fait et les propriétés de la suite (Q_n), on montre que la suite (P_n) converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$ en procédant exactement comme dans la preuve du Théorème de Weierstrass faite au Chapitre 1. Écrire les détails est un excellent exo. □

REMARQUE 2.5. Si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et si Q est un polynôme trigonométrique, alors $f * Q$ est un polynôme trigonométrique.

Démonstration. D'après le Lemme 1.12, on a $f * e_k = c_k(f)e_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc, si on écrit $Q = \sum_{k\in\Lambda} a_k e_k$, alors $f * Q = \sum_{k\in\Lambda} c_k(f) a_k e_k$ par linéarité ; et donc $P_n = f * Q$ est bien un polynôme trigonométrique. □

Preuve du Théorème 2.1. Le résultat est maintenant évident : si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si on pose $P_n := f * Q_n$, où (Q_n) est une suite de Dirac constituée de polynômes trigonométriques donnée par le Lemme 2.2, alors les P_n sont des polynômes trigonométriques par la remarque 2.5, et $P_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ par le Lemme 2.4. □

2.2. Une illustration. Voici une application non-triviale de la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. Il s'agit d'un cas très particulier d'un résultat qu'on appelle le **Théorème ergodique**. Soit

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}.$$

PROPOSITION 2.6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors, pour tout tout $\xi \in \mathbb{T}$:*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\big(e^{in\alpha}\xi\big) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt \qquad \textit{quand } N \to \infty.$$

Démonstration. Dans la suite on posera $\omega := e^{i\alpha}$. Comme $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, on a $k\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et donc

$$\omega^k \neq 1 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Il s'agit de montrer

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt$$

pour toute fonction continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{T}$. Dans la suite, on fixe le point $\xi \in \mathbb{T}$.

CAS 1. f est de la forme $f(z) = z^k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Si $k = 0$, alors $f(z) \equiv 1$, donc $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt$ pour tout N et le résultat est évident.
Si $k \neq 0$, alors $\omega^k \neq 1$, et donc on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big) = \xi\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{kn} = \xi\sum_{n=0}^{N-1}(\omega^k)^n = \xi\,\frac{1-\omega^{kN}}{1-\omega^k}\cdot$$

On a donc $\left|\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big)\right| \leqslant \frac{2}{|1-\omega^k|}$ pour tout $N \geqslant 1$, et donc

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big) \xrightarrow{N\to\infty} 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt.$$

CAS 2. Cas général.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $L_N : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ la *forme linéaire* définie par

$$L_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\big(\omega^n\xi\big) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt.$$

Il s'agit de prouver que

$$L_N(f) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Dans ce qui suit, pour $k \in \mathbb{Z}$ on notera $\mathbf{e}_k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ la fonction définie $\mathbf{e}_k(z) := z^k$, et on notera $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les $\mathbf{e}_k$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont donc les fonctions $p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$p(z) = \sum_{k\in\Lambda} c_k z^k,$$

où les c_k sont des constantes et $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ est fini.

Fait 1. $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Preuve du Fait 1. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ une fonction continue quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(t) := f(e^{it})$$

est continue et 2π-périodique, *i.e.* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Par le Théorème 2.1, on peut donc trouver un polynôme trigonométrique $P(t) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikt}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \;:\; |P(t) - F(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Si on définit $p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ par

$$p(z) = \sum_{k\in\Lambda} c_k z^k,$$

alors $p \in \mathcal{P}$ et $P(t) = p(e^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme tout nombre $z \in \mathbb{T}$ est de la forme e^{it}, on voit ainsi que

$$\forall z \in \mathbb{C} \;:\; |p(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon;$$

autrement dit $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. □

Fait 2. $L_N(p) \xrightarrow{N\to\infty} 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Preuve du Fait 2. Le Cas 1 dit exactement que $L_N(\mathbf{e}_k) \to 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc le résultat est clair par linéarité. □

Fait 3. On a $|L_N(f)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Preuve du Fait 3. Exo. □

On peut maintenant terminer la preuve. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on peut trouver $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$; et comme $L_N(p) \to 0$ quand $N \to \infty$, on peut ensuite trouver N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0$: $|L_N(p)| \leqslant \varepsilon/3$. Pour tout $N \geqslant N_0$, on a alors

$$\begin{aligned}|L_N(f)| &= |L_N(f-p) + L_N(p)|\\ &\leqslant |L_N(f-p)| + |L_N(p)| \leqslant 2\,\|f-p\|_\infty + |L_N(p)| \leqslant 3\varepsilon/3 = \varepsilon;\end{aligned}$$

ce qui prouve que $L_N(f) \to 0$ quand $N \to \infty$. □

2.3. Le "Théorème de Fejér". Le résultat suivant est une version plus précise du Théorème 2.1.

Théorème 2.7. (Théorème de Fejér)
Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément au sens de Cesàro. *Autrement dit, si on pose pour $N \in \mathbb{N}$:*

$$\sigma_N f(t) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(t),$$

alors $\sigma_N f(t) \to f(t)$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $N \to \infty$.

Le preuve du Théorème de Fejér est, dans les grandes lignes, la même que celle du Théorème 2.1. Elle demande juste un peu plus de calculs.

Lemme 2.8. *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$.*

(1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$S_n f = f * D_n \qquad \text{où} \quad D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

(2) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sigma_N f = f * K_N \qquad \text{où} \quad K_N := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n.$$

Démonstration. (1) Par linéarité,

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = f * \Big(\sum_{k=n}^{n} e_k \Big).$$

Même preuve pour (2), en utilisant (1). □

Définition 2.9. *La fonction D_n s'appelle le* ***noyau de Dirichlet*** *d'ordre n, et la fonction K_N s'appelle le* ***noyau de Fejér*** *d'ordre N.*

Lemme 2.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)};$$

et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \, \frac{\sin^2\big((N+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin^2\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Remarque. Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ les formules doivent être comprises comme on le pense : $D_n(t) = 2n+1$ et $K_N(t) = N+1$.

Preuve du lemme. Tout repose sur le Fait suivant.

Fait. Si $t \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $M \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{m=0}^{M} e^{imt} = e^{iM\frac{t}{2}} \, \frac{\sin\big((M+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Preuve du Fait. Comme $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{it} \neq 1$, donc on peut écrire

$$\sum_{m=0}^{M} e^{imt} = \frac{1 - e^{i(M+1)t}}{1 - e^{it}}.$$

Puis on "traffique" $\frac{1-e^{i(M+1)t}}{1-e^{it}}$ pour faire apparaitre les sinus :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i(M+1)t}}{1 - e^{it}} &= \frac{e^{i(M+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \times \frac{e^{-i(M+1)\frac{t}{2}} - e^{i(M+1)\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \\ &= e^{iM\frac{t}{2}} \times \frac{-2i\sin\big((M+1)\frac{t}{2}\big)}{-2i\sin\big(\frac{t}{2}\big)}; \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

En appliquant le Fait avec $M := 2n$, on trouve (pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$)

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{m=0}^{2n} e^{imt} = e^{-int} \times e^{int} \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)},$$

ce qui est la formule souhaitée pour $D_n(t)$.

Ensuite, on écrit

$$(N+1)K_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} = \frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(2n+1)\frac{t}{2}}\right).$$

En appliquant le Fait avec $M := N$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{N} e^{i(2n+1)\frac{t}{2}} = e^{i\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{N} e^{int} = e^{i(N+1)\frac{t}{2}} \frac{\sin\big((N+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Donc

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(n+\frac{1}{2})t}\right) = \frac{\sin^2\big((N+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)},$$

ce qui donne la formule pour $K_N(t)$. □

Lemme 2.11. *Les noyaux de Fejér K_N possèdent les propriétés suivantes :*

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$ *et* $K_N \geqslant 0$ *pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *;*

(ii) *pour tout δ vérifiant $0 < \delta < \pi$, on a*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} K_N(t) dt = 0 = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} K_N(t)\, dt.$$

Démonstration. (i) Par le Lemme 2.10, K_N est bien une fonction *positive*. De plus, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$.

(ii) Comme K_N est une fonction paire (par définition, ou par le Lemme 2.10), il suffit de considérer $\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt$. Si $\delta \leqslant t \leqslant \pi$, alors $\sin^2(t/2) \geqslant \sin^2(\delta/2)$. Donc, par le Lemme 2.10,

$$0 \leqslant \int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt \leqslant \frac{1}{N+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \leqslant \frac{C_\delta}{N+1} \qquad \text{où } C_\delta = \tfrac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)};$$

ce qui montre que $\int_{\delta}^{\pi} K_N \to 0$ quand $N \to \infty$. □

Preuve du Théorème de Fejér. Par le Lemme 2.11, la suite $(K_N)_{N\geqslant 0}$ est une suite de Dirac ; donc $\sigma_N f = K_N * f \to f$ uniformément par le Lemme 2.4. □

Corollaire 2.12. *Les coefficients de Fourier* déterminent la fonction *si celle-ci est continue : si $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ vérifient $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$.*

Démonstration. Soit $u := f - g$. Par linéarité, on a $c_k(u) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et on veut montrer que $u = 0$. Mais c'est évident par Fejér : comme $c_k(u) = 0$ pour tout k, on a $S_n u = 0$ pour tout n, donc $\sigma_N u = 0$ pour tout N, et donc $u \equiv 0$ puisque $\sigma_N u(t) \to u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Corollaire 2.13. *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Si $S_n f(t)$ admet une limite quand $n \to \infty$, alors cette limite est nécessairement égale à $f(t)$.*

Démonstration. Notons L la limite de $S_n f(t)$. Par le *théorème de Cesàro*, $\sigma_N f(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N S_n f(t)$ tend vers L quand $N \to \infty$; donc $L = f(t)$ par Fejér. □

3. Théorie "L^2"

3.1. Un "produit scalaire" sur $\mathcal{R}_{2\pi}$.

Notation 1. Pour $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on pose

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Fait 3.1. *$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ est un* ***semi-produit scalaire*** *sur $\mathcal{R}_{2\pi}$, ce qui signifie que $\langle f, g\rangle$ est linéaire par rapport à f, anti-linéaire par rapport à g, qu'on a $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$, et que $\langle f, f\rangle \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$.*

Démonstration. Exo. □

Remarque. $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ n'est pas un vrai produit scalaire car il est possible d'avoir $\langle f, f\rangle = 0$ sans pour autant que $f = 0$. Par exemple, la fonction $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ définie par $f(2\pi n) = 6$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $f(t) = 0$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ n'est pas *identiquement* nulle, mais $\langle f, f\rangle = 0$.

Notation 2. Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on pose

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, g\rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

Fait 3.2. *$\|\cdot\|_2$ est une* ***semi-norme*** *sur $\mathcal{R}_{2\pi}$, ce qui signifie qu'on a $\|f\|_2 \geqslant 0$, $\|\lambda f\|_2 = |\lambda|\,\|f\|_2$ pour toute constante λ, et l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$. De plus, on a l'* ***inégalité de Cauchy-Schwarz***

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

Démonstration. La preuve usuelle du fait que tout produit scalaire donne lieu à une norme vérifiant à Cauchy-Schwarz fonctionne exactement de la même façon. □

Terminologie. Même si c'est seulement une semi-norme, on dit que $\|\cdot\|_2$ est la **"norme L^2"** sur $\mathcal{R}_{2\pi}$.

Exercice 5.4. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction *continue* 2π-périodique telle que $\|u\|_2 = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 5.5. Soit (φ_n) une suite déléments de $\mathcal{R}_{2\pi}$, et soient $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Montrer que si (φ_n) "converge en norme" L^2 à la fois vers f et vers g, autrement dit si $\|\varphi_n - f\|_2 \to 0$ et $\|\varphi_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\|f - g\|_2 = 0$.

Remarque 1. Si on applique Cauchy-Schwarz avec $|f|$ et $|g|$ plutôt que f et g, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(t)|\,\frac{dt}{2\pi} \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2,$$

autrement dit

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

Remarque 2. On a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$ pour toute $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$.

Démonstration. L'inégalité $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$ est laissée en micro-exo. Pour l'inégalité $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$, on aplique la remarque précédente avec $g = \mathbf{1}$. □

Lemme 3.3. *La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est **orthonormale** pour le semi-produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Autrement dit :*

$$\|e_k\|_2 = 1 \quad \text{pour tout } k \qquad \text{et} \qquad \langle e_k, e_l\rangle = 0 \quad \text{si } k \neq l.$$

Démonstration. On a $\|e_k\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; et $\langle e_k, e_l\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} \frac{dt}{2\pi} = \left[\frac{1}{2\pi i(k-l)} e^{i(k-l)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ si $k \neq l$ par périodicité. □

Corollaire 3.4. *Pour tout polynôme trigonométrique $P(t) = \sum\limits_{k\in\Lambda} c_k e^{ikt}$, on a*

$$\|P\|_2^2 = \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^2.$$

Démonstration. Comme la famille (e_k) est orthogonale, $\|P\|_2^2 = \|\sum_{k\in\Lambda} c_k e_k\|_2^2 = \sum_{k\in\Lambda} \|c_k e_k\|_2^2$ par le *Théorème de Pythagore* ; d'où le résultat puisque $\|e_k\|_2 = 1$ pour tout k. □

3.2. Signification géométrique de la série de Fourier.

Fait 3.5. *Si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$c_k(f) = \langle f, e_k\rangle.$$

Démonstration. Par définition. □

Notation. Pour tout en tier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques **de degré** $\leqslant n$, *i.e.* les polynômes trigonométriques P de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Autrement dit :

$$\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\,(e_{-n}, \dots, e_0, \dots e_n) = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{k=-n}^{n}.$$

Lemme 3.6. *Si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n f$ est le **projeté orthogonal** de f sur $\mathcal{P}_n$. Autrement dit, on a*

$$S_n f \in \mathcal{P}_n \qquad \text{et} \qquad \langle f - S_n, Q\rangle = 0 \quad \text{pour tout } Q \in \mathcal{P}_n.$$

Démonstration. Comme la famille $(e_k)_{k=-n}^{n}$ est orthonormale et engendre $\mathcal{P}_n$, c'est une *base orthonormée* de $\mathcal{P}_n$. De plus, on a par le Fait 3.5 :

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k;$$

donc on reconnait la formule “bien connue” pour le projeté orthogonal. □

Exercice. En toute rigueur, on devrait dire que $S_n f$ est un projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$. Pourquoi ?

Corollaire 3.7. *On a $\|f - S_n f\|_2 \leqslant \|f - P\|_2$ pour tout $P \in \mathcal{P}_n$.*

Démonstration. Par Pythagore,

$$\|f-P\|_2^2 = \|(f-S_nf)+(S_nf-P)\|_2^2 = \|f-S_nf\|_2^2 + \|S_nf-P\|_2^2,$$

et donc en particulier $\|f-P\|_2^2 \geqslant \|S_nf-P\|_2^2$. □

Terminologie. Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres réels **positifs** indexée par $\mathbb{Z}$, on pose

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k;$$

limite qui existe dans $[0,\infty]$ car la suite $A_n := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k$ est croissante. On dit que *la série* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k$ *est convergente* si on a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k < \infty$.

Exercice. Si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k$ est convergente, alors $\alpha_k \to 0$ quand $k\to\pm\infty$.

Corollaire 3.8. *Si $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$, alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ est convergente ; et de plus, on a l'**inégalité de Bessel***

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

*En particulier, $c_k(f)\to 0$ quand $k\to\pm\infty$ (**Riemann-Lebesgue**).*

Démonstration. Par Pythagore, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\|f\|_2^2 = \|f-S_nf\|_2^2 + \|S_nf\|_2^2.$$

Donc

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = \|S_nf\|^2 \leqslant \|f\|_2^2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N};$$

et donc $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty$. □

3.3. Le Théorème de Parseval.

Théorème 3.9. *Si $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$, alors la série de Fourier de f "converge vers f en norme L^2"; autrement dit*

$$\|S_nf-f\|_2 \to 0 \qquad \textit{quand } n\to\infty.$$

Démonstration. Le point clé est le fait suivant.

Fait. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{R}_{2\pi}$ pour la norme L^2. Autrement dit : si $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$, alors, pour tout $\varepsilon>0$ donné, on peut trouver un polynôme trigonométrique P tel que $\|f-P\|_2<\varepsilon$.

Preuve du Fait. En considérant séparement partie réelle et partie imaginaire, on se ramène au cas d'une fonction $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$ à valeurs réelles. Dans la suite, on fixe $\varepsilon>0$.

Étape 1. On peut trouver une fonction $\varphi\in\mathcal{R}_{2\pi}$ *en escalier sur* $[-\pi,\pi]$ telle que $\|\varphi-f\|_2<\varepsilon/3$.

Démonstration. Soit $\eta > 0$. Comme $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on peut trouver deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[-\pi, \pi]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_{-\pi}^{\pi}(\psi - \varphi) \leqslant \eta$. De plus, on peut supposer que $\varphi(-\pi) = f(-\pi)$ et $\varphi(\pi) = f(\pi)$, donc $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, ce qui permet de prolonger φ en une fonction 2π-périodique. On peut également supposer que $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\varphi - f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \varphi(t)| \, dt \\
&\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \, \eta \qquad \text{car } |f - \varphi| \leqslant \psi - \varphi.
\end{aligned}$$

Donc $\|\varphi - f\|_2 \leqslant C\sqrt{\eta}$ où $C = \sqrt{\|f\|_\infty/\pi}$; et donc, en choisissant η assez petit :

$$\|\varphi - f\|_2 < \varepsilon/3.$$

$\square$

ÉTAPE 2. On peut trouver une fonction h *continue* et 2π-périodique (*i.e.* $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$) telle que $\|h - \varphi\|_2 < \varepsilon/3$.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[-\pi, \pi]$ adaptée à φ :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_j \quad \text{sur }]s_j, s_{j+1}[\qquad \text{pour } j = 0, \dots, N-1.$$

Soit également $\eta > 0$ très petit, et soit $h_\eta : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie comme suit : $h_\eta(t) := \varphi(t)$ sur $[s_j + \eta, s_{j+1} - \eta]$ pour $j = 0, \dots, N-1$ et pour $t = 0$ et $t = 2\pi$; et h_η est affine sur les intervalles restant (faire un dessin). Comme h_η est continue sur $[-\pi, \pi]$ et $h_\eta(0) = \varphi(0) = \varphi(2\pi) = h_\eta(2\pi)$, on peut prolonger h en une fonction continue 2π-périodique, encore notée h_η ; et on a $\|h_\eta\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty$, quelle que soit la valeur de η (exo). Comme $h_\eta = \varphi$ sur chaque $[s_j - \eta, s_j + \eta]$, on a

$$\begin{aligned}
2\pi \, \|h_\eta - \varphi\|_2^2 &= \int_{s_0}^{s_N} |h_\eta - \varphi|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{s_j}^{s_j+\eta} + \int_{s_{j+1}-\eta}^{s_{j+1}} \right) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \left(4\|\varphi\|_\infty^2 \eta + 4\|\varphi\|_\infty^2 \eta \right) \\
&= C\eta \qquad \text{où } C = 8N\|\varphi\|_\infty^2 \text{ ne dépend pas de } \eta.
\end{aligned}$$

Donc, si on choisit η assez petit, on aura

$$\|h_\eta - \varphi\|_2 < \varepsilon/3.$$

$\square$

ÉTAPE 3. Conclusion.

Soient φ et h les fonctions données par les Faits 1 et 2. On a

$$\|h - f\|_2 \leqslant \|h - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.$$

De plus, comme $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on peut appliquer le Théorème 2.1 pour trouver un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|P-h\|_\infty < \varepsilon/3 \quad , \quad \text{et donc} \quad \|P-h\|_2 < \varepsilon/3.$$

Alors

$$\|P-f\|_2 \leqslant \|P-h\|_2 + \|h-f\|_2 < \varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration du Fait. □

Il est maintenant facile de terminer la preuve du Théorème de Parseval. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, et soit $\varepsilon > 0$ quelconque : on cherche N tel que $\|S_nf - f\|_2 < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Par le Fait, on peut trouver un polynôme trigonométrique P tel que $\|f-P\|_2 < \varepsilon$. Alors $P \in \mathcal{P}_N$ pour un certain entier N, et on a donc $P \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \geqslant N$. Comme S_nf est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$, on en déduit

$$\|S_nf - f\|_2 \leqslant \|P-f\|_2 < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

□

Corollaire 3.10. *Pour toute $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on a la **formule de Parseval***

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi}.$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, $\|S_nf\|_2 \to \|f\|_2$ quand $n \to \infty$ (exo). Donc

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_nf\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

□

Corollaire 3.11. *Les coefficients de Fourier "déterminent la fonction" au sens suivant : si $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ vérifient $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\|f-g\|_2 = 0$; et donc $f = g$ si f et g sont de plus* continues.

Démonstration. La fonction $u := f - g$ vérifie $c_k(u) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $\|u\|_2 = 0$ par la formule de Parseval. Si f et g sont de plus continues, alors $u = 0$ d'après l'Exercice 5.4. □

Corollaire 3.12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction* continue *2π-périodique. Si la suite (S_nf) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors elle converge nécessairement vers f.*

Démonstration. Supposons que la suite (S_nf) converge uniformément vers une fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Alors $S_nf \to \widetilde{f}$ en norme L^2 car $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_\infty$. Mais par le Théorème de Parseval, on sait aussi que $S_nf \to f$ en norme L^2. Donc $\|f - \widetilde{f}\|_2 = 0$ par l'Exercice 5.5 ; et donc $\widetilde{f} = f$ d'après l'Exercice 5.4 car la fonction $u := \widetilde{f} - f$ est continue (f est continue par hypothèse, et $\widetilde{f}$ est continue par convergence uniforme de la suite (S_nf)).

On peut aussi raisonner comme suit : comme la série $\sum c_k(f)e^{ikt}$ converge uniformément vers $\widetilde{f}$, on a $c_k(\widetilde{f}) = c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ d'après le Lemme 1.9 ; donc $\widetilde{f} = f$ car f et $\widetilde{f}$ sont toutes les deux continues (Corollaire 2.12 ou Corollaire 3.11). □

Corollaire 3.13. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = t \qquad \text{pour} \qquad -\pi \leqslant t < \pi.$$

La fonction f est continue sur $[-\pi, \pi[$ et bornée sur $[-\pi, \pi]$, donc elle est intégrable au sens de Riemann sur $[-\pi, \pi]$; et par conséquent $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$.

On a $c_0(f) = \int_{-\pi}^{\pi} t \, \frac{dt}{2\pi} = 0$ car f est impaire sur $]-\pi, \pi[$. Pour $k \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt} \, \frac{dt}{2\pi} \\ &= \left[t \times \frac{-1}{ik} e^{ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt \\ &= 2 \times \frac{(-1)^{k+1}\pi}{ik}; \end{aligned}$$

donc $c_k(f) = \frac{(-1)^{k+1}}{ik}$ et $|c_k(f)|^2 = \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \neq 0$.

Par la formule de Parseval, on a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, \frac{dt}{2\pi},$$

autrement dit

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \times \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times 2 \, \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

□

4. Convergence normale

RAPPEL. Si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{Z}$, on pose

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k,$$

et on dit que la série $\sum \alpha_k$ est convergente si on a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k < \infty$.

DÉFINITION 4.1. *Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de fonctions indexée par $\mathbb{Z}$, avec $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que* ***la série $\sum f_k$ converge normalement sur*** *$\mathbb{R}$ s'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que*

$$|f_k(t)| \leqslant \alpha_k \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \textit{la série } \textstyle\sum \alpha_k \textit{ est convergente.}$$

Remarque 1. Si la série $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles symétriques $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie que (S_n) satisfait au critère de Cauchy uniforme (exo).

□

Remarque 2. Une série de la forme $\sum c_k e^{ikt}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série $\sum |c_k|$ est convergente.

Démonstration. C'est évident. □

Définition 4.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est* ***de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux*** *sur un intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ s'il existe une subdivision $(s_0, \dots, s_N)$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]s_j, s_{j+1}[$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$ et f' admet une limite à droite en s_j et une limite à gauche en s_{j+1}. (Faire un dessin).*

Remarque. La fonction f n'est pas forcément *continue* sur $[a,b]$. Mais si elle l'est, et si $(s_0, \dots, s_N)$ est comme dans la définition, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle fermé $[s_j, s_{j+1}]$.

Le résultat suivant s'appelle parfois le **Théorème de Dirichlet**. On pourrait aussi l'appeler le “Théorème de convergence normale pour les séries de Fourier”.

Théorème 4.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Si f est* continue sur $\mathbb{R}$ *et* de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, *alors la série de Fourier de f converge normalement vers f. Autrement dit, on peut écrire*

$$\forall t \in \mathbb{R} \;:\; f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on posera $f'(t) = \cdots f'(t)$ en tout point t où f est dérivable, et $f'(t) = 0$ en tout point t où f n'est pas dérivable.

Fait 0. La fonction f' appartient à $\mathcal{R}_{2\pi}$.

Preuve du Fait 0. Comme f' est clairement 2π-périodique, il suffit de montrer qu'elle est intégrable au sens de Riemann sur $[-\pi, \pi]$. Soit $(s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[-\pi, \pi]$ témoignant que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors f' est continue sur chaque $]s_j, s_{j+1}[$, et admet une limite à droite en s_j et une limite à gauche en s_{j+1} ; donc f' est *continue par morceaux* sur $[-\pi, \pi]$, et donc intégrable au sens de Riemann sur $[-\pi, \pi]$. □

Fait 1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $c_k(f') = ikc_k(f)$.

Preuve du Fait 1. Comme f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut trouver une subdivision $(s_0, \dots, s_N)$ de $[-\pi, \pi]$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[s_j, s_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$. Alors

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f'(t) e^{-ikt} dt.$$

De plus comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[s_j, s_{j+1}]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} f'(t) e^{-ikt} dt = \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{s_j}^{s_{j+1}} + \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) \times ike^{-ikt} dt.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{s_j}^{s_{j+1}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) \times ike^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times ike^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

De plus $\left[f(t)e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ car $f(\pi) = f(-\pi)$; donc

$$c_k(f') = ik \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = ik\, c_k(f).$$

□

Remarque. Il est important de se souvenir que si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$, alors on peut exprimer $c_k(f)$ en fonction de $c_k(f')$ pour $k \neq 0$ en faisant une intégration par parties.

Fait 2. La série $\sum c_k(f)e^{ikt}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Preuve du Fait 2. Par le Fait 1, on a $c_k(f) = \frac{1}{ik}\, c_k(f')$ pour tout $k \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} |c_k(f)| &= \frac{1}{|k|}\, |c_k(f')| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2} + |c_k(f')|^2\Big) \qquad \text{(exo)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &\leqslant |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} |c_k(f')|^2 \\ &< \infty \qquad \text{par l'inégalité de Bessel pour } f'. \end{aligned}$$

□

Remarque. De cette preuve, il importe retenir la chose suivante : si (a_k) et (b_k) sont deux suites de nombres complexes telle que les séries $\sum |a_k|^2$ et $\sum |b_k|^2$ sont convergentes, alors la série $\sum a_k b_k$ est absolument convergente (en raison par exemple de l'inégalité $|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$). On peut écrire cela comme suit : "$\ell^2 \cdot \ell^2 \subseteq \ell^1$".

Fait 3. On a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt} = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve du Fait 3. Posons $\widetilde{f}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt}$. Comme la convergence normale entraine la convergence uniforme, la suite $(S_n f)$ tend vers $\widetilde{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}$; et donc $\widetilde{f} = f$ d'après le Corollaire 3.12 puisque f est supposée continue. (Si on préfère, on peut aussi appliquer le Corollaire 2.13.)

□

Par les Faits 2 et 3, la preuve du théorème est maintenant terminée. □

Illustration. Retour sur les fonctions holomorphes.

Soit $R > 0$, et soit $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, *i.e.* f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et f' est continue sur $D(0,R)$. On va utiliser le Théorème 4.3 pour montrer que f est développable en série entière dans le disque $D(0,R)$.

Pour $0 \leqslant r < R$, soit $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f_r(t) = f(re^{it}).$$

Comme f est holomorphe sur $D(0,R)$, toutes les fonctions f_r sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; donc on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f_r) e^{ikt}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < R$, posons $\varphi_k(r) = c_k(f_r)$; autrement dit,

$$\varphi_k(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Comme f est holomorphe sur $D(0,R)$, on voit en utilisant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que chaque fonction φ_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,R[$, avec

$$\varphi_k'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(re^{it})e^{it}\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Par ailleurs, si $r > 0$ alors

$$f'(re^{it})e^{it} = \frac{1}{ir}\frac{d}{dt}\Big[f(re^{it})\Big].$$

En intégrant par parties, on en déduit

$$\varphi_k'(r) = \left[\frac{1}{2\pi ir} f(re^{it})e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{r}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\, e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi},$$

autrement dit

$$\varphi_k'(r) = \frac{k}{r}\,\varphi_k(r).$$

Il s'agit d'une très belle équation différentielle linéaire d'ordre 1 : on en déduit qu'il existe une constante c_k telle que

$$\varphi_k(r) = c_k r^k \qquad \text{pour } 0 < r < R.$$

Comme φ_k est de plus continue en 0, cela force $c_k = 0$ pour $k < 0$, puisque $r^k \to \infty$ quand $r \to 0^+$. Ainsi, $\varphi_k(r) \equiv 0$ si $k < 0$. En résumé :

$$c_k(f_r) = 0 \quad \text{si } k < 0 \qquad \text{et} \qquad c_k(r) = c_k r^r \quad \text{si } k \geqslant 0.$$

En revenant à $(*)$, on voit donc que si $z \in D(0,R)$ et si on écrit $z = re^{it}$ avec $0 \leqslant r < R$, alors

$$f(z) = f(re^{it}) = f_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^r\, e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Donc f est DSE dans le disque $D(0,R)$.

Remarque 4.4. Dans la preuve du Théorème 4.3, on a montré que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$, alors $c_k(f) = \frac{1}{ik}\, c_k(f')$ pour tout $k \neq 0$. On en déduit que si f est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geqslant 1$, alors $c_k(f) = \frac{1}{(ik)^r}\, c_k(f^{(r)})$. D'après le Lemme de Riemann-Lebesgue, on en déduit le fait suivant : *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^r$, alors*

$$|c_k(f)| = o\left(\frac{1}{|k|^r}\right) \qquad \textit{quand } |k| \to \infty.$$

Illustration. Sommes de Riemann d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_N(f) := \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(j\,\frac{2\pi}{N}\right).$$

On reconnait une somme de Riemann pour f associée à une subdivision de $[0, 2\pi]$ de "pas" $\frac{2\pi}{N}$" ; donc on peut dire d'emblée que

$$R_N(f) \to \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

On va en fait montrer que

$$\forall \alpha > 0 \;:\; \left| R_N(f) - \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \right| = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \qquad \text{quand } N \to \infty. \tag{4.1}$$

Par le Théorème 4.3, on peut écrire

$$\begin{aligned} R_N(f) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{i\frac{2\pi kj}{N}} \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i\frac{2k\pi}{N}})^j. \end{aligned}$$

De plus, comme $\omega_k := e^{i\frac{2k\pi}{N}}$ vérifie $\omega_k^N = 1$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (exo) :

$$\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i\frac{2k\pi}{N}})^j = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ n'est pas multiple de } N, \\ N & \text{si } k \text{ est multiple de } N. \end{cases}$$

Donc on obtient

$$R_N(f) = 2\pi \sum_{k \in N\mathbb{Z}} c_k(f).$$

Comme de plus $2\pi c_0(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$, cela peut encore s'écrire

$$R_N(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{l=1}^{\infty} \big(c_{Nl}(f) + c_{-Nl}(f)\big)$$

On a donc en particulier

$$\left| R_N(f) - \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \big(|c_{Nl}(f)| + |c_{-Nl}(f)|\big).$$

Mais comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on sait par la Remarque 4.4 que $|c_k(f)| = o(1/|k|^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$ quand $|k| \to \infty$. De là, on déduit facilement (4.1). Écrire les détails constitue un bon exo de compréhension.

5. Convergence ponctuelle

DÉFINITION 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est* ***régulière au point*** x_0 *si*

- *f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 ;*
- *la fonction f_+ définie par $f_+(x) = f(x)$ pour $t > x_0$ et $f_+(x_0) = f(x_0^+)$ est dérivable à droite en x_0,*

- *la fonction f_- définie par $f_-(x) = f(x)$ pour $t < x_0$ et $f_-(x_0) = f(x_0^-)$ est dérivable à gauche en x_0.*

Exemple. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux au voisinage de x_0, *i.e.* $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < x_0 < b$, alors f est régulière au point x_0.

Le résultat suivant est parfois appelé le **Théorème de Jordan-Dirichlet**. On pourrait aussi l'appeler le "Théorème de convergence ponctuelle" (pour les séries de Fourier).

Théorème 5.2. *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est régulière au point x_0, alors*

$$S_n f(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2};$$

autrement dit, on peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

En particulier, si f est continue en x_0 *et $\mathcal{C}^1$ par morceaux au voisinage de x_0, alors*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx_0} = f(x_0).$$

Démonstration.

Fait 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n f(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \int_0^\pi D_n(t)\phi(t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

où D_n est le noyau de Dirichlet et

$$\phi(t) := \big(f(x_0+t) - f(x_0^+)\big) + \big(f(x_0-t) - f(x_0^-)\big).$$

Preuve du Fait 1. On sait par le Lemme 2.8 que

$$S_n f(x_0) = f * D_n(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

De plus, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(t)$ est visiblement une fonction *paire*. Donc

$$\int_{-\pi}^{0} f(x_0-t) D_n(t)\,dt = \int_0^\pi f(x_0+t) D_n(t)\,dt;$$

et par conséquent

$$S_n f(x_0) = \int_0^\pi \big(f(x_0-t) + f(x_0+t)\big)\, D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}. \tag{5.1}$$

Par ailleurs, comme D_n est paire et $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = 1$, on a

$$\int_0^\pi D_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Donc on peut écrire $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = (f(x_0^+) + f(x_0^-) \times \int_0^\pi D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}$, ou encore

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \int_0^\pi \big(f(x_0^+) + f(x_0^-)\big)\, D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}. \tag{5.2}$$

En combinant (5.1) et (5.2), on obtient l'identité cherchée. □

Fait 2. La fonction $h : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(0) := 0 \qquad \text{et} \qquad h(t) := \frac{\phi(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \quad \text{pour } 0 < t \leqslant \pi$$

est intégrable au sens de Riemann sur $[0,\pi]$.

Preuve du Fait 2. Montrons d'abord que h est *bornée* sur $[0,\pi]$. Comme f est régulière en x_0, on sait que $\frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$ admet une limite quand $x \to x_0^+$ et que $\frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$ admet une limite quand $x \to x_0^-$. En particulier, on peut trouver $\delta > 0$ tel que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$ est bornée sur $]x_0, x_0+\delta]$ et la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$ est bornée sur $[x_0-\delta, x_0[$. Il existe donc une constante C telle que $|f(x_0+t) - f_+(x_0)| \leqslant Ct$ et $|f(x_0-t) - f_-(x_0)| \leqslant C\,t$ pour $0 < t \leqslant \delta$. On obtient ainsi

$$|\phi(t)| \leqslant C\,t + C\,t = 2C\,t \qquad \text{pour } 0 < t \leqslant \delta.$$

Par ailleurs, on a également $\sin(\frac{t}{2}) \geqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$ sur $[0,\pi]$ car $\sin(u) \geqslant \frac{2}{\pi}u$ sur $[0,\pi/2]$. Donc on obtient

$$|h(t)| \leqslant 2Ct \times \frac{\pi}{t} = 2\pi C \qquad \text{pour } 0 < t \leqslant \delta.$$

Ainsi, h est bornée sur $]0,\delta]$, et donc bornée sur $[0,\delta]$. Comme h est également bornée sur $[\delta,\pi]$ (car f est bornée et la fonction $t \mapsto 1/\sin(\frac{t}{2})$ est continue sur $[\delta,\pi]$), on en déduit que h est bornée sur $]0,\pi]$, et donc aussi sur $[0,\pi]$.

On sait maintenant que h est bornée sur $[0,\pi]$. Par ailleurs, h est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle $[\eta,\pi]$ avec $0 < \eta \leqslant \pi$ (car ϕ et la fonction continue $t \mapsto 1/\sin(\frac{t}{2})$ le sont). Comme on le sait (ou pas, auquel cas il faut faire l'exo), ces deux propriétés entrainent que h est intégrable au sens de Riemann sur $[0,\pi]$. □

On peut maintenant démontrer le théorème. Par le Fait 1 et comme

$$D_n(t)\phi(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin(\frac{t}{2})}\,\phi(t) = \sin\Big((2n+1)\frac{t}{2}\Big)\,h(t) \quad \text{si } 0 < t \leqslant \pi,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_nf(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \int_0^\pi \sin\Big((2n+1)\frac{t}{2}\Big)\,h(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big((2n+1)u\big)\,h(2u)\,\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

De plus, par le Fait 2 la fonction 2π-périodique $\widetilde{h}$ définie par $\widetilde{h}(u) = h(2u)$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\widetilde{h}(u) = 0$ sur $]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ *appartient à* $\mathcal{R}_{2\pi}$; et comme

$$\sin\big((2n+1)u\big) = \frac{e^{i(2n+1)u} - e^{-i(2n+1)u}}{2i},$$

on voit que

$$S_nf(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}=-\frac{1}{2i}\big(c_{2n+1}(\widetilde{h})-c_{-(2n+1)}(\widetilde{h})\big).$$

Par le *Lemme de Riemann-Lebesgue*, on en déduit que $S_nf(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ tend vers 0 quand $n\to\infty$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 5.3. Soit $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$. Si la série de Fourier de f converge en un certain point $x\in\mathbb{R}$ (autrement dit, si $S_nf(x)$ admet une limite quand $n\to\infty$), alors on a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}=c_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\Big),$$

où les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont donnés par les formules

$$a_k(f):=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\,dt\qquad\text{et}\qquad b_k(f):=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)\,dt.$$

(On dit que les $a_k(f)$ et les $b_k(f)$ sont les **coefficients de Fourier réels** de la fonction f.) En particulier : si la fonction f est paire sur $]-\pi,\pi[$, alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}=c_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos(kx);$$

et si f est impaire sur $]-\pi,\pi[$, alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(f)\sin(kx).$$

Démonstration. Pour alléger les notations, écrivons c_k au lieu de $c_k(f)$. Pour tout entier $N\geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikx}&=\sum_{k=-N}^{N}c_k\left(\cos(kx)+i\sin(kx)\right)\\&=c_0+\sum_{k=1}^{N}(c_k+c_{-k})\cos(kx)+i\sum_{k=1}^{N}(c_k-c_{-k})\sin(kx).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a aussi

$$c_k+c_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ikt}+e^{ikt})f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\,dt=a_k(f);$$

et de même

$$c_k-c_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ikt}-e^{ikt})f(t)\,dt=-\frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)\,dt=-i\,b_k(f).$$

On obtient ainsi

$$\sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikx}=c_0(f)+\sum_{k=1}^{N}\Big(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\Big)\quad\text{pour tout }N\geqslant 1;$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5.4. *Soient $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et g coïncident au voisinage de x_0, alors $S_n f(x_0)$ admet une limite quand $n \to \infty$ si et seulement si $S_n g(x_0)$ en admet une, et dans ce cas $\lim S_n f(x_0) = \lim S_n g(x_0)$. (Ce résultat porte le nom de **principe de localisation**.)*

Démonstration. La fonction $\phi := g - f$ est identiquement nulle au voisinage de x_0, donc certainement régulière au point x_0 avec $\phi(x_0^-) = 0 = \phi(x_0^+)$. Donc $S_n\phi(x_0) \to 0$ quand $n \to \infty$, autrement dit $S_n g(x_0) - S_n f(x_0) \to 0$. Le résultat s'en déduit immédiatement. □

Corollaire 5.5. *On a les formules suivantes :*

$$\forall t \in\,]-\pi, \pi[\; : \; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{t}{2},$$

et

$$\forall x \in\,]0, 2\pi[\; : \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(t) = t \qquad \text{pour } t \in [-\pi, \pi[\,.$$

La fonction f est visiblement régulière en tout point (mais pas continue), et continue sur $]-\pi, \pi[$. De plus, f est *impaire* sur $]-\pi, \pi[$. D'après le Théorème 5.2 et la Remarque 5.3, on a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin(kt) = t \qquad \text{pour tout } t \in\,]-\pi, \pi[.$$

Le calcul des coefficients $b_k(f)$ est facile en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt)\, dt &= \left[-\frac{1}{k\pi}\, t \cos(kt) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\, dt \\ &= 2 \times \frac{(-1)^{k-1}}{k} + 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{t}{2} \qquad \text{pour } t \in\,]-\pi, \pi[.$$

Si maintenant on prend $x \in\,]0, 2\pi[$ et $t := \pi - x$, alors $\sin(kt) = (-1)^{k+1} \sin(kx)$ pour tout $k \geqslant 1$; et comme $t \in\,]-\pi, \pi[$, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{pour } x \in\,]0, 2\pi[.$$

□

Corollaire 5.6. *Pour tout $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, on a*

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2}.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(t) = e^{iat} \qquad \text{pour } t \in [0, 2\pi[\,.$$

La fonction f est régulière au point $x_0 = 0$, avec $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = f(2\pi^-) = e^{2i\pi a}$. Donc on peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) = \frac{1 + e^{2i\pi a}}{2} = e^{i\pi a} \cos(\pi a). \tag{5.3}$$

Par ailleurs, les $c_k(f)$ sont faciles à calculer : comme $a \notin \mathbb{Z}$, on a

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iat} e^{-ikt} dt = \left[\frac{1}{i(a-k)} e^{i(a-k)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2i\pi(a-k)} \big(e^{2i\pi a} - 1\big);$$

et comme $e^{2i\pi a} - 1 = e^{i\pi a}\big(e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}\big) = e^{i\pi a} \times 2i \sin(\pi a)$, cela peut encore s'écrire

$$c_k(f) = \frac{e^{i\pi a} \sin(\pi a)}{\pi(a-k)}.$$

On a donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \frac{e^{i\pi a} \sin(\pi a)}{\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k} \Big) \right] \\ &= \frac{e^{i\pi a} \sin(\pi a)}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2a}{a^2 - k^2} \right). \end{aligned}$$

En revenant à (5.3), on obtient ainsi

$$\frac{e^{i\pi a} \sin(\pi a)}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2} \right) = e^{i\pi a} \cos(\pi a);$$

d'où la formule souhaitée :

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2} = \pi \operatorname{cotan}(\pi a).$$

$\square$