

Théorie de l'intégration
Licence de Mathématiques

Table des matières

Chapitre 1. “Rappels”	5
1. Dénombrabilité	5
2. La “droite numérique achevée”	6
3. Somme d’une famille de nombres positifs	8
4. Notations et terminologie “ensemblistes”	12
Chapitre 2. Tribus et mesures	15
1. Définitions	15
2. Propriétés élémentaires des mesures	18
3. Ensembles boréliens	20
4. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	24
5. Ensembles négligeables ; propriétés vraies presque partout	29
Chapitre 3. Applications mesurables	33
1. Définition et critères de mesurabilité	33
2. Propriétés de stabilité	36
3. Fonctions étagées	38
Chapitre 4. Intégration “abstraite”	41
1. Intégrale des fonctions étagées	41
2. Intégrale des fonctions mesurables positives	44
3. Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes	50
4. Exemples concrets	55
Chapitre 5. Intégration sur un intervalle de $\mathbb{R}$	61
1. Cadre et notations	61
2. Choses à ne surtout pas oublier	61
3. Passage à la limite dans les bornes d’intégration	62
4. Critères d’intégrabilité	64
5. Intégrales “généralisées”	65
6. Comparaison série-intégrale	68
7. Une formule de changement de variable “générale”	70
Chapitre 6. Théorèmes de convergence et applications	73
1. Les deux résultats principaux	73
2. Fonctions définies par des intégrales	78
3. Deux exemples d’utilisation des théorèmes	81
Chapitre 7. Intégration dans $\mathbb{R}^d$	85
1. Cadre et notations	85
2. Coupes et volumes	85
3. Intégrales itérées ; Théorème de Fubini	88

4. Changements de variables	93
Chapitre 8. Espaces L^p	107
1. Semi-normes $\ \cdot\ _p$ et espaces $\mathcal{L}^p$	107
2. Les espaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$	111
3. L'inégalité de Hölder	115
4. Résultats de densité	118
Chapitre 9. Produit de convolution	121
1. Définition et exemples	121
2. Propriété "régularisante"	124
3. Approximation par convolution	125
4. Transformation de Fourier	128
Chapitre 10. Classes monotones et applications	133
1. Théorème des classes monotones	133
2. Application 1 : unicité des mesures	134
3. Application 2 : un lemme de mesurabilité	135
Chapitre 11. Construction de mesures	137
1. Un théorème général	137
2. La mesure de Lebesgue	138
3. Mesures produits et Théorème de Fubini "général"	140
Chapitre 12. Régularité	145

Chapitre 1

“Rappels”

1. Dénombrabilité

DÉFINITION 1.1. Un ensemble D est dit **dénombrable** si ou bien $D = \emptyset$, ou bien on peut énumérer les éléments de D comme les termes d'une suite, i.e. écrire $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 0. Par définition, $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exemple 1. Tout ensemble *fini* est dénombrable : si $D = \{a_1, \dots, a_N\}$, on peut écrire $D = \{a_1, \dots, a_N, a_N, a_N, \dots\}$.

Exemple 2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable car $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

Remarque 1. Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Démonstration. Soit D un ensemble dénombrable, $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, et soit $D' \subseteq D$. Si $D' \neq \emptyset$, fixons $a \in D'$. Alors $D' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \dots\}$, où $x'_i = x_i$ si $x_i \in D'$ et $x'_i = a$ si $x_i \notin D'$. $\square$

Remarque 2. Si on peut écrire $D = \{x_i; i \in I\}$ avec un ensemble d'indices I dénombrable, alors D est dénombrable.

Démonstration. On écrit $I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$. Alors $D = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, où $a_k = x_{i_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\square$

PROPOSITION 1.2. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. On fait un dessin, qui permet de voir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ où $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (2, 0)$, $x_4 = (1, 1)$, $x_5 = (0, 2)$, $x_6 = (0, 3)$, $x_7 = (1, 2)$, etc. $\square$

COROLLAIRE 1.3. Si $D_1, \dots, D_N$ sont dénombrables, alors $D_1 \times \dots \times D_N$ est dénombrable.

Démonstration. La proposition donne le résultat pour $N = 2$ car $D_1 \times D_2$ est énuméré par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; et le résultat pour N quelconque s'en déduit par récurrence. $\square$

COROLLAIRE 1.4. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration. Énuméré par $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. $\square$

COROLLAIRE 1.5. Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables indexée par un ensemble I lui même dénombrable, alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, on choisit une énumération de A_i par $\mathbb{N}$, disons $A_i = \{x_{i,n}; n \in \mathbb{N}\}$. Alors $A = \{x_{i,n}; (i,n) \in I \times \mathbb{N}\}$, donc A est dénombrable car $I \times \mathbb{N}$ l'est. $\square$

Exemple 3. L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites infinies de 0 et de 1 n'est pas dénombrable.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. On écrit $x_n = (x_n(0), x_n(1), \dots)$ et on définit $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par $x(i) = 1 - x_i(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors $x(i) \neq x_i(i)$ donc $x \neq x_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$; ce qui est absurde puisque tout élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est censé être un x_i . $\square$

Remarque. La méthode employée dans la preuve de ce dernier exemple s'appelle la **méthode de la diagonale**.

Exemple 4. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. Soit E l'ensemble des nombres $x \in [0,1]$ dont le développement décimal ne comporte que des 0 ou des 1. L'ensemble E est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Donc E n'est pas dénombrable par l'Exemple 3; et donc $\mathbb{R}$ non plus. $\square$

2. La "droite numérique achevée"

Par définition, la droite numérique achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu en rajoutant à $\mathbb{R}$ deux points notés ∞ et $-\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

2.1. Extension à $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ordre de $\mathbb{R}$. On étend l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décrétant qu'on a

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Intérêt : tout ensemble non vide $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Pour un ensemble (non vide) $A \subseteq \mathbb{R}$, on a $\sup A < \infty$ si et seulement si A est majoré, et $\inf A > -\infty$ si et seulement si A est minoré.

Intervalles : si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on pose

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\},$$

et de même pour tous les autres types d'intervalles. En particulier,

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty].$$

Exercice. Soit $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que I est un intervalle si et seulement si la propriété suivante a lieu : pour tous $u, v \in I$ vérifiant $u < v$, on a $]u, v[\subseteq I$.

2.2. Convergence des suites. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si

- ou bien $x_n \in \mathbb{R}$ à partir d'un certain rang et (x_n) converge dans $\mathbb{R}$ au sens usuel ;
- ou bien $x_n \rightarrow \infty$, ce qui s'écrit $\forall A \in]0, \infty[\exists N \forall n \geq N : x_n > A$;
- ou bien $x_n \rightarrow -\infty$, ce qui s'écrit $\forall A \in]0, \infty[\exists N \forall n \geq N : x_n < -A$.

Exercice. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ et soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $x_n \rightarrow l$ si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \text{ tels que } \alpha < l < \beta \quad \text{on a} \quad \alpha < x_n < \beta \text{ à partir d'un certain rang.}$$

THÉOREME 2.1. *Toute suite croissante $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers sa borne supérieure, et toute suite décroissante converge vers sa borne inférieure.*

Démonstration. **Exo.** □

Remarque. Comme pour les suites de nombres réels, les inégalités *larges* se conservent à la limite : si $x_n \rightarrow l$ et si $x_n \leq \beta$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq \beta$; et de même, si $x_n \rightarrow l$ et si $x_n \geq \alpha$ à partir d'un certain rang, alors $l \geq \alpha$.

THÉOREME 2.2. *Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite quelconque d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors ou bien (x_n) admet une sous-suite qui tend vers ∞ , ou bien (x_n) admet une sous-suite qui tend vers $-\infty$, ou bien $x_n \in \mathbb{R}$ à partir d'un certain rang n_0 et la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est bornée, auquel cas (x_n) possède une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans tous les cas, (x_n) admet une sous-suite qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. □

2.3. Limites supérieures et limites inférieures. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, on note $\overline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} x_n$ les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ définis par

$$\overline{\lim} x_n := \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} x_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim} x_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} x_n.$$

On dit que $\overline{\lim} x_n$ est la **limite supérieure** de la suite (x_n) , et que $\underline{\lim} x_n$ est sa **limite inférieure**.

Remarque 1. Supposons que $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Alors $\overline{\lim} x_n < \infty$ si et seulement si (x_n) est *majorée* par un nombre réel, et $\underline{\lim} x_n > -\infty$ si et seulement si (x_n) est *minorée*. Donc $\overline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} x_n$ appartiennent tous les deux à $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (x_n) est *bornée*.

Remarque 2. On a toujours $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$.

Démonstration. Si on pose $L_m := \sup_{n \geq m} x_n$ et $l_m := \inf_{n \geq m} x_n$, alors L_m décroît vers $\overline{\lim} x_n$ et l_m croît vers $\underline{\lim} x_n$. D'où le résultat puisque $l_m \leq L_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. □

DÉFINITION 2.3. *Soit (x_n) une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, et soit $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que ξ est une **valeur d'adhérence** de (x_n) s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que $x_{n_k} \rightarrow \xi$.*

Exercice 1. Montrer que ξ est une valeur d'adhérence si et seulement si : pour tous $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \xi < \beta$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\alpha < x_n < \beta$.

Exercice 2. Montrer qu'une suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle possède exactement une valeur d'adhérence.

LEMME 2.4. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\overline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} x_n$ sont des valeurs d'adhérence de (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément, L est la plus grande valeur d'adhérence de (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $\underline{\lim} x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Montrons que $L := \overline{\lim} x_n$ est une valeur d'adhérence de (x_n) . Par l'Exo 1, il suffit de montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < L < \beta$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\alpha < x_n < \beta$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $L_m := \sup_{n \geq m} x_n$. Alors $L_m \rightarrow L$ par définition de L . Comme $\alpha < L < \beta$, on peut donc trouver m_0 tel que $\forall m \geq m_0 : \alpha < L_m < \beta$. Alors, par définition des L_m , on voit d'une part que $L_n < \beta$ pour tout $n \geq m_0$; et d'autre part que pour tout $m \geq m_0$, on peut trouver $n \geq m$ tel que $\alpha < L_n$. En particulier, on peut trouver une infinité de n tels que $\alpha < L_n < \beta$.

Montrons maintenant que L est la plus grande valeur d'adhérence de (x_n) . Soit ξ une valeur d'adhérence quelconque de (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$, et soit (n_k) une suite strictement croissante d'entiers telle que $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé, alors $n_k \geq m$ pour k assez grand, et donc $x_{n_k} \leq L_m = \sup_{n \geq m} x_n$. En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $\xi \leq L_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et donc $\xi \leq \inf_m L_m = L$.

On montre de même que $l := \underline{\lim} x_n$ est une valeur d'adhérence de (x_n) , et que c'est la plus petite. $\square$

COROLLAIRE 2.5. Une suite $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$.

Démonstration. Par le lemme, dire que $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ signifie que (x_n) possède exactement une valeur d'adhérence; d'où le résultat par l'Exo 2. $\square$

Exercice. Démontrer le Corollaire 2.5 directement, en utilisant uniquement la définition de $\overline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} x_n$.

2.4. Extension des opérations de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. Pour l'addition, on convient que :

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty & \text{si } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ a + (-\infty) &= -\infty = -\infty + a & \text{si } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \end{aligned}$$

De plus :

$$\infty + (-\infty) \quad \text{et} \quad -\infty + \infty \quad \text{ne sont pas définis}.$$

Pour la multiplication, on convient que

$$\begin{aligned} a \times \infty &= \infty = \infty \times a & \text{et} & \quad a \times (-\infty) = -\infty = (-\infty) \times a & \text{si } a > 0, \\ a \times \infty &= -\infty = \infty \times a & \text{et} & \quad a \times (-\infty) = \infty = (-\infty) \times a & \text{si } a < 0. \end{aligned}$$

De plus, on convient que

$$0 \times \infty = 0 = \infty \times 0.$$

Exercice 1. Montrer que l'addition est "continue" sur $[0, \infty] \times [0, \infty]$, mais que la multiplication n'est *pas* continue.

Exercice 2. Montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim} x_n.$$

3. Somme d'une famille de nombres positifs

CONVENTION. On appellera **nombre positif** tout élément de $[0, \infty]$.

3.1. Somme d'une série. Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs, on pose

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i.$$

Remarque 1. Ça a un sens car les sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$ forment une suite croissante de nombres ≥ 0 , donc admettent une limite dans $[0, \infty]$.

Remarque 2. Si les x_i sont des nombres réels positifs, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i < \infty \iff \text{la série } \sum x_i \text{ converge au sens usuel.}$$

3.2. Somme d'une famille quelconque. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres positifs indexée par un ensemble $I \neq \emptyset$ quelconque, on pose

$$\sum_{i \in I} x_i := \sup \left\{ \sum_{i \in F} x_i; F \subseteq I, F \text{ fini} \right\}.$$

Remarque. C'est bien défini dans $[0, \infty]$.

EXEMPLE. Si $I = \mathbb{N}$, alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i$.

Démonstration. **Exo.** □

Exercice 1. Montrer que si $\sigma : I \rightarrow I$ est une *permutation* de I , i.e. une bijection de I sur I , alors $\sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} x_i$.

Exercice 2. Montrer que si A et B sont deux parties de I telles que $A \cap B = \emptyset$, alors $\sum_{i \in A \cup B} x_i = \sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i$.

LEMME 3.1. (additivité)

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont deux familles de nombres positifs indexées par le même ensemble I , alors $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.

Démonstration. On a pour tout ensemble fini $F \subseteq I$:

$$\sum_{i \in F} (x_i + y_i) = \sum_{i \in F} x_i + \sum_{i \in F} y_i \leq \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i;$$

d'où $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) \leq \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ en prenant le "sup en F ".

Inversement, si $F, F' \subseteq I$ sont des ensembles finis quelconques, alors

$$\sum_{i \in F} x_i + \sum_{i \in F'} y_i \leq \sum_{i \in F \cup F'} x_i + \sum_{i \in F \cup F'} y_i = \sum_{i \in F \cup F'} (x_i + y_i) \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i);$$

d'où $\sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i)$ par "double passage au sup". □

3.3. Convergence monotone, convergence dominée.

PROPOSITION 3.2. (Théorème de convergence monotone pour les sommes)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives, $f_n : I \rightarrow [0, \infty]$. On suppose que la suite (f_n) est croissante (i.e. $f_n(i) \leq f_{n+1}(i)$ pour tout n et pour tout $i \in I$), et pour $i \in I$ on pose $f(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i)$ (qui existe dans $[0, \infty]$). Alors

$$\sum_{i \in I} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i).$$

Autrement dit : pour une suite croissante de fonctions positives, on a toujours le droit d'écrire

$$\sum_{i \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i).$$

Démonstration. D'abord, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i)$ existe dans $[0, \infty]$ car $u_n := \sum_{i \in I} f_n(i)$ est une suite croissante de nombres positifs.

Comme la suite (f_n) croît vers f , on a $f_n \leq f$ et donc

$$\sum_{i \in I} f_n(i) \leq \sum_{i \in I} f(i) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i) \leq \sum_{i \in I} f(i)$.

Inversement, on a pour tout ensemble fini $F \subseteq I$:

$$\sum_{i \in F} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in F} f_n(i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i);$$

d'où $\sum_{i \in I} f(i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} f_n(i)$ en prenant le sup en F . □

COROLLAIRE 3.3. (intersion série-somme)

Si $(x_{i,k})_{(i,k) \in I \times \mathbb{N}}$ est une famille double de nombres positifs indexée par $I \times \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in I} x_{i,k} \right).$$

Démonstration. On applique la proposition aux fonctions f_n définies par $f_n(i) = \sum_{k=0}^n x_{i,k}$. Les f_n forment une suite croissante de fonctions ≥ 0 , et $f_n(i) \rightarrow f(i) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}$ pour tout $i \in I$. Par la proposition, on a donc

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^n x_{i,k}.$$

De plus, on a par le Lemme 3.1

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=0}^n x_{i,k} = \sum_{k=0}^n \sum_{i \in I} x_{i,k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

d'où le résultat. □

Exercice 1. Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$. Déterminer $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s)$.

Exercice 2. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions positives sur un ensemble I , alors

$$\sum_{i \in I} \underline{\lim} f_n(i) \leq \underline{\lim} \sum_{i \in I} f_n(i).$$

PROPOSITION 3.4. (Théorème de convergence dominée pour les séries)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n(i)$ est *absolument* convergente. Soit également $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- $f_n(i) \rightarrow f(i)$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$;
- il existe une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ telle que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} g(i) < \infty \quad \text{et} \quad \forall n \forall i \in \mathbb{N} : |f_n(i)| \leq g(i).$$

Alors on peut conclure que la série $\sum f(i)$ est absolument convergente, et qu'on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i).$$

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|f(i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(i)| \leq g(i)$; donc la série $\sum f(i)$ est absolument convergente puisque $\sum_{i \in \mathbb{N}} g(i) < \infty$.

Pour montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} f(i)$ quand $n \rightarrow \infty$, on commence par observer que

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) - \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} (f_n(i) - f(i)) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)|.$$

Il suffit donc de montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un N tel que

$$\forall n \geq N : \sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \leq \varepsilon.$$

Comme la série $\sum g(i)$ est convergente, on peut trouver un entier K tel que

$$\sum_{i=K+1}^{\infty} g(i) \leq \varepsilon;$$

et comme $|f_n(i) - f(i)| \leq |f_n(i)| + |f(i)| \leq 2g(i)$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=K+1}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \leq \sum_{i=K+1}^{\infty} 2g(i) \leq 2\varepsilon.$$

Ensuite, comme $f_n(i) \rightarrow f(i)$ pour $i = 0, \dots, K$, on sait que $\sum_{i=0}^K |f_n(i) - f(i)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$; donc on peut trouver N tel que

$$\forall n \geq N : \sum_{i=0}^K |f_n(i) - f(i)| \leq \varepsilon.$$

On voit ainsi que pour tout $n \geq N$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| = \sum_{i=0}^K |f_n(i) - f(i)| + \sum_{i=K+1}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon;$$

ce qui est la conclusion souhaitée si on a pris soin de démarrer le raisonnement avec $\varepsilon/3$ au lieu de ε .

□

COROLLAIRE 3.5. (séries doubles absolument convergentes)
Soit $(x_{i,k})_{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une “suite double” de nombres complexes. Si on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{i,k}| \right) < \infty,$$

alors on a le droit d’écrire

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_{i,k} \right).$$

Démonstration. On applique la proposition avec $f_n(i) = \sum_{k=0}^n x_{i,k}$ et $g(i) := \sum_{k=0}^{\infty} |x_{i,k}|$. **Exo :** Vérifier les détails. $\square$

EXEMPLE 3.6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Par la formule du binôme, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k),$$

où $f_n(k) = \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$ si $k \leq n$ et $f_n(k) = 0$ si $k > n$.

Si $k \in \mathbb{N}$ est fixé, alors

$$\forall n \geq k : f_n(k) = \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{z^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!};$$

et donc $f_n(k) \rightarrow \frac{z^k}{k!} =: f(k)$ quand $n \rightarrow \infty$.

De plus,

$$\forall n \geq k : |f_n(k)| = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{|z|^k}{k!} =: g(k),$$

et l’inégalité est vraie aussi pour $n < k$ puisque $f_n(k) = 0$. Comme la série $\sum g(k)$ est convergente, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée pour les séries ; et on obtient ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$\square$

4. Notations et terminologie “ensemblistes”

- Pour tout ensemble Ω , on note $\mathcal{P}(\Omega)$ ou 2^Ω l’ensemble des parties de Ω . Donc, “ $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ” est synonyme de “ $A \subset \Omega$ ”.

- On note A^c ou $\Omega \setminus A$ le complémentaire d’une partie A de Ω .

- Si $A, B \subset \Omega$, on pose $B \setminus A := B \cap A^c = B \cap (\Omega \setminus A)$. **Pas besoin** d’avoir $A \subseteq B$.

- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Ω , on note $\bigcup_{i \in I} A_i$ la réunion de tous les A_i et $\bigcap_{i \in I} A_i$ leur intersection. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on écrit aussi $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

REMARQUE IMPORTANTE. Par définition, “ $\bigcup$ ” correspond au quantificateur “ $\exists$ ”, et “ $\bigcap$ ” correspond à “ $\forall$ ” :

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} A_i &\iff \exists i \in I : x \in A_i, \\ x \in \bigcap_{i \in I} A_i &\iff \forall i \in I : x \in A_i. \end{aligned}$$

Exercice. Soit (f_n) une suite de fonctions, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire avec des unions et des intersections l’ensemble $A := \{x \in \Omega; f_n(x) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$.

• Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est une application d’un ensemble Ω dans un ensemble Ω' , on pose pour tout $A \subseteq \Omega'$:

$$f^{-1}(A) := \{x \in \Omega; f(x) \in A\}.$$

Attention : pas la peine que f soit bijective. On dit que $f^{-1}(A)$ est l’**image réciproque** de A par l’application f .

REMARQUE IMPORTANTE. Les images réciproques se comportent bien par rapport aux opérations ensemblistes :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A^c) &= f^{-1}(A)^c, \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i), \\ f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

• Soit Ω un ensemble. Pour tout ensemble $A \subseteq \Omega$, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la **fonction indicatrice de A** , qui est définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

REMARQUE. L’application $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0, 1\}^\Omega$, l’ensemble de toutes les applications de Ω dans $\{0, 1\}$. En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\{0, 1\}^\mathbb{N}$; et donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n’est pas dénombrable.

Exercice 1. Soit Ω un ensemble. Montrer que si $A, B \subseteq \Omega$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap B} &= \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \\ \mathbf{1}_{A \cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

Montrer également que si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Ω deux à deux disjointes, alors

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}.$$

Exercice 2. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω . On pose

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} A_n.$$

Montrer qu’on a

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}.$$

Tribus et mesures

1. Définitions

1.1. Tribus.

DÉFINITION 1.1. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathcal{B}$ une famille de parties de Ω . On dit que la famille $\mathcal{B}$ est une **tribu** (de parties de Ω), ou encore une **σ -algèbre**, si elle vérifie les propriétés de stabilité suivantes.

- (o) $\emptyset \in \mathcal{B}$;
- ($\neg$) $\mathcal{B}$ est **stable par complémentation** : si $E \in \mathcal{B}$ alors $E^c \in \mathcal{B}$.
- (σ) $\mathcal{B}$ est **stable par réunions dénombrables** : pour toute famille dénombrable $(E_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ (i.e. l'ensemble d'indices I est dénombrable), l'ensemble $\bigcup_{i \in I} E_i$ appartient à $\mathcal{B}$.

Remarque 1. Toute tribu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ contient $\emptyset$ et $\Omega = \emptyset^c$.

Remarque 2. En raison de ($\neg$), on peut remplacer la condition (σ) par

- (δ) $\mathcal{B}$ est stable par *intersections* dénombrables.

Remarque 3. On peut énoncer (σ) sous la forme suivante : pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$.

Exemple 1. $\mathcal{B} := \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. C'est la *plus grande* tribu de parties de Ω .

Exemple 2. $\mathcal{B} := \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu. C'est la *plus petite* tribu de parties de Ω .

Exemple 3. Supposons que $\Omega = \mathbb{R}$, et soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famille de tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{B}$ vérifie (σ), mais ce n'est pas une tribu.

Exercice. Supposons que Ω soit dénombrable. Montrer que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant tous les singletons, alors $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$.

DÉFINITION 1.2. Un **espace mesurable** est une paire $(\Omega, \mathcal{B})$, où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{B}$ une tribu de parties de Ω .

Remarque. Si l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$ est clairement spécifié par le contexte, on appellera **ensemble mesurable** tout élément de la tribu $\mathcal{B}$.

1.2. Mesures.

DÉFINITION 1.3. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Une **mesure sur** $(\Omega, \mathcal{B})$ est une application $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) **Non trivialité** : $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) **Additivité dénombrable** : pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Donc : une mesure μ est par définition une fonction qui à un ensemble $A \subseteq \Omega$ (supposé mesurable) associe un nombre positif $\mu(A)$, éventuellement égal à ∞ .

Remarque. Les propriétés (i) et (ii) entraînent l'**additivité finie** : si $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints, alors $\mu(A_0 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_0) + \dots + \mu(A_n)$.

Démonstration. Si on pose $A_k := \emptyset$ pour $k > n$, alors $A_0 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, donc $\mu(A_0 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A_0) + \dots + \mu(A_n)$ car $\mu(A_k) = \mu(\emptyset) = 0$ pour $k > n$. $\square$

Exemple 1. Soit $a \in \Omega$. On définit une mesure δ_a sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant pour tout $A \subseteq \Omega$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \ni a, \\ 0 & \text{si } A \not\ni a. \end{cases}$$

La mesure δ_a s'appelle la **masse de Dirac au point** a .

Démonstration. Par définition, on a $\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$ pour tout $A \subseteq \Omega$. Il est évident que $\delta_a(\emptyset) = 0$. Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\delta_a \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \mathbf{1}_{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_a(A_k).$$

Donc δ_a est une mesure. $\square$

Exemple 2. On définit une mesure μ_c sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant pour tout $A \subseteq \Omega$:

$$\mu_c(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } A \text{ est infini,} \\ \#A & \text{si } A \text{ est fini.} \end{cases}$$

La mesure μ_c s'appelle la **mesure de comptage** sur Ω .

Démonstration. Cela repose sur le fait évident suivant.

FAIT. On a $\mu_c(A) = \sum_{x \in \Omega} \delta_x(A)$ pour tout $A \subseteq \Omega$.

Il est évident que $\mu_c(\emptyset) = 0$. Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned} \mu_c \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) &= \sum_{x \in \Omega} \delta_x \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_x(A_k) \quad \text{par l'Exemple 1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x \in \Omega} \delta_x(A_k) \quad \text{par convergence monotone} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_c(A_k). \end{aligned}$$

□

Exercice. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de mesures sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Montrer qu'on définit une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$ en posant pour tout $A \in \mathcal{B}$:

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A).$$

Exemple 3. Soit Ω un ensemble **dénombrable**. Par définition, une **loi de probabilité** sur Ω est une mesure $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Si $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur Ω et si on pose $p(x) = \mathbb{P}(\{x\})$ pour tout $x \in \Omega$, alors $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ et

$$\forall A \subset \Omega : \mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x) = \sum_{x \in \Omega} p(x) \delta_x(A).$$

Inversement, pour toute fonction $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$, la formule précédente définit une loi de probabilité sur Ω .

Démonstration. Comme Ω est dénombrable, on a pour $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{x \in A} \{x\} \right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\{x\}) = \sum_{x \in A} p(x);$$

et donc $\sum_{x \in \Omega} p(x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. La réciproque vient de l'exercice précédent. □

Exemple 4. Intuitivement, on définit une “mesure sur $\mathbb{R}^2$ ” en posant pour $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\mu(A) = \text{aire}(A).$$

De même, on définit une “mesure sur $\mathbb{R}^3$ ” en posant pour $A \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mu(A) = \text{volume}(A).$$

Problème : Ça ne veut rien dire.

DÉFINITION 1.4. Une **espace mesuré** est la donnée d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$ et d'une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

2. Propriétés élémentaires des mesures

2.1. Reformulation de la définition.

LEMME 2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$. Alors μ est une mesure si et seulement si elle possède les propriétés suivantes.

- (i) **Non trivialité** : $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii') **Additivité finie** : pour tous $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a
$$\mu(A_0 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_0) + \dots + \mu(A_n).$$
- (iii) **Continuité par en dessous** : pour toute suite croissante $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ (i.e. $B_n \subseteq B_{n+1}$ pour tout n), on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Démonstration. Supposons que μ soit une mesure. Alors (i) et (ii') sont vraies et il faut vérifier (iii). Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$. Posons $A_0 := B_0$, et

$$A_k := B_k \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_{k-1}) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Les A_k sont mesurables et deux à deux disjoints, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2.1) \quad A_0 \cup \dots \cup A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n$$

$$(2.2) \quad = B_n \quad \text{par croissance de la suite } (B_n).$$

Donc, comme μ est une mesure :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{par (2.1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(A_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \quad \text{par (2.2).} \end{aligned}$$

Inversement, supposons que μ vérifie (i), (ii') et (iii). Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n := A_0 \cup \dots \cup A_n.$$

Alors les B_n sont mesurables et la suite (B_n) est croissante. De plus, on a par (ii')

$$\mu(B_n) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \quad \text{par (iii)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Donc μ est une mesure. □

2.2. Autres propriétés importantes. $(\Omega, \mathcal{B})$ espace mesurable.

PROPOSITION 2.2. Toute mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ possède les propriétés suivantes.

- (1) **Croissance** : si $A, B \in \mathcal{B}$ et $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (2) **Propriété de valuation** : $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{B}$; et donc $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ si on sait que $\mu(A \cap B) < \infty$.
- (3) **Sous-additivité dénombrable** : pour toute famille dénombrable $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles mesurables (pas forcément disjoints), on a

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) \leq \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

Démonstration. (1) On a $B = A \sqcup (B \setminus A)$, union disjointe, donc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ par additivité finie, et donc $\mu(B) \geq \mu(A)$.

(2) On a $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$ et $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$, unions disjointes, donc

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \quad \text{et} \quad \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) = \mu(B);$$

et donc

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Enfin, si $\mu(A \cap B) < \infty$, on peut soustraire $\mu(A \cap B)$.

(3) Par (2), on a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{B}$; d'où $\mu(\bigcup_{i \in I} E_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(E_i)$ pour toute famille finie d'ensembles mesurables E_i (récurrence).

Maintenant, soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'ensembles mesurables. D'après ce qui précède, on a $\mu(\bigcup_{i=0}^n E_i) \leq \sum_{i=0}^n \mu(E_i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'où, par la propriété de continuité par en dessous :

$$\mu \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{i=0}^n E_i \right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i).$$

□

COROLLAIRE 2.3. Si $A, B \in \mathcal{B}$ vérifient $\mu(A \cap B) = 0$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Démonstration. Évident par (2). □

PROPOSITION 2.4. Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Si $A, B \in \mathcal{B}$ vérifient $A \subseteq B$ et si de plus $\mu(A) < \infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Démonstration. Comme $B = A \sqcup (B \setminus A)$, union disjointe, on a $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$; et on peut soustraire $\mu(A)$ car $\mu(A) < \infty$. □

PROPOSITION 2.5. Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Si (C_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables et si de plus $\mu(C_n) < \infty$ pour au moins un $n \in \mathbb{N}$ (par exemple si $\mu(C_0) < \infty$), alors

$$\mu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n).$$

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(C_{n_0}) < \infty$. Comme la suite d'ensembles (C_n) est décroissante, on a $\bigcap_{n \geq 0} C_n = \bigcap_{n \geq n_0} C_n$; donc on peut en fait supposer que $n_0 = 0$, i.e. $\mu(C_0) < \infty$. Soit $C := \bigcap_n C_n$.

Si on pose $B_n := C_0 \setminus C_n$, alors la suite (B_n) est croissante et $\bigcup_n B_n = C_0 \setminus C$. Par la propriété de continuité par en dessous, on a donc

$$\mu(C_0 \setminus C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_0 \setminus C_n).$$

De plus, comme $\mu(C) \leq \mu(C_0) < \infty$ et $\mu(C_n) \leq \mu(C_0) < \infty$, on a le droit d'écrire $\mu(C_0 \setminus C) = \mu(C_0) - \mu(C)$ et $\mu(C_0 \setminus C_n) = \mu(C_0) - \mu(C_n)$. Donc $\mu(C_0) - \mu(C_n) \rightarrow \mu(C_0) - \mu(C)$; d'où le résultat en simplifiant par $\mu(C_0)$, ce qui est possible car $\mu(C_0) < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 2.6. *Si (C_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(C_0) < \infty$ et $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$, alors $\mu(C_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Attention : C'est faux si on ne suppose pas que les C_n sont de mesure finie. Exemple : $\mu = \mu_c$ sur $\mathbb{N}$ et $C_n = \llbracket n, \infty[$.

DÉFINITION 2.7. *Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ est dite **finie** si $\mu(\Omega) < \infty$, i.e. $\mu(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.*

Donc, pour une mesure μ finie, on a $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n)$ pour toute suite décroissante d'ensemble mesurables (C_n) .

3. Ensembles boréliens

3.1. Tribu engendrée par une famille d'ensemble.

LEMME-DÉFINITION 3.1. *Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω . Il existe une **plus petite** tribu de parties de Ω contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu s'appelle la **tribu engendrée par $\mathcal{C}$** , et se note $\sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Il y a au moins une tribu de parties de Ω contenant $\mathcal{C}$, à savoir $\mathcal{P}(\Omega)$. De plus, une *intersection quelconque* de tribus est encore une tribu (**exo**). Donc, si on note $\sigma(\mathcal{C})$ l'intersection de toutes les tribus de parties de Ω contenant $\mathcal{C}$, alors $\sigma(\mathcal{C})$ est bien définie, est une tribu, et convient par définition. $\square$

REFORMULATION. $\sigma(\mathcal{C})$ est caractérisée par les 2 propriétés suivantes :

- $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$;
- pour toute tribu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ contenant $\mathcal{C}$, on a $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$.

Remarque. Étant donné deux familles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de parties de Ω ,

$$\text{si } \mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2), \text{ alors } \sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2).$$

Démonstration. Évident puisque $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu. $\square$

3.2. Tribu borélienne. Dans cette section, on prend $\Omega = \mathbb{R}^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$; mais on pourrait prendre pour Ω n'importe quel **espace métrique** (cf le cours d'EVNT).

RAPPEL. On sait ce qu'est un **ouvert** ou un **fermé** de Ω ; et on sait des petites choses sur les ouverts et les fermés...

DÉFINITION 3.2. La **tribu borélienne de Ω** est la tribu engendrée par les ouverts de Ω ; autrement dit, la plus petite tribu de parties de Ω contenant tous les ouverts de Ω . Cette tribu sera notée $\mathcal{B}(\Omega)$. En notant $\mathcal{O}(\Omega)$ la famille de tous les ouverts de Ω , on a ainsi

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{O}(\Omega)).$$

Les éléments de la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ sont appelés les **boréliens** de l'espace métrique Ω .

Remarque. $\mathcal{B}(\Omega)$ est également la tribu engendrée par les fermés.

Démonstration. En notant $\mathcal{F}(\Omega)$ la famille de tous les fermés de Ω , on a $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{O}(\Omega))$ car tout fermé $C \subseteq \Omega$ est le complémentaire d'un ouvert. Donc $\sigma(\mathcal{F}(\Omega)) \subseteq \sigma(\mathcal{O}(\Omega)) = \mathcal{B}(\Omega)$. De même, on a $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{F}(\Omega))$ et donc $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{O}(\Omega)) \subseteq \sigma(\mathcal{F}(\Omega))$. $\square$

Exemple 1. Les ouverts et les fermés sont boréliens.

Exemple 2. Tout ensemble dénombrable $D \subseteq \Omega$ est borélien.

Démonstration. Soit $D \subset \Omega$ un ensemble dénombrable. On écrit $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Alors $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$, et les singletons $\{x_i\}$ sont fermés, donc boréliens. Donc D est borélien, car réunion dénombrable de boréliens. $\square$

Exemple 3. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble borélien.

Démonstration. Un intervalle I est soit ouvert, soit fermé borné, soit de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$. Dans les 2 premiers cas, on sait déjà que I est borélien. Si $I = [a, b[$, alors on peut écrire $I = [a, \infty[\cap]-\infty, b[$, donc I est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, et donc est borélien. Le cas $I =]a, b]$ est identique. $\square$

REMARQUE 3.3. On peut construire des ensembles *non boréliens* dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^s$; mais il faut se fatiguer assez sérieusement.

DÉFINITION 3.4. Une **mesure borélienne** sur Ω est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

3.3. Produits de boréliens. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.

FAIT 3.5. Si $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ sont ouverts, alors $U \times V$ est ouvert dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Démonstration. En notant $\pi_1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ les deux "projections canoniques", on a $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$; et donc $U \times V$ est ouvert car π_1 et π_2 sont des applications continues. $\square$

PROPOSITION 3.6. Si $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$ sont boréliens, alors $A \times B$ est borélien dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Démonstration. Comme $A \times B = (A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B)$, il suffit de montrer que si $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$ sont boréliens, alors $A \times \mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p \times B$ sont boréliens dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Soit $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^p; A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)\}$. Alors $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de $\mathbb{R}^p$ (exo) car $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ est une tribu. De plus $\mathcal{A}$ contient tous les ouverts par le Fait 3.5, car si $A \subseteq \mathbb{R}^p$ est ouvert alors $A \times \mathbb{R}^q$ est ouvert dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et donc borélien. Donc $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$; autrement dit, $A \times \mathbb{R}^q$ est borélien dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^p$. De même, $\mathbb{R}^p \times B$ est borélien pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}^q$. $\square$

3.4. Intervalles, pavés et boréliens.

DÉFINITION 3.7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Un **pavé de** $\mathbb{R}^d$ est un ensemble $P \subseteq \mathbb{R}^d$ de la forme

$$P = I_1 \times \cdots \times I_d,$$

où $I_1, \dots, I_d$ sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$. Un pavé $P = I_1 \times \cdots \times I_d$ est dit **ouvert** si les intervalles I_j sont tous ouverts, et **compact** si les I_j sont tous compacts (= fermés bornés).

Exemples. Dans $\mathbb{R}$, “pavé” = “intervalle borné” ; dans $\mathbb{R}^2$ “pavé” = “rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées” ; dans $\mathbb{R}^3$, “pavé” = “parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées”.

REMARQUE 3.8. Tout pavé de $\mathbb{R}^d$ est un ensemble borélien.

Démonstration. C’est un produit fini d’intervalles, qui sont des boréliens de $\mathbb{R}$. $\square$

LEMME 3.9. Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de pavés ouverts.

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Notons $\mathcal{I}$ la famille de tous les pavés ouverts de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_d$, où $I_1, \dots, I_d$ sont des intervalles à extrémités rationnelles. Comme O est ouvert, pour tout $x \in O$, on peut trouver un pavé $P \in \mathcal{I}$ tel que $x \in P$ et $P \subset O$ (exo). On voit donc que $O = \bigcup_{P \in \mathcal{I}} P$. De plus, la famille $\mathcal{I}$ est dénombrable car elle est énumérée par une partie de $\mathbb{Q}^2 \times \cdots \times \mathbb{Q}^2$, qui est dénombrable (un intervalle ouvert est défini par ses extrémités). Donc on a le résultat souhaité. $\square$

PROPOSITION 3.10. Les intervalles de $\mathbb{R}$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Plus précisément, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l’une quelconque des familles suivantes :

- (i) la famille $\mathcal{I}_1$ des intervalles ouverts bornés ;
- (ii) la famille $\mathcal{I}_2$ des intervalles compacts ;
- (iii) la famille $\mathcal{I}_3$ des intervalles semi-ouverts de la forme $[\alpha, \beta[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (iii') la famille $\mathcal{I}_3'$ des intervalles semi-ouverts de la forme $] \alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (iv) la famille $\mathcal{I}_4$ des intervalles de la forme $] \alpha, \infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (v) la famille $\mathcal{I}_5$ des intervalles de la forme $[\alpha, \infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (iv') la famille $\mathcal{I}_4'$ des intervalles de la forme $] - \infty, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$;
- (v') la famille $\mathcal{I}_5'$ des intervalles de la forme $] - \infty, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. (i) Par le Lemme 3.9, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d’intervalles ouverts bornés. Donc $\sigma(\mathcal{I}_1)$ contient tous les ouverts, et donc $\sigma(\mathcal{I}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) Par (i), il suffit de montrer que tout intervalle ouvert borné $]a, b[$ appartient à $\sigma(\mathcal{I}_2)$. Si on choisit une suite strictement décroissante (α_n) et une suite strictement croissante (β_n) telles que $\alpha_n \rightarrow a$ et $\beta_n \rightarrow b$, alors $]a, b[= \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n]$; donc OK.

(iii) Par (i), il suffit de montrer que tout intervalle ouvert borné $]a, b[$ appartient à $\sigma(\mathcal{I}_3)$. On a $]a, b[= \bigcup_n [\alpha_n, b[$, où est une suite strictement décroissante tendant vers a , donc OK. Idem pour (iii')

(iv) Par (iii'), il suffit de montrer que tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$ appartient à $\sigma(\mathcal{I}_4)$. On a $]a, b] =]a, \infty[\cap (\mathbb{R} \setminus]b, \infty[)$, donc OK.

(iii'), (iv'), (v) et (v') : idem. $\square$

PROPOSITION 3.11. *Les pavés de $\mathbb{R}^d$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par la famille des pavés ouverts, et aussi par la famille des pavés compacts.*

Démonstration. Notons $\mathcal{P}_1$ la famille des pavés ouverts. Par le Lemme 3.9, tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de pavés ouverts ; donc $\sigma(\mathcal{P}_1)$ contient tous les ouverts, et donc $\sigma(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant, notons $\mathcal{P}_2$ la famille des pavés compacts. On a vu que tout intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles compacts J_n (cf la preuve de la Proposition 3.10). Donc, tout pavé ouvert $P = I_1 \times \cdots \times I_d$ est réunion dénombrable de pavés compacts : en écrivant

$$I_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_{k,n} \quad \text{pour } k = 1, \dots, d$$

où les $J_{k,n}$ sont des intervalles compacts, on a

$$P = I_1 \times \cdots \times I_d = \bigcup_{n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}} J_{1,n_1} \times \cdots \times J_{d,n_d}.$$

Donc $\sigma(\mathcal{P}_2)$ contient tous les pavés ouverts, et donc $\sigma(\mathcal{P}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

3.5. Boréliens d'une partie de $\mathbb{R}^d$. Dans cette section, Ω est une partie (non vide) de $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 3.12. *On dit qu'un ensemble $O \subset \Omega$ est un **ouvert de Ω** si, pour tout point $x \in O$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap \Omega \subset O$, où $B(x, r)$ est la boule ouverte (euclidienne) de centre c et de rayon r .*

Par exemple, si $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, alors $O =]0, 1]$ est un ouvert de Ω (**exo**).

FAIT 3.13. *Un ensemble $O \subset \Omega$ est un ouvert de Ω si et seulement si $O = \tilde{O} \cap \Omega$, où $\tilde{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Supposons que O soit un ouvert de Ω . Pour tout $x \in O$, on peut choisir $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap \Omega \subset O$. Alors (**micro-exo**) $O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x) \cap \Omega = (\bigcup_{x \in O} B(x, r_x)) \cap \Omega$; donc $\tilde{O} := \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$ convient. La réciproque est laissée en **exo**. $\square$

Par exemple, si $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et $O =]0, 1]$, alors $O =]0, \infty] \cap \Omega$.

DÉFINITION 3.14. *La **tribu borélienne de Ω** est la tribu de parties de Ω engendrée par la famille des ouverts de Ω . On note cette tribu $\mathcal{B}(\Omega)$, et on dit que les éléments de $\mathcal{B}(\Omega)$ sont les boréliens de Ω .*

PROPOSITION 3.15. *Un ensemble $A \subset \Omega$ est un borélien de Ω si et seulement si $A = \tilde{A} \cap \Omega$, où $\tilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} := \{\tilde{A} \cap \Omega; \tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. On veut montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$; et pour cela on va montrer que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une tribu, on vérifie que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω (**exo**). De plus, par le Fait 3.13, la famille $\mathcal{A}$ contient tous les ouverts de Ω . Donc $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}(\Omega)$.

Pour montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\Omega)$, on introduit la famille $\mathcal{B} := \{B \subset \mathbb{R}^d; B \cap \Omega \in \mathcal{B}(\Omega)\}$. Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ revient à montrer que tout borélien de $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{B}$,

autrement dit que $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{B}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω , on vérifie que $\mathcal{B}$ est une tribu de parties de $\mathbb{R}^d$ (**exo**). De plus, $\mathcal{B}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ par le Fait 3.13 ; et donc $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

COROLLAIRE 3.16. *Si Ω est un borélien de $\mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{P}(\Omega)$. Autrement dit : les boréliens de Ω sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^d$ contenus dans Ω .*

Démonstration. **Exo.** $\square$

3.6. Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.

DÉFINITION 3.17. *On dit qu'un ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un **borélien de $\overline{\mathbb{R}}$** si $A \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ la famille des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.*

REFORMULATION. Un ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

- ou bien $A \subset \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- ou bien $A = B \cup \{\infty\}$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- ou bien $A = B \cup \{-\infty\}$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- ou bien $A = B \cup \{-\infty, \infty\}$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

FAIT 3.18. *La famille $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est une tribu de parties de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. **Exo.** $\square$

PROPOSITION 3.19. *La tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par la famille d'intervalles $\mathcal{I} := \{[a, \infty]; a \in \mathbb{R}\}$, et aussi par la famille $\mathcal{I}' := \{]a, \infty]; a \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. Faisons la preuve pour $\mathcal{I}$. Par la “reformulation” ci-dessus, il suffit de montrer que la tribu $\sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{\infty\}$ et $\{-\infty\}$. D’abord, $\{\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty]$, donc $\{\infty\} \in \sigma(\mathcal{I})$. On en déduit que $\sigma(\mathcal{I})$ contient tous les intervalles de la forme $[a, \infty[$ puisque $[a, \infty[= [a, \infty] \setminus \{\infty\}$; et donc que $\sigma(\mathcal{I})$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Enfin, $\{-\infty\} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, donc $\{-\infty\} \in \sigma(\mathcal{I})$. $\square$

REMARQUE 3.20. On montre de la même façon que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par $\mathcal{J} := \{[-\infty, \beta]; \beta \in \mathbb{R}\}$ et par $\mathcal{J}' := \{[-\infty, \beta[; \beta \in \mathbb{R}\}$.

4. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

4.1. Un résultat d’unicité. Dans cette section et les suivantes, on fixe $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu’une *mesure borélienne* sur $\mathbb{R}^d$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

LEMME 4.1. (“Lemme d’unicité”)

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures boréliennes sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\mu_1(P) = \mu_2(P) < \infty$ pour tout pavé compact $P \subseteq \mathbb{R}^d$, alors $\mu_1 = \mu_2$. Idem si on remplace “pavé compact” par “pavé ouvert”.

Démonstration. C’est non-trivial, et on l’admettra pour le moment ; mais on fera peut-être la preuve plus tard. Cependant, le résultat est “plausible” car les pavés engendrent la tribu borélienne. $\square$

Remarque. Le lemme devient faux si on ne suppose pas que les mesures μ_1 et μ_2 prennent des valeurs **finies** sur les pavés. Exemple : soient μ_1 et μ_2 les mesures (boréliennes) sur $\mathbb{R}$ définies par

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ \infty & \text{si } A \neq \emptyset; \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ \infty & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{cases}$$

(**Exo** : ce sont effectivement des mesures...)

On a $\mu_1 \neq \mu_2$ car par exemple $\mu_1(\{0\}) = \infty$ et $\mu_2(\{0\}) = 0$; mais $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, car un intervalle ouvert non vide est non dénombrable.

Exercice. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer qu'on a $\mu_1(J) = \mu_2(J)$ pour tout intervalle ouvert J , et en déduire que $\mu_1(O) = \mu_2(O)$ pour tout ouvert $O \subseteq \mathbb{R}$. (Utiliser une description “bien connue” des ouverts de $\mathbb{R}$.)

4.2. Définition de la mesure de Lebesgue.

NOTATIONS. Pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on note $|I|$ la longueur de I .

Si $P = I_1 \times \cdots \times I_d$ est un pavé de $\mathbb{R}^d$, on note $|P|$ le **volume** (d -dimensionnel) de P :

$$|P| := |I_1| \times \cdots \times |I_d|.$$

REMARQUE IMPORTANTE. Si $P \subseteq \mathbb{R}^p$ et $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ sont des pavés, alors $P \times Q$ est un pavé de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$, et on a

$$|P \times Q| = |P| |Q|.$$

THÉOREME-DÉFINITION. *Il existe une unique mesure borélienne λ_d sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda_d(P) = |P|$ pour tout pavé $P \subseteq \mathbb{R}^d$. On dit que λ_d est la **mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. *Unicité* : évident par le Lemme 4.1. *Existence* : Beaucoup plus délicat ; peut-être à la fin du cours, s'il y a le temps. $\square$

Remarque 1. L'intuition est que la mesure de Lebesgue λ_2 mesure les aires, que λ_3 mesure les volumes, et que λ_1 mesure les longueurs.

Remarque 2. On peut tout de suite donner une *formule* pour λ_d : pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on a

$$\lambda_d(A) = \inf \sum_{k=0}^{\infty} |P_k|,$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les suites de pavés (P_k) telles que $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$.

Remarque 3. La mesure de Lebesgue n'est pas finie puisque $\lambda_d(\mathbb{R}^d) \geq \lambda_d([-n, n]^d) = (2n)^d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle est **sigma-finie** : il existe une suite (B_n) de boréliens telle que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $\lambda_d(B_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple $B_n = [-n, n]^d$).

4.3. Deux propriétés fondamentales.

4.3.1. *Invariance par translations.* Pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$A + u = \{x + u; x \in A\}.$$

FAIT 4.2. Si $u \in \mathbb{R}^d$, alors $A + u$ est borélien pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d; A + u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. En notant $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la translation définie par $\tau(x) = x - u$, on a $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d; \tau^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une tribu (exo), et que $\mathcal{B}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ car τ est continue (autre exo). Donc $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

LEMME 4.3. La mesure de Lebesgue λ_d est **invariante par translations** : pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\lambda_d(A + u) = \lambda_d(A).$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, et soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ définie par

$$\mu(A) = \lambda_d(A + u).$$

Alors μ est une mesure : si (A_k) est une suite de boréliens deux à deux disjoints, alors les $A_k + u$ sont disjoints et $(\bigcup_k A_k) + u = \bigcup_k (A_k + u)$, donc... (terminer).

On veut : $\mu = \lambda_d$. Il suffit : de vérifier qu'on a $\mu(P) = |P|$ pour tout pavé $P \subseteq \mathbb{R}^d$ (par définition de λ_d).

On écrit $P = I_1 \times \cdots \times I_d$ et $u = (u_1, \dots, u_d)$. Alors $P + u$ est aussi un pavé : $P + u = \tilde{I}_1 \times \cdots \times \tilde{I}_d$, où $\tilde{I}_j = I_j + u_j$. Comme $|\tilde{I}_j| = |I_j|$ pour tout j , on a donc

$$\mu(P) = |P + u| = |\tilde{I}_1| \cdots |\tilde{I}_d| = |I_1| \cdots |I_d| = |P|.$$

$\square$

Exercice 1. Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante par symétries centrales. Pour cela, raisonner comme dans la preuve du Lemme 4.3.

Exercice 2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une homothétie de rapport c . Montrer que pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^2$, on a $\lambda_2(h(A)) = c^2 \lambda_2(A)$.

4.3.2. *Propriété de produit.*

LEMME 4.4. Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$, alors $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ et

$$\lambda_{p+q}(A \times B) = \lambda_p(A) \lambda_q(B).$$

Démonstration. On a déjà vu que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$. Donc la formule a un sens ($\lambda_{p+q}(A \times B)$ est bien défini).

ÉTAPE 1. On a $\lambda_{p+q}(A \times B) = \lambda_p(A) \lambda_q(B)$ pour tout pavé $B \subseteq \mathbb{R}^q$ et pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^p$.

Démonstration. On fixe un pavé $B \subseteq \mathbb{R}^q$, et on définit $\mu_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \rightarrow [0, \infty]$ et $\mu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \rightarrow [0, \infty]$ par

$$\mu_1(A) = \lambda_{p+q}(A \times B) \quad \text{et} \quad \mu_2(A) = \lambda_p(A) \lambda_q(B).$$

Alors μ_1 et μ_2 sont des mesures : évident pour μ_2 (multiple de λ_p); exo pour μ_1 . De plus, si A est un pavé, alors $A \times B$ est un pavé; donc

$$\mu_1(A) = |A \times B| = |A| |B| = \lambda_p(A) \lambda_q(B) = \mu_2(A) < \infty.$$

D'après le Lemme d'unicité 4.1 on a donc $\mu_1 = \mu_2$, ce qu'on voulait. $\square$

ÉTAPE 2. On a $\lambda_{p+q}(A \times B) = \lambda_p(A) \lambda_q(B)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_p(A) < \infty$ et pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}^q$.

Démonstration. Cette fois, on fixe un borélien $A \subseteq \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_p(A) < \infty$, et on définit deux mesures $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) \rightarrow [0, \infty]$ par

$$\mu_1(B) = \lambda_{p+q}(A \times B) \quad \text{et} \quad \mu_2(B) = \lambda_p(A) \lambda_q(B).$$

Par l'Étape 1, on a $\mu_1(B) = \mu_2(B) < \infty$ pour tout pavé $B \subseteq \mathbb{R}^q$; donc $\mu_1 = \mu_2$ d'après le Lemme d'unicité, ce qu'on voulait. $\square$

Soient maintenant $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ quelconques. Si on pose $E_n := [-n, n]^p$ et $A_n = A \cap E_n$, alors la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $A = \bigcup_n A_n$; donc $A \times B$ est la réunion croissante des $A_n \times B$. De plus, on a $\lambda_p(A_n) \leq \lambda_p(E_n) < \infty$ pour tout n , donc $\lambda_{p+q}(A_n \times B) = \lambda_p(A_n) \lambda_q(B)$ d'après l'Étape 2. Ainsi,

$$\lambda_{p+q}(A \times B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{p+q}(A_n \times B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p(A_n) \lambda_q(B) = \lambda_p(A) \lambda_q(B).$$

$\square$

Exercice. Montrer soigneusement que si (a_n) est une suite croissante de nombres positifs de limite $a \in [0, \infty]$ et si $b \in [0, \infty]$ est fixé, alors $a_n b \rightarrow ab$.

4.4. Aire d'un rectangle quelconque. On a dit plus haut qu'intuitivement, la mesure de Lebesgue λ_2 "mesure les aires", car la mesure d'un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées est égale à ce qu'on est en droit d'attendre. Pour étayer un peu plus cette affirmation, la moindre des choses est maintenant de montrer que cela reste vrai pour un rectangle *quelconque*. C'est ce que dit le lemme suivant.

LEMME 4.5. *Si $R \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle de côtés a et b , alors $\lambda_2(R) = ab$.*

Ce résultat n'est absolument pas évident. Pour la preuve, on va avoir besoin des deux faits suivants.

FAIT 4.6. *Pour tout segment $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, on a $\lambda_2(\Gamma) = 0$.*

Démonstration. Elle sera faite plus tard dans le chapitre (où on montrera un résultat plus général). $\square$

FAIT 4.7. *Si $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ est un triangle rectangle dont les "côtés de l'angle droit" sont parallèles aux axes de coordonnées, alors $\lambda_2(\Delta)$ est ce qu'on imagine.*

Démonstration. Notons Δ' le triangle rectangle symétrique de Δ par rapport au milieu de l'hypoténuse de Δ . Notons également a et b les longueurs des "côtés de l'angle droit" de Δ . Alors $\Delta \cup \Delta'$ est un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées, de longueurs a et b . Donc $\lambda_2(\Delta \cup \Delta') = ab$. De plus, on a $\lambda_2(\Delta') = \lambda_2(\Delta)$ car la mesure de Lebesgue λ_2 est invariante par les symétries centrales (un **exo** posé plus haut); et $\lambda_2(\Delta \cap \Delta') = 0$ d'après le Fait 4.6 car $\Delta \cap \Delta'$ est un segment. Donc $ab = \lambda_2(\Delta \cup \Delta') = \lambda_2(\Delta) + \lambda_2(\Delta') = 2\lambda_2(\Delta)$, et donc $\lambda_2(\Delta) = \frac{1}{2} ab$, comme attendu. $\square$

Preuve du Lemme 4.5. On peut compléter le rectangle R en un grand rectangle Q à côtés parallèles aux axes de coordonnées, en construisant sur les côtés de R des triangles rectangles $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ à côtés de l'angle droit parallèles aux axes de coordonnées. Par le Fait 4.6, on a

$$(4.1) \quad \lambda_2(Q) = \lambda_2(R) + \sum_{i=1}^4 \lambda_2(\Delta_i).$$

Les triangles Δ_i vont par paires. Notons x, y les longueurs des côtés de l'angle droit pour les 2 triangles dont l'hypoténuse est de longueur a , et u, v pour ceux dont l'hypoténuse est de longueur b . Quitte à permuter x, y et u, v , les longueurs des côtés du grand rectangle Q sont alors $x + u$ et $y + v$. Il faut évidemment faire un **dessin**.

Comme Q et les Δ_i ont des côtés parallèles aux axes de coordonnées, on a $\lambda_2(Q) = (x + u)(y + v)$ par définition de λ_2 , et $\lambda_2(\Delta_i) = \frac{xy}{2}$ ou $\frac{uv}{2}$ d'après le Fait 4.7. Donc l'équation (4.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda_2(R) &= (x + u)(y + v) - 2 \left(\frac{xy}{2} + \frac{uv}{2} \right) \\ &= xv + yu. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a d'après le Théorème de Pythagore :

$$(4.2) \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{et} \quad u^2 + v^2 = b^2.$$

Enfin, en considérant les angles des triangles Δ_i , on voit qu'on a aussi

$$(4.3) \quad \frac{x}{y} = \frac{v}{u}.$$

En élevant au carré l'identité $\lambda_2(R) = xv + yu$ et en utilisant (4.3) et (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_2(R)^2 &= x^2v^2 + 2xuyv + y^2u^2 \\ &= x^2v^2 + (xu)^2 + (yv)^2 + y^2u^2 \\ &= x^2(u^2 + v^2) + y^2(v^2 + u^2) \\ &= (x^2 + y^2)b^2 = a^2b^2. \end{aligned}$$

Donc $\lambda_2(R) = ab$, comme annoncé. $\square$

COROLLAIRE 4.8. *La mesure de Lebesgue λ_2 est invariante par toutes les isométries euclidiennes de $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Soit $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie euclidienne. Comme J^{-1} est aussi une isométrie euclidienne et est donc continue, on montre comme dans la preuve du Fait 4.2 que $J(A) = (J^{-1})^{-1}(A)$ est un ensemble borélien pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^2$. Ensuite, on vérifie (**exo**) que la fonction $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, \infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda_2(J(A))$ est une mesure. Si $P \subset \mathbb{R}^2$ est un pavé de côtés a et b , alors $R := J(P)$ est un rectangle de côtés a et b puisque J est une isométrie ; donc $\lambda_2(R) = ab$ par le Lemme 4.5, autrement dit $\mu(P) = |P|$. Cela étant vrai pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\mu = \lambda_2$, ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Exercice. Montrer que si $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ est un triangle quelconque, alors $\lambda_2(\Delta)$ est ce qu'on imagine.

5. Ensembles négligeables ; propriétés vraies presque partout

5.1. Définitions. Dans tout cette section, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

DÉFINITION 5.1. On dit qu'un ensemble $N \subseteq B$ est μ -**négligeable** s'il existe un ensemble mesurable B tel que $N \subseteq B$ et $\mu(B) = 0$.

Remarque 1. La définition n'impose pas que N soit mesurable.

Remarque 2. Un ensemble *mesurable* N est μ -négligeable si et seulement si $\mu(N) = 0$. (Évident par la propriété de croissance.)

Remarque 3. Si N est μ -négligeable, alors tout ensemble $N' \subseteq N$ est μ -négligeable.

Remarque 4. La μ -négligeabilité dépend de la mesure μ .

Exemple 1. Soit $a \in \Omega$, et soit δ_a la masse de Dirac au point a . Alors un ensemble $N \subseteq \Omega$ est δ_a -négligeable si et seulement si $N \not\ni a$.

Exemple 2. Le seul ensemble négligeable pour la mesure de comptage μ_c est $N = \emptyset$.

DÉFINITION 5.2. Soit $P(x)$ une propriété dépendant de $x \in \Omega$. On dit que $P(x)$ a lieu μ -**presque partout** si l'ensemble des $x \in \Omega$ ne vérifiant pas $P(x)$ est μ -négligeable.

Exemple 1. Étant donné $a \in \Omega$, on a “ $x = a$ ” δ_a -presque partout.

Exemple 2. “ μ_c -presque partout” veut dire “partout”.

PROPOSITION 5.3. Toute réunion dénombrable d'ensembles μ -négligeables est μ -négligeable.

Démonstration. Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'ensembles négligeables, et soit $N := \bigcup_{i \in I} N_i$. Pour tout $i \in I$, on peut trouver $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $N_i \subseteq B_i$ et $\mu(B_i) = 0$. Alors $B := \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$ et $\mu(B) \leq \sum_{i \in I} \mu(B_i) = 0$ par sous-additivité dénombrable ; donc $\mu(B) = 0$, et donc N est μ -négligeable puisque $N \subseteq B$. $\square$

COROLLAIRE 5.4. Toute conjonction dénombrable de propriétés vraies μ -presque partout est encore vraie μ -presque partout : si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable de propriétés vraies μ -presque partout, alors la propriété “ $\forall i \in I : P_i(x)$ ” est elle aussi vraie μ -presque partout.

Démonstration. C'est évident : si on pose $N_i := \{x \in \Omega \text{ ne vérifiant pas } P_i(x)\}$ et $N := \{x \in \Omega \text{ ne vérifiant pas “}\forall i \in I : P_i(x)\text{”}\}$, alors les N_i sont μ -négligeables et on a $N = \bigcup_{i \in I} N_i$. $\square$

Exercice 1. Montrer que tout ensemble λ_d -négligeable dans $\mathbb{R}^d$ est d'intérieur vide.

Exercice 2. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non trivial. Montrer que si deux fonction continues $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont égales λ_1 -presque partout, alors elles sont égales partout.

5.2. Exemples d'ensembles λ_d -négligeables.

Exemple 1. Tout ensemble dénombrable $D \subseteq \mathbb{R}$ est λ_1 -négligeable.

Démonstration. Par la Proposition 5.3, il suffit de montrer que tout singleton $\{a\}$ est λ_1 -négligeable. Et c'est évident : $\{a\} = [a, a]$ et donc $\lambda_1(\{a\}) = |[a, a]| = 0$. $\square$

Remarque 1. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas λ_1 -négligeable, on en déduit que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable !

Remarque 2. Il existe des parties λ_1 -négligeables de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dénombrables.

Exemple 2. Soit $d \geq 2$. Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, alors $\Gamma := \gamma(I)$ est λ_d -négligeable.

Démonstration. Cette preuve suppose une certaine aisance avec le contenu du cours d'EVNT.

On sait que l'intervalle I est réunion dénombrable d'intervalles compacts I_n , $n \in \mathbb{N}$. Alors $\gamma(I) = \bigcup_n \gamma(I_n)$, donc il suffit de montrer que les $\gamma(I_n)$ sont négligeables. Donc on s'est ramené au cas où l'intervalle I est compact ; disons $I = [a, b]$. Dans ce cas, Γ est compact (par continuité de γ), donc borélien.

Comme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée γ' est bornée sur le compact $[a, b]$; donc γ est lipschitzienne (pour n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^d$), d'après l'inégalité des accroissements finis. Soit K une constante telle que

$$\forall s, t \in [a, b] : \|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty \leq K |t - s|.$$

Soit $R \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et soit $a = s_0 < s_1 < \dots < s_R = b$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en découpant $[a, b]$ en R intervalles de longueur $\eta := \frac{b-a}{R}$. On a

$$\Gamma = \gamma([a, b]) = \bigcup_{i=0}^{R-1} \gamma([s_i, s_{i+1}]) := \bigcup_{i=0}^{R-1} \Gamma_i.$$

Si $t \in [s_i, s_{i+1}]$ alors $\|\gamma(t) - \gamma(s_i)\|_\infty \leq K |t - s_i| \leq K \eta$. Donc $\gamma(t)$ appartient à la boule $\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma(s_i), K\eta)$ pour tout $t \in [s_i, s_{i+1}]$, autrement dit

$$\Gamma_i \subseteq \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma(s_i), K\eta) := P_i.$$

Mais comme on utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$, les P_i sont des "pavés cubiques" de côté $2K\eta$. (En écrivant $\gamma(s_i) = (x_1, \dots, x_d)$, on a $P_i = [x_1 - \eta, x_1 + \eta] \times \dots \times [x_d - \eta, x_d + \eta]$.) En particulier, $\lambda_d(P_i) = (2K\eta)^d$. Comme $\Gamma_i \subseteq P_i$, on a donc $\lambda_d(\Gamma_i) \leq (2\eta)^d$ pour $i = 0, \dots, R-1$, d'où

$$\begin{aligned} \lambda_d(\Gamma) &= \lambda_d\left(\bigcup_{i=0}^{R-1} \Gamma_i\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{R-1} \lambda_d(\Gamma_i) \\ &\leq R \times (2K\eta)^d. \end{aligned}$$

Comme $\eta = \frac{b-a}{R}$, on obtient donc

$$\lambda_d(\Gamma) \leq R \times \frac{C}{R^d} = \frac{C}{R^{d-1}},$$

où C est une constante indépendante de R . C'est vrai pour tout entier $R \geq 1$, donc $\lambda_d(\Gamma) = 0$ puisque $d \geq 2$. $\square$

CAS PARTICULIER. Si $d \geq 2$, alors toute droite $L \subseteq \mathbb{R}^d$ est λ_d -négligeable.

Démonstration. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de L et si on fixe un point $p \in L$, alors on peut écrire $L = \gamma(\mathbb{R})$ où $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie par $\gamma(t) = p + t\vec{u}$ (elle est bien $\mathcal{C}^1$). $\square$

Exercice. Montrer que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est un polygone ou un disque fermé, alors $\lambda_2(A) = \lambda_2(\overset{\circ}{A})$.

Exemple 3. Soient $d, p \in \mathbb{N}$ avec $p < d$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\Sigma = \Phi(U)$ est λ_d -négligeable.

Démonstration. Semblable à celle de l'Exemple 2. $\square$

CAS PARTICULIER. Tout sous espace affine $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de dimension $p < d$ est négligeable.

Démonstration. **Exo.** $\square$

Applications mesurables

1. Définition et critères de mesurabilité

DÉFINITION 1.1. Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ -**mesurable** si

$$\forall A \in \mathcal{B}' : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}.$$

Remarque 1. Si les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont clairement spécifiées, on dira simplement “mesurable” au lieu de “ $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ -mesurable”. Donc : une application f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(A)$ est mesurable pour tout ensemble mesurable $A \subset \Omega'$.

Remarque 2. Si $\Omega' = \mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, on munit “par défaut” Ω' de sa tribu borélienne. Donc, pour une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, “mesurable” veut dire “ $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\Omega'))$ -mesurable”.

Remarque 3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et $\Omega' = \mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, on dit qu'une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est **borélienne** si elle est $(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(\Omega'))$ -mesurable.

Remarque 4. Si $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est mesurable.

Exercice 1. Montrer qu'une application $f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si elle est mesurable quand on la considère comme application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Par définition, X est une **variable aléatoire discrète** si $\Lambda := X(\Omega)$ est dénombrable et si, pour tout $a \in \Lambda$, l'ensemble $\{X \in a\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = a\}$ appartient à $\mathcal{B}$. Montrer que X est une variable aléatoire discrète si et seulement si X est une application mesurable telle que $X(\Omega)$ est dénombrable.

Exemple 1. Toute application *constante* est mesurable, quelles que soient les tribus au départ et à l'arrivée.

Démonstration. Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est constante, $f(x) \equiv \alpha$, alors, pour tout ensemble $A \subseteq \Omega'$, l'ensemble $f^{-1}(A)$ est soit vide (si $\alpha \notin A$), soit égal à Ω (si $\alpha \in A$). Dans les deux cas, $f^{-1}(A)$ est mesurable. $\square$

Exemple 2. Soit $E \subseteq \Omega$, et soit $\mathbf{1}_E$ sa fonction indicatrice, considérée comme une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathbf{1}_E$ est mesurable si et seulement si E est mesurable.

Démonstration. Si $\mathbf{1}_E$ est mesurable, alors $E = \mathbf{1}_E^{-1}(\{1\})$ est mesurable car $\{1\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Inversement, supposons E mesurable. Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$, l'ensemble $(\mathbf{1}_E)^{-1}(A)$ est égal soit à Ω (si $0 \in A$ et $1 \in A$), soit à E (si $0 \notin A$ et $1 \in A$), soit à E^c (si $0 \in A$ et $1 \notin A$), soit à $\emptyset$ (si $0 \notin A$ et $1 \notin A$); dans tous les cas $(\mathbf{1}_E)^{-1}(A)$ est mesurable. $\square$

Exercice. Soit (f_n) une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que la suite $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer que E est mesurable.

PROPOSITION 1.2. Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ deux espaces mesurables, et soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. On suppose qu'il existe une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}'$ telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}'$ et $\forall C \in \mathcal{C} : f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. Alors f est mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}_f := \{A \subseteq \Omega' ; f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$. Comme $\mathcal{B}$ est une tribu, on vérifie que $\mathcal{B}_f$ est une tribu de parties de Ω' (**exo** ; on dit que $\mathcal{B}_f$ est la tribu **image** de $\mathcal{B}$ par f). Comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_f$ par hypothèse, on a donc $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}_f$; autrement dit : $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ pour tout $A \in \mathcal{B}'$. $\square$

COROLLAIRE 1.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, alors toute application continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est borélienne.

Démonstration. On applique la proposition en prenant pour $\mathcal{C}$ la famille de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue, on sait que $f^{-1}(O)$ est ouvert dans Ω (donc borélien) pour tout $O \in \mathcal{C}$, d'où le résultat puisque $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ par définition de la tribu borélienne. $\square$

Exemple. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. L'application $\tau_u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\tau_u(x) = x - u$ est continue, donc borélienne ; et si $A \subseteq \mathbb{R}^d$, alors $\tau_u^{-1}(A) = A + u$. On en déduit que si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ est borélien, alors $A + u$ aussi ; ce qu'on avait déjà démontré.

Exercice. Montrer en utilisant le Corollaire 1.3 que si $A_1, \dots, A_d$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$, alors $A_1 \times \dots \times A_d$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$. (Considérer les "projections canoniques" $\pi_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.)

NOTATIONS. Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\{f > \alpha\} := \{x \in \Omega ; f(x) > \alpha\} \quad \text{et} \quad \{f < \beta\} := \{x \in \Omega ; f(x) < \beta\}.$$

COROLLAIRE 1.4. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour une fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) f est mesurable ;
- (2) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{B}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (2') $\{f < \beta\} \in \mathcal{B}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Comme $\{f < \alpha\} = f^{-1}(] \alpha, \infty])$ et $\{f < \beta\} = f^{-1}(] -\infty, \beta])$, on peut appliquer la proposition avec $\mathcal{C} := \{] \alpha, \infty] ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{C} = \{] -\infty, \beta] ; \beta \in \mathbb{R}\}$. (On a vu au Chapitre 2 que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.) $\square$

COROLLAIRE 1.5. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, toute fonction monotone $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.

Démonstration. Comme f est monotone, les ensembles $\{f > \alpha\}$ sont des intervalles (**exo**), donc des boréliens de I . $\square$

COROLLAIRE 1.6. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, soient $m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}^*$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_d}$. On écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$, avec $f_j(x) \in \mathbb{R}^{m_j}$ pour $j = 1, \dots, d$. Alors f est mesurable si et seulement si $f_1, \dots, f_d$ le sont.

Démonstration. Supposons que f soit mesurable. Pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et pour $A \subseteq \mathbb{R}^{m_j}$ borélien, on a

$$f_j^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times A \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_d}),$$

donc $f_j^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ puisque f est mesurable et $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times A \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_d}$ est borélien dans $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_d}$. C'est vrai pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^{m_j}$, donc f_j est mesurable, pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Inversement, supposons que $f_1, \dots, f_d$ soient mesurables, et montrons que f est mesurable. Par la Proposition 1.2, il suffit de vérifier qu'on a $f^{-1}(P) \in \mathcal{B}$ pour tout pavé $P \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_d} = \mathbb{R}^{m_1 + \cdots + m_d}$, car les pavés engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{m_1 + \cdots + m_d}$.

Soit P un pavé quelconque de $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_d}$. On peut écrire $P = P_1 \times \cdots \times P_d$, où P_j est un pavé de $\mathbb{R}^{m_j}$ pour $j = 1, \dots, d$. Alors $f(x) \in P$ si et seulement si $f_j(x) \in P_j$ pour $j = 1, \dots, d$; autrement dit

$$f^{-1}(P) = f_1^{-1}(P_1) \cap \cdots \cap f_d^{-1}(P_d).$$

Donc $f^{-1}(P) \in \mathcal{B}$ puisque les f_j sont mesurables. $\square$

COROLLAIRE 1.7. *Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.*

Démonstration. Immédiat en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\square$

NOTATION. Si $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace mesurable et si $E \subseteq \Omega$ est mesurable, on pose $\mathcal{B}_E = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(E) = \{B \in \mathcal{B}; B \subseteq E\}$, qui est une tribu de parties de E (**micro-exo**), et on munit E de la tribu $\mathcal{B}_E$.

Remarque. Si Ω est une partie de $\mathbb{R}^d$ (et donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$), alors $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}(E)$.

Démonstration. Par définition, un ensemble A appartient à $\mathcal{B}_E$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ et $A \subset E$. Par ce qu'on a vu au Chapitre 2, il revient au même de dire que $A \subset E$ et que $A = \tilde{A} \cap \Omega$ où $\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$; autrement dit que $A = \tilde{A} \cap E$ où $\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui signifie que $A \in \mathcal{B}(E)$. $\square$

LEMME 1.8. (Lemme de recollement)

Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ deux espaces mesurables, et soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est mesurable si et seulement si sa restriction à chaque Ω_i est mesurable.

Démonstration. Supposons que f soit mesurable. Pour tout ensemble $A \subseteq \Omega'$ et pour tout $i \in I$, on a $(f|_{\Omega_i})^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \Omega_i$. Donc $(f|_{\Omega_i})^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\Omega_i}$ si $A \in \mathcal{B}'$, car $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$; autrement dit, $f|_{\Omega_i}$ est mesurable.

Inversement, si $f|_{\Omega_i}$ est mesurable pour tout $i \in I$ alors, comme $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ et que I est dénombrable, on a pour tout $A \in \mathcal{B}'$:

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} (\Omega_i \cap f^{-1}(A)) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(f|_{\Omega_i})^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}_{\Omega_i} \subseteq \mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

$\square$

COROLLAIRE 1.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. S'il existe une partition dénombrable de Ω en boréliens Ω_i telle que la restriction de f à chaque Ω_i est borélienne, alors f est borélienne.*

COROLLAIRE 1.10. Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ deux espaces mesurables, et soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. S'il existe une partition dénombrable $(\Omega_i)_{i \in I}$ de Ω en ensembles mesurables telle que f soit constante sur chaque Ω_i , alors f est mesurable.

Démonstration. C'est évident par la proposition : la restriction de f à chaque Ω_i est constante, donc mesurable. $\square$

COROLLAIRE 1.11. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable, alors f est borélienne.

Démonstration. On note $D = \{a_i; i \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des points de discontinuité de f . Soit aussi $\Omega_0 = \Omega \setminus D$. Alors Ω_0 est borélien car D l'est (tout ensemble dénombrable dans un espace métrique est borélien), et la restriction de f à Ω_0 est continue (donc borélienne) puisque Ω_0 est l'ensemble des points de continuité de f . De plus, si on pose $\Omega_i = \{a_i\}$ pour $i \geq 1$, alors les Ω_i sont boréliens (!) et la restriction de f à chaque Ω_i est constante (donc borélienne!!). On peut donc appliquer le corollaire 1.9. $\square$

Remarque. En particulier, on voit que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux est borélienne.

Exercice. Soient Ω et Ω' deux espaces métriques, et soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω telle que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$. On suppose ou bien que tous les Ω_i sont ouverts, ou bien que tous les Ω_i sont fermés et que la famille (Ω_i) est finie. Montrer qu'une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est continue si et seulement si sa restriction à chaque Ω_i est continue.

2. Propriétés de stabilité

PROPOSITION 2.1. Si $f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}')$ et $g : (\Omega', \mathcal{B}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{B}'')$ sont mesurables, alors $g \circ f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega'', \mathcal{B}'')$ est mesurable. Avec des mots : la composée de deux fonctions mesurables est une application mesurable.

Démonstration. Si $B \in \mathcal{B}''$, alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1} \underbrace{\left(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}'} \right)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

$\square$

COROLLAIRE 2.2. Si $f, g : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ sont mesurables, alors $f + g$ et fg sont mesurables, et f/g est mesurable si g ne s'annule pas.

Démonstration. Soient $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $S : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $\Phi(x) := (f(x), g(x))$ et $S(u, v) = u + v$. Alors Φ est $\mathcal{B}$ -mesurable d'après le Corollaire 1.6, et S est continue donc borélienne. Donc $f + g = S \circ \Phi$ est $\mathcal{B}$ -mesurable par composition. On montre de même que fg et f/g sont mesurables. $\square$

REMARQUE 2.3. C'est vrai aussi pour des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$: si f et g sont mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $f + g$ est mesurable si elle est bien définie en tout point, et f/g est mesurable.

Démonstration. **Exo.** $\square$

COROLLAIRE 2.4. Les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment un espace vectoriel (et même une algèbre).

Démonstration. C'est immédiat par le corollaire 2.2. $\square$

NOTATION. Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions définies sur un même ensemble Ω , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note $\sup_{i \in I} f_i$ et $\inf_{i \in I} f_i$ les fonctions définies par

$$\left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) := \sup_{i \in I} f_i(x) \quad \text{et} \quad \left(\inf_{i \in I} f_i\right)(x) := \inf_{i \in I} f_i(x).$$

PROPOSITION 2.5. *Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable de fonctions mesurables, $f_i : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\sup_{i \in I} f_i$ et $\inf_{i \in I} f_i$ sont mesurables.*

Démonstration. Soit $f := \sup_{i \in I} f_i$. Par définition, si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) > \alpha \iff \exists i \in I : f_i(x) > \alpha.$$

Donc

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{i \in I} \{f_i > \alpha\}.$$

Ainsi, tous les ensembles $\{f > \alpha\}$ sont mesurables, car ce sont des réunions dénombrables d'ensembles mesurables; et donc $f = \sup_{i \in I} f_i$ est mesurable d'après le Corollaire 1.4. Preuve analogue pour $\inf_{i \in I} f_i$ (**exo**). $\square$

Exercice. Montrer que si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de fonctions continues sur un espace métrique Ω , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\sup_{i \in I} f_i$ et $\inf_{i \in I} f_i$ sont boréliennes.

COROLLAIRE 2.6. *Si $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont mesurables, alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables*

COROLLAIRE 2.7. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications mesurables, $f_n : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\overline{\lim} f_n$ et $\underline{\lim} f_n$ sont mesurables.*

Démonstration. C'est évident d'après la proposition puisqu'on a

$$\overline{\lim} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} f_m \quad \text{et} \quad \underline{\lim} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} f_m.$$

$\square$

COROLLAIRE 2.8. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{B})$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f est mesurable. Avec des mots : toute limite simple d'une suite de fonctions mesurables est une fonction mesurable.*

Démonstration. Lorsque les f_n sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, le résultat est évident par le corollaire précédent puisqu'on a $f = \overline{\lim} f_n$. Pour des fonctions f_n à valeurs dans $\mathbb{C}$, on applique le "cas $\overline{\mathbb{R}}$ " aux fonctions $\text{Re}(f_n)$ et $\text{Im}(f_n)$. $\square$

REMARQUE 2.9. En fait, toute limite simple d'une suite d'applications mesurables $f_n : \Omega \rightarrow \Omega'$ à valeurs dans un espace métrique Ω' quelconque est mesurable.

Démonstration. **Exo** non évident. $\square$

Exercice. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction non continue.

3. Fonctions étagées

3.1. Définition et caractérisations. Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

DÉFINITION 3.1. Une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **étagée** si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note $\mathcal{E}(\Omega)$, l'ensemble de toutes les fonctions étagées $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Remarque 0. On devrait écrire $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{B})$.

Remarque 1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, une fonction étagée sur Ω est par définition une fonction borélienne (à valeurs complexes) ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Remarque 2. Les fonctions étagées sont par définition à *valeurs numériques* : elles ne prennent pas les valeurs ∞ et $-\infty$.

Exemple 1. Si $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est étagée.

Démonstration. Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision $(s_0, \dots, s_N)$ de $[a, b]$ (i.e. $a = s_0 < \dots < s_N = b$) telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq N - 1$. Une telle φ est continue par morceaux, donc borélienne ; et comme φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est donc étagée. $\square$

Exemple 2. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est en escalier sur aucun intervalle non trivial $[a, b]$.

Démonstration. Comme $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est borélienne, donc étagée puisqu'elle ne prend que deux valeurs. Mais comme tout intervalle non trivial contient des rationnels et des irrationnels, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide, donc ne peut pas être en escalier sur un intervalle $[a, b]$ non trivial. $\square$

LEMME 3.2. Pour une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est étagée ;
- (2) il existe une partition finie $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ de Ω en ensembles mesurables telle que φ est constante sur chaque Ω_i ;
- (3) il existe $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i} ;$$

- (4) il existe $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) supposons φ étagée, et notons $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les valeurs prises par φ (les α_i étant supposés deux à deux $\neq$). Pour $i = 1, \dots, N$, soit $\Omega_i := \{\varphi = \alpha_i\} = \{x \in \Omega; \varphi(x) = \alpha_i\}$. Les Ω_i forment une partition de Ω , ils sont mesurables car φ est mesurable, et par définition φ est constante sur chaque Ω_i .

(2) $\implies$ (3) est évident : si (2) est vérifié, on peut prendre $n := N$, $E_i := \Omega_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et α_i = la valeur constante de φ sur $E_i = \Omega_i$.

(3) $\implies$ (4) : évident.

(4) $\implies$ (1) : évident aussi ! (Si $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$, alors φ est mesurable car les $\mathbf{1}_{E_i}$ le sont, et φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.) $\square$

COROLLAIRE 3.3. $\mathcal{E}(\Omega)$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices d'ensembles mesurables.

Démonstration. Par définition $\mathcal{E}(\Omega)$ est un espace vectoriel, car les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment un espace vectoriel. Et par (4), $\mathcal{E}(\Omega)$ est engendré par les fonctions indicatrices. $\square$

Remarque. En général, il y a plusieurs façons d'écrire une fonction étagée sous la forme $\sum_1^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$. Par exemple, si on prend $\Omega = \mathbb{R}$, alors $\mathbf{1}_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,1/2[} + \mathbf{1}_{[1/2,1]} = 2\mathbf{1}_{[-1,1]} - \mathbf{1}_{[0,1]} - 2\mathbf{1}_{[-1,0]}$. Cependant, il y a une **écriture canonique** : en notant $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs distinctes prises par φ , on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{\{\varphi=\alpha_i\}}.$$

3.2. Approximation par des fonctions étagées.

THÉORÈME 3.4. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on peut trouver une suite croissante de fonctions étagées positives (φ_n) qui converge simplement vers f (i.e. $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in \Omega$). On dit qu'une telle suite (φ_n) est une **suite approximante** pour f .

Démonstration. On définit d'abord des fonctions ψ_n , $n \in \mathbb{N}^*$ de la façon suivante :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq f(x) < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leq f(x) < \frac{2}{n}, \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } \frac{n-1}{n} < f(x) \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq f(x) < 1 + \frac{1}{n}, \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } 1 + \frac{1}{n} \leq f(x) < 1 + \frac{2}{n}, \\ \vdots & \\ 1 + \frac{n-1}{n} & \text{si } 1 + \frac{n-1}{n} \leq f(x) < 2, \\ 2 & \text{si } 2 \leq f(x) < 2 + \frac{1}{n}, \\ \vdots & \\ n-1 + \frac{n-1}{n} & \text{si } n-1 + \frac{n-1}{n} \leq f(x) < n, \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) \geq n, \\ i + \frac{k}{n} & \text{si } i + \frac{k}{n} \leq f(x) < i + \frac{k+1}{n} \end{cases} \text{ avec } 0 \leq i, k \leq n-1.$$

Les ψ_n ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et elles sont mesurables "par recollement" car pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, tous les ensembles

$$\Omega_{i,k} := \left\{ x \in \Omega; i + \frac{k}{n} \leq f(x) < i + \frac{k+1}{n} \right\} = f^{-1} \left(\left[i + \frac{k}{n}, i + \frac{k+1}{n} \right[\right)$$

sont mesurables et ψ_n est constante sur chacun de ces ensembles ; donc les ψ_n sont étagées. De plus, on a $0 \leq \psi_n(x) \leq f(x)$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega$; et $f(x) \leq \psi_n(x) + \frac{1}{n}$ si $f(x) < n$.

Montrons que $\psi_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $x \in \Omega$: si $f(x) = \infty$ alors $\psi_n(x) = n$ pour tout $n \geq 1$, et donc $\psi_n(x) \rightarrow \infty = f(x)$; et si $f(x) < \infty$, on peut

trouver un entier $N(x)$ tel que $f(x) < N(x)$, et on a alors $0 \leq f(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq N(x)$.

Maintenant, on pose

$$\varphi_n(x) = \max(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)),$$

alors les φ_n sont toujours étagées, la suite (φ_n) est croissante, et elle converge également vers f car $\psi_n \leq \varphi_n \leq f$ pour tout $n \geq 1$. $\square$

REMARQUE 3.5. Si la fonction f est à valeurs réelles et bornée, alors la suite (φ_n) définie dans la preuve du théorème converge en fait *uniformément* vers f .

Démonstration. Avec les notations de la preuve du théorème, l'entier $N(x)$ peut être choisi indépendant de $x \in \Omega$. Donc (ψ_n) converge uniformément vers f , et donc (φ_n) aussi puisque $\psi_n \leq \varphi_n \leq f$. $\square$

Intégration “abstraite”

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré fixé une fois pour toutes.

1. Intégrale des fonctions étagées

1.1. Fonctions étagées positives.

NOTATION. On pose $\mathcal{E}^+(\Omega) := \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ étagée} \geq 0\}$.

DÉFINITION 1.1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, d'écriture canonique

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{\{\varphi=\alpha_i\}}.$$

L'intégrale de φ sur Ω par rapport à μ est le nombre $\int_{\Omega} \varphi d\mu \in [0, \infty]$ défini par

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(\{\varphi = \alpha_i\}).$$

AUTRES NOTATIONS. On peut aussi écrire $\int_{\Omega} \varphi(x) d\mu(x)$; ou $\int_{\Omega} \varphi$ si on veut une notation la plus courte possible.

EXEMPLE. Supposons que Ω soit un ensemble fini, et soit μ_c la mesure de comptage sur Ω . Alors toute fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est étagée, et on a

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_c = \sum_{x \in \Omega} \varphi(x).$$

Autrement dit : si $c_1, \dots, c_N$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\sum_{i=1}^N c_i = \int_{\{1, \dots, N\}} \varphi d\mu_c,$$

où $\varphi : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction définie par $\varphi(i) = c_i$ pour $i = 1, \dots, N$.

Démonstration. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les valeurs distinctes prises par φ , et pour $i = 1, \dots, N$, posons $\Omega_i := \{\varphi = \alpha_i\}$. Alors l'écriture canonique de φ est $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{\Omega_i}$, et donc

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_c = \sum_{i=1}^N \alpha_i \# \Omega_i$$

Par ailleurs, comme les Ω_i forment une partition de Ω , on a

$$\sum_{x \in \Omega} \varphi(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{x \in \Omega_i} \underbrace{\varphi(x)}_{\alpha_i}$$

Donc on obtient

$$\sum_{x \in \Omega} \varphi(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \# \Omega_i = \int_{\Omega} \varphi d\mu_c.$$

□

Interprétation. Si on veut compter les sous qu’on a dans son porte-monnaie, on peut additionner une à une les valeurs des différentes pièces ; mais on peut aussi commencer par regrouper les pièces selon leur valeur, puis compter le nombre de pièces ayant une valeur donnée, multiplier par la valeur en question, et tout ajouter.

Remarque 1. Pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \Omega$, on a $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$.

Remarque 2. A cause de la convention $0 \times \infty = 0$, on a $\int_{\Omega} 0 d\mu = 0$.

Remarque 3. On peut très bien avoir $\int_{\Omega} \varphi d\mu = \infty$; et on peut aussi avoir $\int_{\Omega} \varphi d\mu = 0$ même si $\varphi \neq 0$. Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda_1$, alors $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} d\lambda_1 = \lambda_1(\mathbb{R}) = \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda_1 = \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$.

Exercice. Montrer qu’on a $\int_{\Omega} \varphi d\mu < \infty$ si et seulement si $\mu(\{x; \varphi(x) \neq 0\}) < \infty$, et $\int_{\Omega} \varphi d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{x; \varphi(x) \neq 0\}) = 0$.

LEMME 1.2. *L’intégrale des fonctions étagées positives possède les propriétés suivantes.*

(1) **Homogénéité** : si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\int_{\Omega} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{\Omega} \varphi$.

(2) **Additivité** : si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, alors $\int(\varphi + \psi) = \int\varphi + \int\psi$.

Démonstration. (1) est évident (exo). Montrons (2).

Vocabulaire : si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, on appellera **partition adaptée à φ** toute partition finie $(\Omega_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ de Ω en ensembles mesurables telle que φ soit constante sur chaque Ω_{λ} .

FAIT 1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$. Si $(\Omega_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ est une partition adaptée à φ et si on note c_{λ} la valeur constante de φ sur Ω_{λ} , alors $\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda} \mu(\Omega_{\lambda})$.

Preuve du Fait 1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les valeurs distinctes prises par φ . Pour $i = 1, \dots, N$, posons $\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda; c_{\lambda} = \alpha_i\}$. Alors l’écriture canonique de φ est

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}, \quad \text{où } E_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} \Omega_{\lambda}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi d\mu &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} \Omega_{\lambda} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \mu(\Omega_{\lambda}) \quad \text{car les } \Omega_{\lambda} \text{ sont disjoints} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda \in \Lambda_i} c_{\lambda} \mu(\Omega_{\lambda}) \quad \text{car } \alpha_i = c_{\lambda} \text{ si } \lambda \in \Lambda_i \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda} \mu(\Omega_{\lambda}) \quad \text{car } (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N) \text{ est une partition de } \Lambda. \end{aligned}$$

□

FAIT 2. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, on peut trouver une partition $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ adaptée à la fois à φ et à ψ .

Preuve du Fait 2. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une partition adaptée à φ , et $(B_j)_{j \in J}$ une partition adaptée à ψ . Si on pose $\Omega_{i,j} := A_i \cap B_j$, alors les $\Omega_{i,j}$ sont mesurables, deux-à-deux disjoints, et on a $\bigcup_{i,j} \Omega_{i,j} = \Omega$. Donc les $\Omega_{i,j}$ non vides forment une partition de Ω , qui est adaptée à φ et à ψ par définition. □

Maintenant, on peut montrer (2). Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, et soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition adaptée à la fois à φ et à ψ donnée par le Fait 2. Pour $\lambda \in \Lambda$, notons c_λ et d_λ les valeurs constantes de φ et ψ sur Ω_λ . Alors $\varphi + \psi \equiv c_\lambda + d_\lambda$ sur Ω_λ , $\lambda \in \Lambda$, donc on a d'après le Fait 1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi + \psi) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda + d_\lambda) \mu(\Omega_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \mu(\Omega_\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda \mu(\Omega_\lambda) \\ &= \int_{\Omega} \varphi + \int_{\Omega} \psi. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 1.3. Si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, alors, quelle que soit la manière d'écrire

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{avec } E_i \in \mathcal{B} \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}^+,$$

on a

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

Démonstration. Par le lemme, on a $\int_{\Omega} \varphi = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$. □

COROLLAIRE 1.4. L'intégrale $\int_{\Omega} \varphi$ est **croissante** par rapport à φ : Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}^+(\Omega)$ et si $\varphi_1 \leq \varphi_2$, alors $\int_{\Omega} \varphi_1 \leq \int_{\Omega} \varphi_2$.

Démonstration. La fonction $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ est étagée (les fonctions étagées forment un espace vectoriel), et elle est positive par hypothèse; autrement dit $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$. Comme $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi$, on a donc $\int_{\Omega} \varphi_2 = \int_{\Omega} \varphi_1 + \int_{\Omega} \varphi \geq \int_{\Omega} \varphi_1$. □

DÉFINITION 1.5. (intégrale sur un sous-ensemble)

Si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, on pose pour tout ensemble mesurable $E \subset \Omega$:

$$\int_E \varphi d\mu := \int_{\Omega} \mathbf{1}_E \varphi d\mu.$$

Exercice 1. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, alors l'intégrale $\int_E \varphi$ est croissante par rapport à E : si $E_1 \subseteq E_2$, alors $\int_{E_1} \varphi \leq \int_{E_2} \varphi$.

Exercice 2. Montrer que si $A, B \in \mathcal{B}$ vérifient $A \cap B = \emptyset$ et si $\varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega)$, alors

$$\int_{A \cup B} \varphi = \int_A \varphi + \int_B \varphi.$$

1.2. Fonctions étagées quelconques.

DÉFINITION 1.6. Supposons que la mesure μ soit finie, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$. Pour toute fonction étagée $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, d'écriture canonique $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{\{\varphi=\alpha_i\}}$, on pose

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu := \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(\{\varphi = \alpha_i\}).$$

Remarque. La définition a bien un sens : comme $\mu(\{\varphi = \alpha_i\}) < \infty$ pour tout i , les $\alpha_i \mu(\{\varphi = \alpha_i\})$ sont des nombres complexes bien définis.

PROPOSITION 1.7. L'application $\varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$. De plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on a $|\int_{\Omega} \varphi d\mu| \leq \int_{\Omega} |\varphi| d\mu$.

Démonstration. La linéarité (qui n'est pas évidente) se démontre exactement de la même façon que pour les fonctions étagées ≥ 0 .

Si $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{E_i}$ avec des $E_i \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints, alors $|\varphi| = \sum_{i=1}^n |c_i| \mathbf{1}_{E_i}$; donc $\int_{\Omega} |\varphi| d\mu = \sum_{i=1}^n |c_i| \mu(E_i)$ par linéarité, et donc

$$\left| \int_{\Omega} \varphi d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \mu(E_i) = \int_{\Omega} |\varphi| d\mu.$$

□

COROLLAIRE 1.8. Si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors, quelle que soit la manière d'écrire $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ avec $E_i \in \mathcal{B}$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$ on a

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

EXEMPLE. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors (d'après un exo déjà posé), X est une fonction étagée ; et par définition, on a

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X).$$

Démonstration. Si on note $a_1, \dots, a_N$ les valeurs prises par X , alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{P}(X = a_i)$, qui est bien égal à $\int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ puisque $X = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{X=a_i}$. □

Exercice. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier, alors

$$\int_{[a,b]} \varphi d\lambda_1 = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (\text{intégrale au sens "usuel"}).$$

2. Intégrale des fonctions mesurables positives

2.1. Définitions, remarques et exemples.

DÉFINITION 2.1. Une **fonction mesurable positive** sur Ω est une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$. Attention : la valeur ∞ est autorisée.

NOTATION. $\mathfrak{M}^+(\Omega) = \{\text{fonctions mesurables positives sur } \Omega\}$.

DÉFINITION 2.2. Pour toute fonction $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on pose

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi d\mu; \varphi \in \mathcal{E}^+(\Omega), 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

On peut aussi écrire $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$, ou $\int_{\Omega} f$.

Remarque 1. Par définition, $\int_{\Omega} f$ est un nombre positif, i.e. $\int_{\Omega} f \in [0, \infty]$.

Remarque 2. Si f est étagée positive, on retrouve la définition donnée dans la section précédente.

Démonstration. C'est clair par *croissance* de l'intégrale pour les fonctions étagées positives (Corollaire 1.4). $\square$

Remarque 3. L'intégrale $\int_{\Omega} f$ est **croissante** par rapport à f : si $f, g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ et si $f \leq g$, alors $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$.

Démonstration. Si $f \leq g$, alors il y a plus de fonctions étagées positives minorant g que de fonctions étagées positives minorant f , donc le sup apparaissant dans la définition est plus grand pour g que pour f . $\square$

EXEMPLE 1. Soit Ω un ensemble quelconque, et soit μ_c la mesure de comptage sur Ω . Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_{\Omega} f d\mu_c = \sum_{x \in \Omega} f(x).$$

Démonstration. $\square$

EXEMPLE 2. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne ≥ 0 . Si f est *intégrable au sens de Riemann* sur $[a, b]$, alors

$$\int_{[a, b]} f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. $\square$

EXERCICE 2.3. Montrer que si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors $\int_{\Omega} (\lambda f) = \lambda \int_{\Omega} f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

2.2. Le “Théorème de convergence monotone”.

THÉORÈME 2.4. (convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, $f_n : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow [0, \infty]$. On suppose que la suite (f_n) est croissante, i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega$. Alors, en posant $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (qui existe dans $[0, \infty]$), la fonction $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est mesurable et on a

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Autrement dit, on peut toujours permuter la limite et l'intégrale dès lors qu'on a affaire à une suite croissante de fonctions positives :

$$\int_{\Omega} (\lim f_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Démonstration.

FAIT. Soit φ une fonction étagée positive sur Ω . Si (B_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables telle que $\bigcup_0^\infty B_n = \Omega$, alors $\int_{B_n} \varphi d\mu \rightarrow \int_\Omega \varphi d\mu$ quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve du Fait. On écrit $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$, où les E_i sont mesurables et $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$. Alors $\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i)$. De plus, on a $\int_{B_n} \varphi d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{B_n} \varphi d\mu$, et $\mathbf{1}_{B_n} \varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{B_n \cap E_i}$; donc

$$\int_{B_n} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(B_n \cap E_i).$$

Mais pour $i \in \{1, \dots, N\}$ fixé, la suite $(B_n \cap E_i)$ croît vers E_i . Donc $\mu(B_n \cap E_i) \rightarrow \mu(E_i)$ pour $i = 1, \dots, N$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc $\int_{B_n} \varphi d\mu \rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(E_i) = \int_\Omega \varphi d\mu$. $\square$

Maintenant, on peut démontrer le théorème de convergence monotone.

La fonction $f = \lim f_n$ est mesurable car les f_n le sont, et $f \geq 0$.

Comme la suite (f_n) est croissante, la suite des intégrales $(\int_\Omega f_n)$ est croissante, donc $\lim \int_\Omega f_n$ existe dans $[0, \infty]$. De plus, on a $f_n \leq f$ pour tout n puisque (f_n) croît vers f , donc $\int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f$ pour tout n et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Dnc il faut juste montrer l'inégalité $\int_\Omega f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

Par définition de l'intégrale $\int_\Omega f d\mu$, il s'agit de vérifier qu'on a

$$\int_\Omega \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

pour toute fonction φ étagée vérifiant $0 \leq \varphi \leq f$. On fixe φ .

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$B_n := \{f_n \geq (1 - \varepsilon) \varphi\} = \{x \in \Omega; f_n(x) \geq (1 - \varepsilon) \varphi(x)\}.$$

Les B_n sont des ensembles mesurables car $B_n = \{g_n \geq 0\}$, où $g_n := f_n - (1 - \varepsilon) \varphi$ est une fonction mesurable bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la suite (B_n) est croissante car la suite (f_n) l'est. Enfin, on a

$$\bigcup_{n=0}^\infty B_n = \Omega.$$

En effet : soit $x \in \Omega$ quelconque. Si $\varphi(x) = 0$ alors $x \in B_0$ car $f_0 \geq 0$. Si $\varphi(x) > 0$, alors $\varphi(x) > (1 - \varepsilon) \varphi(x)$, donc $f(x) > (1 - \varepsilon) \varphi(x)$ puisque $f \geq \varphi$, et donc on peut trouver un entier n tel que $f_n(x) > (1 - \varepsilon) \varphi(x)$ (d'où $x \in B_n$) puisque $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

D'après le Fait, on en déduit qu'on a

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} \varphi d\mu.$$

Mais par définition de B_n , on a $\mathbf{1}_{B_n} \varphi \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \mathbf{1}_{B_n} f_n \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)} f_n$; et donc

$$\int_{B_n} \varphi d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{B_n} \varphi d\mu \leq \int_\Omega \frac{1}{1 - \varepsilon} f_n d\mu = \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_\Omega f_n d\mu$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient ainsi

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$; d'où $\int_{\Omega} \varphi \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$ en faisant maintenant tendre ε vers 0. $\square$

COROLLAIRE 2.5. *Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors $\int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n$, quelle que soit la suite approximante $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{E}^+(\Omega)$ pour f .*

COROLLAIRE 2.6. *L'intégrale des fonctions mesurables positives possède les propriétés suivantes.*

- (1) **Homogénéité** : si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors $\int_{\Omega} (\lambda f) = \lambda \int_{\Omega} f$ pour tout $\lambda \in [0, \infty]$.
- (2) **Additivité** : si $f, g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors $\int_{\Omega} (f + g) = \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g$.

Démonstration. (1) On a déjà vu que le résultat est vrai si $\lambda < \infty$ (Exercice 2.3); il reste donc à traiter le cas $\lambda = \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n := n f$. La suite (f_n) est croissante car f est positive, et $f_n(x) \rightarrow \infty \times f(x)$ pour tout $x \in \Omega$, grâce à la convention $\infty \times 0 = 0$. Par convergence monotone et le cas $\lambda < \infty$, on a donc

$$\int_{\Omega} (\infty \times f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (n f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\Omega} f = \infty \times \int_{\Omega} f,$$

où on a à nouveau utilisé la convention $\infty \times 0 = 0$.

(2) Soient $(\varphi_n), (\psi_n) \subseteq \mathcal{E}^+(\Omega)$ des suites approximantes pour f et g . Alors $(\varphi_n + \psi_n)$ est une suite approximante pour $f + g$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varphi_n + \psi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \varphi_n + \int_{\Omega} \psi_n \right) \\ &= \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la deuxième ligne l'additivité de l'intégrale pour les fonctions étagées. $\square$

REMARQUE. Il est très important de retenir le principe de la démonstration précédente : si on veut démontrer une certaine propriété concernant l'intégrale d'une fonction positive quelconque, il suffit de le faire pour une fonction étagée; la conclusion sera alors "gratuite" par approximation et convergence monotone.

COROLLAIRE 2.7. *Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_k \, d\mu.$$

Démonstration. La fonction $f := \sum_0^\infty u_k$ est bien définie (à valeurs dans $[0, \infty]$), et on a $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ où $f_n := \sum_{k=0}^n u_k$. La suite (f_n) est croissante car les u_k sont positives, donc on a par convergence monotone et additivité de l'intégrale :

$$\int_\Omega f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_\Omega u_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega u_k.$$

□

2.3. Intégrale sur un sous-ensemble. Comme pour les fonctions étagées ≥ 0 , si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on pose pour tout ensemble mesurable $E \subset \Omega$:

$$\int_E f d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E f d\mu.$$

Remarque 1. Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors l'intégrale $\int_E f d\mu$ est croissante par rapport à E : si $E_1 \subseteq E_2$, alors $\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f$.

Démonstration. On a $\mathbf{1}_{E_1} f \leq \mathbf{1}_{E_2} f$ car $f \geq 0$; d'où le résultat par croissance de l'intégrale par rapport à la fonction. □

Remarque 2. Soient $f, g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, et soit $E \in \mathcal{B}$. Si $f \leq g$ sur E , alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$; et donc, si $f = g$ sur E alors $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Démonstration. **Micro-exo.** □

LEMME 2.8. Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on définit une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$ en posant

$$\nu_f(A) := \int_A f d\mu.$$

On dit que ν_f est la **mesure de densité** f par rapport à la mesure μ .

Démonstration. On a $\nu_f(\emptyset) = 0$ car $\mathbf{1}_\emptyset f = 0$. Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=0}^\infty A_k} = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{1}_{A_k};$$

donc

$$\nu_f\left(\bigcup_{k=0}^\infty A_k\right) = \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{1}_{A_k} f\right) d\mu = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega \mathbf{1}_{A_k} f = \sum_{k=0}^\infty \nu_f(A_k).$$

□

COROLLAIRE 2.9. Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ et si $A, B \subseteq \Omega$ sont des ensembles mesurables tels $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Exercice. Soit $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on a $\int_\Omega g d\nu_f = \int_\Omega g f d\mu$.

LEMME 2.10. (inégalité de Markov)

Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on a pour tout nombre réel $\alpha > 0$:

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{f \geq \alpha\}} f \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Démonstration. Posons $A = \{f \geq \alpha\}$. Par définition de A , on a $f \geq \alpha \mathbf{1}$ sur A , et donc (par croissance de l'intégrale)

$$\int_A f \, d\mu \geq \int_A \alpha \mathbf{1} \, d\mu = \alpha \mu(A);$$

d'où la première inégalité. La seconde est évidente par croissance de $\int_E f$ par rapport à E . $\square$

Exercice. On suppose que $\mu(\Omega) < \infty$. Soit (α_n) une suite de réels positifs telle que, pour une certaine constante $C > 0$, la série $\sum e^{-C\alpha_n}$ est convergente. Montrer que si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, alors $\sum_0^\infty \mu(\{|u| \geq \alpha_n\}) < \infty$. (Commencer par observer qu'on a $\int_{\Omega} e^{|u|} \, d\mu < \infty$.)

2.4. Rôle des ensembles de mesure nulle.

RAPPEL. La plupart du temps, on écrit “presque partout”, ou simplement “pp”, au lieu de “ μ -presque partout”.

LEMME 2.11. Pour toute fonction $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, on a l'équivalence

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 \iff f(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Démonstration. Supposons qu'on ait $f(x) = 0$ pp, et posons $E := \{f = 0\} = \{x; f(x) = 0\}$. Alors E est mesurable, et $\mathbf{1}_E f = 0$ par définition. Donc $f = \mathbf{1}_{\Omega \setminus E} f$, et donc

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E} f \, d\mu \leq \left(\int_{\Omega} \infty \times \mathbf{1}_{\Omega \setminus E} \right) d\mu = \infty \times \mu(\Omega \setminus E) = 0.$$

Inversement, supposons qu'on ait $\int_{\Omega} f \, d\mu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par Markov avec $\alpha = 1/n$:

$$\mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \times \int_{\Omega} f \, d\mu = 0.$$

Donc $\mu(\{f \geq 1/n\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit $f(x) < 1/n$ pp. Comme $f(x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^* : f(x) < 1/n$ (puisque $f \geq 0$), on a donc $f(x) = 0$ pp. $\square$

Remarque 1. Attention : le lemme ne marche que pour une fonction $f \geq 0$.

Remarque 2. On ne peut pas espérer avoir $f(x) = 0$ partout si $\int_{\Omega} f \, d\mu = 0$: par exemple, $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda_1 = 0$.

Exercice. Soit I un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue positive telle que $\int_I f \, d\lambda_1 = 0$, alors $f = 0$.

COROLLAIRE 2.12. Si $N \in \mathcal{B}$ vérifie $\mu(N) = 0$, alors $\int_N f \, d\mu = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, et donc $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} f \, d\mu$.

Démonstration. On a $\int_N f d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_N f d\mu = 0$ car $\mathbf{1}_N f = 0$ pp. Donc $\int_\Omega f = \int_N f + \int_{\Omega \setminus N} f = \int_{\Omega \setminus N} f$. $\square$

COROLLAIRE 2.13. *Si $f, g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ vérifient $f(x) = g(x)$ presque partout, alors $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$.*

Démonstration. Soit $E := \{x \in \Omega; f(x) = g(x)\}$. Alors E est mesurable car f et g le sont (red), et on a $\mu(\Omega \setminus E) = 0$. Donc $\int_\Omega f = \int_E f$ et $\int_\Omega g = \int_E g$ par le corollaire précédent, d'où le résultat puisque $f \equiv g$ sur E et donc $\mathbf{1}_E f = \mathbf{1}_E g$. $\square$

COROLLAIRE 2.14. *Si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, alors on a pour toute fonction borélienne $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$:*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_{]a,b]} f d\lambda_1 = \int_{[a,b[} f d\lambda_1 = \int_{]a,b[} f d\lambda_1.$$

Démonstration. Comme $\lambda_1(\{a\}) = 0 = \lambda_1(\{b\})$, on a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_{\{a\}} f d\lambda_1 + \int_{]a,b]} f d\lambda_1 + \int_{\{b\}} f d\lambda_1 = \int_{]a,b[} f d\lambda_1.$$

Idem pour les autres égalités. $\square$

Exercice. Montrer que si $f, g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ et si $f(x) \leq g(x)$ pp, alors $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$.

LEMME 2.15. *Si $f \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega f d\mu < \infty$, alors $f(x) < \infty$ μ -presque partout.*

Démonstration. Soit $N := \{f = \infty\} = \{x; f(x) = \infty\}$. L'ensemble N est mesurable et on a

$$\infty > \int_\Omega f d\mu \geq \int_N f d\mu = \int_N \infty \times \mathbf{1}_N d\mu = \infty \times \mu(N);$$

donc la seule possibilité pour $\mu(N)$ est de valoir 0. $\square$

Remarque 1. Le “presque partout” est indispensable : il n'y a aucune raison qu'on ait $f(x) < \infty$ partout.

Remarque 2. Le lemme dit “si... alors”, et pas “si et seulement si” : on peut évidemment avoir $f(x) < \infty$ partout et cependant $\int_\Omega f d\mu = \infty$. Par exemple, $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} d\lambda_1 = \infty$.

3. Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes

3.1. Fonctions intégrables et définition de l'intégrale.

3.1.1. Fonction à valeurs réelles.

NOTATION. Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on définit deux fonctions f^+ et f^- par

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0; \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0).$$

FAIT 3.1. *f^+ et f^- sont des fonctions positives à valeurs finies, et on a*

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

EXERCICE 3.2. Montrer qu'on a $f^+ \times f^- = 0$, et que l'écriture $f = f^+ - f^-$ est la seule écriture possible de f sous la forme $f = v - u$ avec $u, v \geq 0$ vérifiant $uv = 0$.

Remarque. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors f^+ , f^- et $|f|$ sont des fonctions mesurables positives, donc $\int_{\Omega} f^+ d\mu$, $\int_{\Omega} f^- d\mu$ et $\int_{\Omega} |f|$ sont des nombres positifs bien définis, éventuellement égaux à ∞ .

Démonstration. On a $f^+ = \max(f, 0)$. La fonction $(u, v) \mapsto \max(u, v)$ est continue (exo), donc borélienne de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto (f(x), 0)$ est mesurable car f et 0 sont mesurables; donc f^+ est mesurable par composition. On montre de même que f^- est mesurable. $\square$

DÉFINITION 3.3. Soit $f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On dit que f est **intégrable sur Ω par rapport à μ** si on a $\int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty$ et $\int_{\Omega} f^- d\mu < \infty$. Dans ce cas, on pose

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

On peut aussi écrire $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$, ou $\int_{\Omega} f$.

Remarque 1. Si f est intégrable, alors $\int_{\Omega} f d\mu$ est un nombre réel bien défini. Autrement dit : l'intégrale d'une fonction intégrable ne peut pas valoir ∞ ou $-\infty$.

Remarque 2. Si f est une fonction positive, alors $f = f^+$ et $f^- = 0$, donc f est intégrable au sens précédent si et seulement si on a $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$, et dans ce cas $\int_{\Omega} f d\mu$ au sens de la définition est bien égal à $\int_{\Omega} f d\mu$ au sens de la section précédente.

EXEMPLE. La fonction constante **1** est intégrable par rapport à μ si et seulement si la mesure μ est finie, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$.

Démonstration. C'est évident puisque $\int_{\Omega} \mathbf{1} d\mu = \mu(\Omega)$. $\square$

3.1.2. Fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 3.4. On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **intégrable sur Ω par rapport à μ** si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, on pose

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

On peut aussi écrire $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$ ou $\int_{\Omega} f$.

REFORMULATION. Si $f = u + iv$ avec u, v à valeurs réelles, alors

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} (u + iv) = \int_{\Omega} u + i \int_{\Omega} v.$$

On a donc

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} f \right) = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int_{\Omega} f \right) = \int_{\Omega} \operatorname{Im}(f).$$

3.1.3. Caractérisation de l'intégrabilité.

PROPOSITION 3.5. Une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à μ si et seulement si on a

$$\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Démonstration. Supposons d'abord f à valeurs réelles. Dans ce cas, f est intégrable si et seulement si $\int_{\Omega} f^+ + \int_{\Omega} f^- < \infty$ car $\int_{\Omega} f^+$ et $\int_{\Omega} f^-$ sont des nombres positifs. Mais comme $|f| = f^+ + f^-$, on a $\int_{\Omega} f^+ + \int_{\Omega} f^- = \int_{\Omega} |f|$ par additivité de l'intégrale des fonctions positives, d'où le résultat dans ce cas.

Si f est à valeurs complexes, on écrit $f = u + iv$ avec u et v à valeurs réelles. On a alors $|u| \leq |f|$ et $|v| \leq |f|$; donc $\int_{\Omega} |u| \leq \int_{\Omega} |f|$ et $\int_{\Omega} |v| \leq \int_{\Omega} |f|$ par croissance de l'intégrale des fonctions positives, et donc u et v sont intégrables (i.e. f est intégrable) si $\int_{\Omega} |f| < \infty$. Inversement, si f est intégrable alors $\int_{\Omega} |f| \leq \int_{\Omega} (|u| + |v|) = \int_{\Omega} |u| + \int_{\Omega} |v| < \infty$, où on a utilisé la croissance et l'additivité de l'intégrale des fonctions positives. $\square$

COROLLAIRE 3.6. Si la mesure μ est finie, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$, alors toute fonction mesurable bornée $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à μ .

Démonstration. On a $\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f\|_{\infty} d\mu = \|f\|_{\infty} \times \mu(\Omega) < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 3.7. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors toute fonction borélienne bornée $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à (la restriction de) la mesure de Lebesgue λ_1 .

Démonstration. C'est évident puisque $\lambda_1(I) = |I| < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 3.8. Une fonction étagée $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur Ω si et seulement si elle est de la forme $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ avec $\mu(E_i) < \infty$ pour $i = 1, \dots, N$.

Démonstration. **Exo.** $\square$

3.2. Intégrabilité sur un sous-ensemble. Soit $E \subseteq \Omega$ un ensemble mesurable. On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est *intégrable sur E* par rapport à μ si la fonction $\mathbf{1}_E f$ est intégrable sur Ω ; et dans ce cas on pose

$$\int_E f d\mu := \int_{\Omega} \mathbf{1}_E f d\mu.$$

REMARQUE 1. (f intégrable sur E) $\iff \int_E |f| d\mu < \infty$.

Démonstration. **Exo.** $\square$

REMARQUE 2. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur Ω , alors elle est intégrable sur tout ensemble mesurable $E \subseteq \Omega$.

Démonstration. Évident puisque $\int_E |f| \leq \int_{\Omega} |f|$. $\square$

3.3. Propriétés de l'intégrale.

NOTATION. On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ intégrables par rapport à μ . Pour abrégé, on écrira souvent $\mathcal{L}^1$ au lieu de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Donc

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables; } \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty \right\}.$$

FAIT 3.9. $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $f+g$ et λf sont mesurables. Par croissance et additivité de l'intégrale des fonctions positives, on a

$$\int_{\Omega} |f+g| \leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) = \int_{\Omega} |f| + \int_{\Omega} |g| < \infty;$$

donc $f+g \in \mathcal{L}^1$. De même, on a par homogénéité : $\int_{\Omega} |\lambda f| = |\lambda| \times \int_{\Omega} |f| < \infty$, donc $\lambda f \in \mathcal{L}^1$. □

THÉORÈME 3.10. L'intégrale possède les propriétés suivantes.

(1) **Linéarité** : si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_{\Omega} (f+g) = \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (\lambda f) = \lambda \int_{\Omega} f.$$

(2) **Croissance** : si $f, g \in \mathcal{L}^1$ sont à valeurs réelles et si $f \leq g$, alors $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$.

(3) **Majoration du module** : si $f \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f|.$$

Démonstration. (1) (i) Montrons que $\int_{\Omega} (f+g) = \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g$.

Si f et g sont réelles, on écrit $f = f^+ - f^-$ et $g = g^+ - g^-$. On a alors deux façons d'écrire $f+g$, à savoir $(f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$. Donc

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Par additivité de l'intégrale pour les fonctions positives, on en déduit

$$\int_{\Omega} (f+g)^+ + \int_{\Omega} f^- + \int_{\Omega} g^- = \int_{\Omega} (f+g)^- + \int_{\Omega} f^+ + \int_{\Omega} g^+;$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f+g) &= \int_{\Omega} (f+g)^+ - \int_{\Omega} (f+g)^- = \left(\int_{\Omega} f^+ + \int_{\Omega} g^+ \right) - \left(\int_{\Omega} f^- + \int_{\Omega} g^- \right) \\ &= \left(\int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^- \right) + \left(\int_{\Omega} g^+ - \int_{\Omega} g^- \right) \\ &= \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g. \end{aligned}$$

Si f et g sont à valeurs complexes, on applique le “cas réel” aux parties réelles et imaginaires de f et g (exo).

(ii) Montrons qu'on a $\int_{\Omega} (\lambda f) = \lambda \int_{\Omega} f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Si $f \geq 0$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on le sait.

- Si f est réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ et $(\lambda f)^- = \lambda f^-$; donc $\int_{\Omega}(\lambda f) = \int_{\Omega} \lambda f^+ - \int_{\Omega} \lambda f^- = \lambda (\int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-) = \lambda \int_{\Omega} f$, où a utilisé le “cas positif”.

- Si f est réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^-$, alors $\int_{\Omega} \lambda f + \int_{\Omega}(-\lambda f) = \int_{\Omega}((\lambda f) + (-\lambda f)) = 0$ par additivité; donc $\int_{\Omega}(\lambda f) = -\int_{\Omega}(-\lambda f)$, et donc $\int_{\Omega}(\lambda f) = \lambda \int_{\Omega} f$ puisque $\int_{\Omega}(-\lambda f) = (-\lambda) \int_{\Omega} f$ par le cas précédent.

- Si f est à valeurs complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$: on applique le “cas réel” en écrivant $f = u + iv$ (**exo**).

- Pour conclure : il suffit de montrer que si f est à valeurs complexes, alors $\int_{\Omega}(if) = i \int_{\Omega} f$. On écrit $f = u + iv$. Alors $if = -v + iu$, donc $\int_{\Omega}(if) = \int_{\Omega}(-v) + i \int_{\Omega} u = -\int_{\Omega} v + i \int_{\Omega} u = i (\int_{\Omega} u + i \int_{\Omega} v) = i \int_{\Omega} f$.

(2) On a $g - f \geq 0$, donc $\int_{\Omega} g - \int_{\Omega} f = \int_{\Omega}(g - f) \geq 0$ où on a utilisé la linéarité.

(3) (i) Si f est à valeurs réelles, c’est “immédiat” : on a $-|f| \leq f \leq |f|$, donc

$$-\int_{\Omega} |f| \leq \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} |f|$$

par croissance et linéarité; autrement dit $|\int_{\Omega} f| \leq \int_{\Omega} |f|$.

(ii) Pour une fonction f à valeurs complexes, ce n’est pas immédiat. Idée : choisir un nombre complexe ω tel que $|\omega| = 1$ et $|\int_{\Omega} f| = \omega \int_{\Omega} f$. Comme $|\int_{\Omega} f|$ est un nombre réel, on a alors (par linéarité de l’intégrale)

$$\left| \int_{\Omega} f \right| = \operatorname{Re} \left(\omega \int_{\Omega} f \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} \omega f \right) = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\omega f);$$

d’où $|\int_{\Omega} f| \leq \int_{\Omega} |f|$ par croissance de l’intégrale des fonctions à valeurs réelles, car $\operatorname{Re}(\omega f) \leq |\omega f| = |f|$. $\square$

COROLLAIRE 3.11. Si $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction étagée intégrable, alors, quelle que soit la façon d’écrire $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ avec $E_i \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mu(E_i) < \infty$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_{\Omega} \varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

Démonstration. Comme $\mu(E_i) < \infty$ pour tout i , les fonctions $\mathbf{1}_{E_i}$ sont dans $\mathcal{L}^1$. Donc OK par linéarité. $\square$

COROLLAIRE 3.12. Si $f \in \mathcal{L}^1$ et si $A, B \subseteq \Omega$ sont deux ensembles mesurables tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Démonstration. Comme $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbf{1}_{A \cup B} f = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f$, donc $\int_{A \cup B} f = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A \cup B} f = \int_{\Omega} (\mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f) = \int_A f + \int_B f$ par linéarité. $\square$

3.4. Rôle du “presque partout”.

LEMME 3.13. Soient $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$ deux fonctions mesurables. On suppose qu’on a $f_1(x) = f_2(x)$ μ -presque partout.

(1) Si f_1 et f_2 sont positives, alors $\int_{\Omega} f_1 d\mu = \int_{\Omega} f_2 d\mu$.

(2) f_1 est intégrable par rapport à μ si et seulement si f_2 l’est; et dans ce cas, on a $\int_{\Omega} f_1 d\mu = \int_{\Omega} f_2 d\mu$.

Démonstration. (1) a déjà été vu.

Comme $|f_1| = |f_2|$ presque partout, on a $\int_{\Omega} |f_1| d\mu = \int_{\Omega} |f_2| d\mu$, donc $(f_1 \text{ intégrable}) \iff (f_2 \text{ intégrable})$. Ensuite, $|\int_{\Omega} f_1 d\mu - \int_{\Omega} f_2 d\mu| = |\int_{\Omega} (f_1 - f_2) d\mu| \leq \int_{\Omega} |f_1 - f_2| d\mu = 0$ car $|f_1 - f_2| = 0$ pp. Donc $\int_{\Omega} f_1 = \int_{\Omega} f_2$. $\square$

LEMME 3.14. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. S'il existe une fonction mesurable $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ telle que $\int_{\Omega} g d\mu < \infty$ et $|f(x)| \leq g(x)$ pp, alors f est intégrable sur Ω .

Démonstration. Par un **exo** posé plus haut, on a $\int_{\Omega} |f| \leq \int_{\Omega} g$, et donc $\int_{\Omega} |f| < \infty$. $\square$

4. Exemples concrets

4.1. Masse de Dirac. Dans cette section, Ω est un ensemble non vide quelconque, $a \in \Omega$ est fixé, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu = \delta_a$, la masse de Dirac au point a :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \ni a \\ 0 & \text{si } A \not\ni a \end{cases} \quad \text{pour tout ensemble } A \subseteq \Omega.$$

PROPOSITION 4.1. Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_{\Omega} f d\delta_a = f(a).$$

Démonstration. Comme “ $x = a$ ” δ_a -presque partout, on a $f(x) = f(a)$ δ_a -presque partout, i.e. $f = f(a) \mathbf{1}$ δ_a -presque partout, donc $\int_{\Omega} f d\delta_a = \int_{\Omega} f(a) \mathbf{1} d\delta_a = f(a) \times \delta_a(\Omega) = f(a)$. $\square$

COROLLAIRE 4.2. Toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à δ_a , et on a

$$\int_{\Omega} f d\delta_a = f(a).$$

Démonstration. Par la proposition appliqué à la fonction positive $|f|$, on a $\int_{\Omega} |f| d\delta_a = |f(a)| < \infty$; donc f est intégrable par rapport à δ_a .

Soit $\mathcal{F}(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Les applications $f \mapsto \int_{\Omega} f d\delta_a$ et $f \mapsto f(a)$ sont des *formes linéaires* sur $\mathcal{F}(\Omega)$; et par la proposition, ces formes linéaires coïncident sur les fonctions positives. Comme les fonctions positives engendrent l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\Omega)$, on a donc bien $\int_{\Omega} f d\delta_a = f(a)$ pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. $\square$

4.2. Mesure de comptage. Dans cette section, Ω est ensemble non vide quelconque, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu = \mu_c$ la mesure de comptage sur Ω .

On a vu que

$$\mu_c(A) = \sum_{x \in \Omega} \delta_x(A) \quad \text{pour tout ensemble } A \subseteq \Omega.$$

PROPOSITION 4.3. Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_{\Omega} f d\mu_c = \sum_{x \in \Omega} f(x).$$

Démonstration.

CAS 1. f étagée.

On écrit

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}^+.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu_c &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_c(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\sum_{x \in \Omega} \delta_x(E_i) \right) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_x(E_i) \right) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \varphi d\delta_x \\ &= \sum_{x \in \Omega} \varphi(x) \quad \text{par la Proposition 4.1 .} \end{aligned}$$

CAS GÉNÉRAL. $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ quelconque.

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite approximante pour f (i.e. une suite croissante de fonctions étagées positives tendant vers f). On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu_c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n d\mu_c \quad \text{par convergence monotone} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in \Omega} \varphi_n(x) \quad \text{par le “cas étagé”} \\ &= \sum_{x \in \Omega} f(x) \quad \text{par convergence monotone pour les sommes .} \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.4. Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur $\mathbb{N}$ par rapport à la mesure de comptage μ_c si et seulement si la série $\sum f(n)$ est absolument convergente, et on a alors

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_c = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Démonstration. Par la Proposition appliquée à la fonction positive $|f|$, on a

$$\int_{\mathbb{N}} |f| d\mu_c = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|;$$

donc f est intégrable par rapport à μ_c si et seulement si $\sum f(n)$ est absolument convergente. La formule souhaitée se déduit alors du “cas positif” et de la linéarité des applications $f \mapsto \sum_0^{\infty} f(n)$ et $f \mapsto \int_{\mathbb{N}} f d\mu_c$. □

4.3. Variables aléatoires discrètes. Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

PROPOSITION 4.5. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète, et écrivons $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$, où I est un ensemble dénombrable et les x_i sont deux à deux différents.

- (1) Si X est positive, alors $\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X)$.
 (2) X est intégrable par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si $\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$, ce qui signifie que X admet une espérance ; et dans ce cas on a à nouveau

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$$

Démonstration. Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on le sait déjà. On suppose donc que X prend une infinité de valeurs, qui permet de noter $\{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

(1) On a $X = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$. Donc, par “intersion série intégrale dans le cas positif”,

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} x_i \mathbf{1}_{\{X=x_i\}} d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

(2) On a $X = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$, donc $|X| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$ car les ensembles $\{X = x_i\}$ sont deux à deux disjoints, et donc $\int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i)$. Par conséquent, X est intégrable si et seulement si $\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$. Ensuite, on a $X^+ = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^+ \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$ et $X^- = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^- \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$, à nouveau car les ensembles $\{X = x_i\}$ sont deux à deux disjoints. Par (1), on en déduit $\int_{\Omega} X^+ d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^+ \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\int_{\Omega} X^- d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^- \mathbb{P}(X = x_i)$; et donc

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X^+ d\mathbb{P} - \int_{\Omega} X^- d\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^+ - x_i^-) \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

□

4.4. Intégrale au sens de Riemann. Dans cette section, Ω est un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et μ est la restriction de la mesure de Lebesgue λ_1 à $\mathcal{B}([a, b])$.

NOTATION. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, on note $\int_a^b f(x) dx$ son intégrale au sens de Riemann. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable par rapport à λ_1 , on note (comme il se doit) $\int_{[a,b]} f d\lambda_1$ son intégrale.

PROPOSITION 4.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne intégrable au sens de Riemann, alors f est intégrable par rapport à λ_1 sur $[a, b]$, et on a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. Comme f est intégrable au sens de Riemann, elle est bornée sur $[a, b]$, donc intégrable par rapport à λ_1 car elle est supposée borélienne et que $\lambda_1([a, b]) < \infty$. Toute la difficulté est de montrer que $\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$.

FAIT. Si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, alors $\int_{[a,b]} \varphi d\lambda_1 = \int_a^b \varphi(x) dx$.

Preuve du Fait. **Exo** déjà posé. □

Comme f est intégrable au sens de Riemann, on peut trouver deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier avec $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx;$$

et donc, par le Fait :

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \psi_n d\lambda_1.$$

Posons alors $\varphi := \sup_{n \geq 0} \varphi_n$ et $\psi := \inf_{n \geq 0} \psi_n$. Les fonctions φ et ψ sont *boréliennes* d'après la Proposition 2.5 du Chapitre 3. De plus, on a $\varphi_0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \psi_0$, donc φ et ψ sont (à valeurs finies et) bornées sur $[a, b]$. En particulier φ et ψ sont intégrables sur $[a, b]$ par rapport à λ_1 ; et on garde en tête que

$$\varphi \leq f \leq \psi.$$

Par croissance de l'intégrale de Lebesgue et comme $\varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_n$, on a

$$\int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} \varphi d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} \psi d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} \psi_n d\lambda_1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda_1$ et $\int_{[a,b]} \psi_n d\lambda_1$ tendent toutes les deux vers $\int_a^b f(x) dx$ par (4.1), on en déduit

$$\int_{[a,b]} \varphi d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} \psi d\lambda_1.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc $\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) d\lambda_1 = 0$; et comme $\psi - \varphi \geq 0$, cela entraîne que $\psi - \varphi = 0$ λ_1 -presque partout. Donc $f = \varphi = \psi$ λ_1 -presque partout puisque $\varphi \leq f \leq \psi$; et donc

$$\int_a^b f d\lambda_1 = \int_{[a,b]} \varphi d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

□

REMARQUE. Une fonction intégrable au sens de Riemann n'est pas nécessairement borélienne. Cependant, la preuve de la proposition montre ceci : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, alors il existe une fonction borélienne bornée $\tilde{f}$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pp, et on a $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} \tilde{f} d\lambda_1$.

CONSÉQUENCE. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable par rapport à λ_1 , on écrira $\int_I f(x) dx$ au lieu de $\int_I f d\lambda_1$. (Autres notations : $\int_I f(t) dt$, $\int_I f(u) du$...) Si $I = (a, b)$, on écrira même souvent $\int_a^b f(x) dx$ au lieu de $\int_{(a,b)} f(x) dx$.

Exercice. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable *bornée*. On pose $m := \inf_{\Omega} f$ et $M := \sup_{\Omega} f$. À toute subdivision pointée $\Sigma = ((J_0, y_0), \dots, (J_{N-1}, y_{N-1}))$ de l'intervalle $[m, M]$ (*i.e.* $(J_0, \dots, J_{N-1})$ est un découpage de $[m, M]$ en intervalles fermés et $y_k \in J_k$), on associe la **somme de Lebesgue**

$$L(f, \Sigma) := \sum_{k=0}^{N-1} \mu(\{f \in J_k\}) y_k .$$

Montrer que $L(f, \Sigma)$ tend vers $\int_{\Omega} f \, d\mu$ quand le “pas” de la subdivision Σ tend vers 0.

Intégration sur un intervalle de $\mathbb{R}$

1. Cadre et notations

- I = un intervalle de $\mathbb{R}$, de nature quelconque.
- “Intégrable” veut dire “intégrable” par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1 .
- On écrit $\int_I f(x) dx$ au lieu de $\int_I f d\lambda_1$.
- Si $I = (a, b)$ avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, on écrit en fait le plus souvent $\int_a^b f(x) dx$, et parfois même $\int_a^b f$.
- On dit qu’une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est **localement intégrable** sur I si elle est intégrable sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Par exemple, toute fonction **continue** $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est localement intégrable sur I : en effet, f est borélienne, et *bornée* sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$. De même, toute fonction **monotone** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable (**exo**).

- La “relation de Chasles”

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f$$

est valable pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ borélienne positive ou localement intégrable, et pour $u, v, w \in I$ vérifiant $u < v < w$. En effet : on a $\int_u^w f = \int_{[u,w]} f = \int_{[u,v] \cup]v,w]} f = \int_{[u,v]} f + \int_{]v,w]} f = \int_u^v f + \int_v^w f$.

- Si $u, v \in I$ avec $u < v$, on pose

$$\int_v^u f(x) dx := - \int_u^v f(x) dx.$$

Alors : la relation de Chasles est valable pour tous $u, v, w \in I$, quel que soit l’ordre dans lesquels les points sont rangés, à *condition* que la fonction f soit localement intégrable sur I .

Exercice. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction borélienne. Montrer que f est localement intégrable si et seulement si, pour tout $t \in I$, on peut trouver un voisinage V de t dans I tel que f est intégrable sur V .

2. Choses à ne surtout pas oublier

- **Théorème fondamental de l’analyse :**

- Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F]_a^b$, où F est n’importe quelle primitive de f sur $[a, b]$.
- Si $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $u, v \in I$, alors $F(v) = F(u) + \int_u^v F'(t) dt$.

• **Formule d'intégration par partie** : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$, valable pour u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Exercice 1. Déterminer les primitives de $f(t) = \ln(t)$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 2. Calculer par parties $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ en écrivant $\frac{1}{1+t^2} = 1 \times \frac{1}{1+t^2}$, et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

• **Formule de changement de variable** : $\int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$, valable pour $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et f continue sur un intervalle I contenant $\phi([a, b])$.

Exemple. Calcul de $I := \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

On pose $x = \cos t$, et donc $dx = -\sin t dt$. On a $x = -1$ pour $t = \pi$ et $x = 1$ pour $t = 0$; et $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$ si $t \in [0, \pi]$, car $\sin t \geq 0$ sur $[0, \pi]$. Donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi}^0 \sin t \times (-\sin t dt) = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt.$$

Ensuite, on se souvient que $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. Donc

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. On aurait pu dire que $x = \cos t$ vaut -1 pour $t = 21\pi$ et 1 pour $t = 48\pi$. Dans ce cas, il aurait fallu écrire

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} du = \int_{21\pi}^{48\pi} \sqrt{\sin^2 t} \sin t dt = \int_{21\pi}^{48\pi} |\sin t| \sin t dt,$$

et faire bien attention au signe de $\sin t$...

Exercice 1. Expliquer la valeur de I en faisant un dessin.

Exercice 2. Calculer $I := \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$ en posant $x = \tan(t/2)$.

Exercice 3. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ en posant $x = \tan t$.

3. Passage à la limite dans les bornes d'intégration

PROPOSITION 3.1. Soit I un intervalle de la forme $[a, b[$, avec $a < b \leq \infty$. Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction borélienne ou bien positive, ou bien intégrable sur $[a, b[$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f(t) dt,$$

où la limite existe dans $[0, \infty]$ si f est positive, et dans $\mathbb{C}$ si f est intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration.

CAS 1. $f \geq 0$.

Dans ce cas, $\int_a^{\beta} f$ est une fonction croissante de β , donc $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f$ existe dans $[0, \infty]$. Soit $(\beta_n) \subseteq [a, b[$ une suite croissante tendant vers β . On a

$$\int_a^{\beta_n} f = \int_a^b \mathbf{1}_{[a, \beta_n[} f =: \int_a^b f_n.$$

Les fonctions f_n forment une suite *croissante* car la suite (β_n) est croissante et $f \geq 0$; et de plus $f_n(t) \rightarrow f(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, car tout point $t \in [a, b[$ appartient à $[a, \beta_n[$ pour n assez grand. Par convergence monotone, on en déduit que $\int_a^{\beta_n} f \rightarrow \int_a^b f$, et donc $\int_a^b f = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f$.

CAS 2. f intégrable.

On écrit $f = u + iv = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$ et on applique le “cas positif” aux fonctions u^+, u^-, v^+, v^- . (Exo : écrire les détails.) $\square$

REMARQUE 3.2. Tout marche de la même façon pour un intervalle de la forme $I =]a, b]$. Et donc, ça marche encore pour un intervalle *ouvert* $I =]a, b[$, en faisant deux passages à la limite.

COROLLAIRE 3.3. Soit I un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, ou bien positive ou bien intégrable sur $]a, b[$, alors on a le droit d'écrire

$$\int_a^b f(t) dt = [F]_a^b$$

où F est une primitive quelconque de f sur $]a, b[$, à condition d'interpréter $F(b)$ comme $\lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta)$, qui existe dans $]-\infty, \infty]$ si f est positive et dans $\mathbb{C}$ si f est intégrable, et $F(a)$ comme $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} F(\alpha)$, qui existe dans $[-\infty, \infty[$ si f est positive et dans $\mathbb{C}$ si f est intégrable.

Démonstration. Supposons d'abord $f \geq 0$. Si on fixe α tel que $a < \alpha < b$, on a $\int_\alpha^\beta f(t) dt = [F]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$ pour tout $\alpha < \beta < b$, et $\int_\alpha^\beta f(t) dt$ tend vers $\int_\alpha^b f(t) dt$ quand $\beta \rightarrow b^-$. Donc $F(\beta)$ a une limite $F(b) \in]-\infty, \infty]$ quand $\beta \rightarrow b^-$, à savoir $F(b) = F(\alpha) + \int_\alpha^b f(t) dt$. De même, on montre que $F(\alpha)$ a une limite $F(a) \in [-\infty, \infty[$ quand $\alpha \rightarrow a^+$. On peut donc faire $\alpha \rightarrow a^+$ et $\beta \rightarrow b^-$ dans la formule $\int_\alpha^\beta f(t) dt = [F]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$ pour obtenir le résultat souhaité. (Il n'y a pas d'indétermination pour $[F]_a^b = F(b) - F(a)$ car $F(b) > -\infty$ et $F(a) < \infty$.)

La preuve est la même dans le cas “intégrable.” $\square$

Exemple. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $A > 0$, on a $\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$; et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^\alpha} < \infty$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Si $\alpha > 1$, alors

$$\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_A^\infty = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{A^{\alpha-1}} < \infty;$$

si $\alpha = 1$, alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^\infty = \infty;$$

et si $\alpha < 1$, alors

$$\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_A^\infty = \infty.$$

Idem pour $\int_0^\varepsilon$.

$\square$

COROLLAIRE 3.4. Soit $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et monotone. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un intervalle J contenant $\phi(]a, b[)$, et si f est ou bien positive ou bien intégrable sur $\phi(]a, b[)$, alors on a le droit d'écrire

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt,$$

en interprétant $\phi(a)$ et $\phi(b)$ comme $\lim_{\beta \rightarrow a^+} \phi(\beta)$ et $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \phi(\beta)$, qui existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Les limites $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \phi(\beta)$ et $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \phi(\beta)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ par monotonie de ϕ .

(i) Supposons $f \geq 0$ et ϕ croissante. Par la formule de changement de variable “classique”, on a

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \int_a^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt \quad \text{pour tous } a < \alpha < \beta < b;$$

et comme f et $(f \circ \phi)\phi'$ sont des fonctions positives, on en déduit immédiatement le résultat par la Proposition.

(i') Si $f \geq 0$ et ϕ décroissante : *idem* en mettant des signes “−” aux bons endroits.

(ii) Si f est intégrable sur $\phi(]a, b[)$, on commence par appliquer le “cas positif” à $|f|$ pour montrer que $(f \circ \phi)$ est intégrable sur $]a, b[$; puis on réapplique le cas positif aux parties positives et négatives de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. $\square$

Exercice 1. Calculer $I := \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}}$ en posant $x = \sqrt{t}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^{n+1} n!}.$$

4. Critères d'intégrabilité

FAIT 4.1. (“Principe de comparaison”)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction borélienne. S'il existe une fonction borélienne $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int_I g(t) dt < \infty$ et $|f(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in I$ (ou seulement presque partout), alors f est intégrable sur I .

Démonstration. C'est évident. $\square$

EXEMPLE 4.2. Si l'intervalle I est borné, alors toute fonction borélienne bornée $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur I .

Démonstration. Si $|f(t)| \leq M$ sur I , on peut prendre $g(t) \equiv M$ dans le critère de comparaison. $\square$

FAIT 4.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction borélienne localement intégrable sur un intervalle I de la forme $I = [a, b[$, où $a < b \leq \infty$. On suppose qu'il existe une fonction borélienne positive g , intégrable sur un certain intervalle $[\beta, b[$ avec $\beta < b$, telle que $|f(t)| = O(g(t))$ quand $t \rightarrow b^-$. Alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut trouver β_0 avec $\beta \leq \beta_0 < b$ et une constante $C < \infty$ tels que $|f(t)| \leq C g(t)$ sur $[\beta_0, b[$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)| dt &= \int_a^{\beta_0} |f(t)| dt + \int_{\beta_0}^b |f(t)| dt \\ &\leq \int_a^{\beta_0} |f(t)| dt + C \int_{\beta_0}^b g(t) dt \\ &< \infty \quad \text{car } f \text{ est intégrable sur } [a, \beta_0] \text{ et } \int_{\beta_0}^b g(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

□

Remarque 1. Énoncé analogue pour un intervalle I de la forme $I =]a, b]$, avec $-\infty \leq a < b$.

Remarque 2. Pour un intervalle *ouvert* $I =]a, b[$, on peut montrer qu’une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur $]a, b[$ en fixant $x_0 \in]a, b[$ et en appliquant deux fois le critère précédent, sur $]a, x_0]$ et sur $[x_0, b[$.

EXEMPLE 4.4. (Critère d’intégrabilité “de Riemann”)

- (1) Soit $A < \infty$, et soit $f : [A, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable (par exemple continue). S’il existe $\alpha > 1$ tel que $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \rightarrow \infty$, alors f est intégrable sur $[A, \infty[$.
- (2) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f :]0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. S’il existe $\alpha < 1$ tel que $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \rightarrow 0^+$, alors f est intégrable sur $]0, \varepsilon]$.

Démonstration. On a vu que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[A, \infty[$ si $\alpha > 1$, et intégrable sur $]0, \varepsilon]$ si $\alpha < 1$. □

Exercice 1. Montrer que $f(t) := \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, et que $f(t) := e^{-t^{1/4}}$ est intégrable sur $[0, \infty[$.

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est intégrable sur $[2, \infty[$, et pour quelles valeurs de β cette fonction est intégrable sur $]0, 1/2]$.

5. Intégrales “généralisées”

DÉFINITION 5.1. Soit I un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq \infty$, et soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable. Si la limite $\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^\beta f(t) dt$ existe dans $\mathbb{C}$, on note cette limite $\int_a^b f(t) dt$ et on dit que $\int_a^b f(t) dt$ **existe en tant qu’intégrale généralisée**, ou bien que **l’intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente**.

Remarque 1. Définition analogue pour une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, où $-\infty \leq a < b < \infty$.

Remarque 2. On peut définir l’intégrale généralisée d’une fonction f (localement intégrable) définie sur un intervalle *ouvert* $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$: on fixe un point $x_0 \in]a, b[$, et on dit que $\int_a^b f(t) dt$ existe si $\int_a^{x_0} f(t) dt$ et $\int_{x_0}^b f(t) dt$ existent séparément. (Exo : ça ne dépend pas du point x_0 .)

Remarque 3. Analogie avec les séries : le rôle des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ est joué par les “intégrales partielles” $\int_a^\beta f(t) dt$.

FAUX EXEMPLE. Si la fonction f est **intégrable** sur $[a, b[$, alors l’intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, par la Proposition 3.1. Mais on n’a pas du tout affaire à une intégrale “généralisée” : $\int_a^b f(t) dt$ est une intégrale “ordinaire”, par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remarque. Si on suppose que f est (borélienne et) intégrable au sens de Riemann sur $[a, \beta]$ pour tout $\beta < b$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si “l’intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **absolument convergente**”, au sens du cours de 2^e année.

CRITÈRE DE CAUCHY. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. L’intégrale $\int_a^b f(t) dt$ existe en tant qu’intégrale généralisée si et seulement si

$$(5.1) \quad \int_X^Y f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{quand } X, Y \rightarrow b^-.$$

Démonstration. Si on pose $F(x) := \int_a^x f(t) dt$, alors dire que $\int_a^b f(t) dt$ existe signifie que $F(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow b^-$. D’après le *critère de Cauchy pour les fonctions*, il revient au même de dire que $F(Y) - F(X) \rightarrow 0$ quand $X, Y \rightarrow b^-$; autrement dit que (5.1) est vérifiée. $\square$

PROPOSITION 5.2. (Critères d’Abel)

Soient $f, g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, avec f continue et g de classe C^1 . On suppose de plus que la fonction g' est intégrable sur $[a, \infty[$, i.e.

$$\int_a^\infty |g'(t)| dt < \infty.$$

Dans chacun des deux cas suivants, l’intégrale $\int_a^\infty f(t)g(t) dt$ est convergente.

- (1) L’intégrale $\int_a^\infty f(t) dt$ existe.
- (2) $g(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, et il existe une constante C telle que

$$\forall X \geq a : \left| \int_a^X f(t) dt \right| \leq C.$$

Remarque 1. Ce sont des critères “subtils” : la fonction fg n’est en général pas intégrable sur $[a, \infty[$ (i.e. l’intégrale $\int_a^\infty f(t)g(t) dt$ n’est pas absolument convergente).

Remarque 2. L’hypothèse que g' est intégrable sur $[a, \infty[$ est satisfaite en particulier dans le cas où g est positive et décroissante.

Démonstration. On a $|g'| = -g'$, donc $\int_a^\infty |g'(t)| dt = \int_a^\infty -g'(t) dt = [-g]_a^\infty \leq g(a) < \infty$. $\square$

Remarque 3. La proposition est en fait valable en supposant seulement f localement intégrable (pas forcément continue).

Preuve d'Abel. Remarque préliminaire : comme g' est intégrable sur $[a, \infty[$, la fonction g est *bornée* sur $[a, \infty[$. En effet, on a

$$|g(x)| = \left| g(a) + \int_a^x g'(t) dt \right| \leq |g(a)| + \int_a^x |g'(t)| dt \leq M := |g(a)| + \int_a^\infty |g'(t)| dt$$

pour tout $x \in [a, \infty[$.

(1) Supposons que $\int_a^\infty f(t) dt$ existe. Soit $F : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) := \int_x^\infty f(t) dt = \int_a^\infty f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Comme f est continue, F est $\mathcal{C}^1$ avec $F' = -f$. De plus, $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$ car $F(x) = \int_a^\infty f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$. En particulier, la fonction F est bornée sur $[a, \infty[$, comme toute fonction continue sur $[a, \infty[$ admettant une limite à l'infini.

Si $a \leq X < Y < \infty$, alors (intégration par parties)

$$\begin{aligned} \int_X^Y f(t) g(t) dt &= [-Fg]_X^Y + \int_X^Y F(t) g'(t) dt \\ &= F(X)g(X) - F(Y)g(Y) + \int_X^Y F(t) g'(t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_X^Y f(t) g(t) dt \right| \leq (|F(X)| + |F(Y)|) \|g\|_\infty + \|F\|_\infty \times \int_X^\infty |g'(t)| dt.$$

Comme $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$ et comme $\int_X^\infty |g'| \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$ d'après la Proposition 3.1 (puisque $\int_X^\infty |g'| = \int_a^\infty |g'| - \int_a^X |g'|$), on voit donc que le critère de Cauchy est vérifié.

(2) On intègre à nouveau par parties, mais cette fois avec

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt,$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $F' = f$. L'hypothèse sur f dit que la fonction F est *bornée* sur $[a, \infty[$.

Si $a \leq X < Y < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \int_X^Y f(t) g(t) dt &= [Fg]_X^Y - \int_X^Y F(t) g'(t) dt \\ &= F(Y)g(Y) - F(X)g(X) - \int_X^Y F(t) g'(t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_X^Y f(t) g(t) dt \right| \leq (|g(X)| + |g(Y)|) \|F\|_\infty + \|F\|_\infty \times \int_X^\infty |g'(t)| dt;$$

et donc le critère de Cauchy est vérifié, car $g(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ et $\int_X^\infty |g'| \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$ par la Proposition 3.1. $\square$

EXEMPLE 5.3. Pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ est convergente ; et donc les intégrales $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ le sont aussi.

Démonstration. On applique “Abel 2” avec $f(t) := e^{it}$ et $g(t) := \frac{1}{t^\alpha}$, qui est bien ≥ 0 et décroît vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Pour tout $X \geq 0$, on a

$$\left| \int_1^X e^{it} dt \right| = \left| \frac{1}{i} (e^{iX} - e^{i1}) \right| \leq 2;$$

donc le critère s’applique. $\square$

Exercice. Montrer que $\frac{\sin t}{t}$ n’est pas intégrable sur $[1, \infty[$. (*Suggestions* : observer que $|\sin t| \geq \sin^2 t$ et utiliser une formule trigonométrique ; ou bien découper $[\pi, \infty[$ en intervalles de longueur π .)

6. Comparaison série-intégrale

PROPOSITION 6.1. Soit $a \in \mathbb{N}$, et soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante.

- (1) Si on pose $u_n := \sum_{k=a}^n f(k) - \int_a^n f(t) dt$ pour $n \geq a$, alors u_n admet une limite finie l quand l’entier n tend vers l’infini, et on a $l \geq f(a) - \int_a^{a+1} f(t) dt \geq 0$.
- (2) La série $\sum f(k)$ est convergente si et seulement si $\int_a^\infty f(t) dt < \infty$.
- (3) En cas de divergence, on a $\sum_{k=a}^n f(k) \sim \int_a^n f(t) dt$ quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. Remarquons d’abord que la fonction f est localement intégrable car elle est monotone, donc borélienne et bornée sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subseteq [a, \infty[$.

(1) On écrit $\int_a^n f(t) dt = \sum_{k=a}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt$ (relation de Chasles), et donc

$$(6.1) \quad u_n = \sum_{k=a}^{n-1} \underbrace{\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt \right)}_{c_k} + f(n).$$

Pour tout entier $k \geq a$, on a $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ si $k \leq t \leq k+1$ car la fonction f est décroissante ; d’où en intégrant entre k et $k+1$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad \text{pour tout } k \geq a.$$

On en déduit :

- (i) que $c_k \geq 0$ pour tout $k \geq a$, et donc

$$u_n \geq c_a = f(a) - \int_a^{a+1} f(t) dt \geq 0;$$

- (ii) que

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $c_a = f(a) - \int_a^{a+1} f(t) dt$; donc u_n admet une limite $l \geq c_a \geq 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

(2) D’après (1), la série $\sum f(k)$ converge si et seulement si $\int_a^\infty f(t) dt$ admet une limite finie quand l’entier n tend vers l’infini ; et comme $f \geq 0$, c’est équivalent à $\int_a^\infty f(t) dt < \infty$.

(3) Si la série $\sum f(k)$ diverge, alors $\alpha_n := \sum_{k=a}^n f(k)$ et $\beta_n := \int_a^n f(t) dt$ tendent tous les deux vers ∞ car $f \geq 0$, donc $\alpha_n \sim \beta_n$ car $\alpha_n - \beta_n$ reste borné d'après (1). $\square$

COROLLAIRE 6.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors $H_n - \ln(n)$ admet une limite finie $\gamma > 0$ quand $n \rightarrow \infty$. (Le nombre γ s'appelle la **constante d'Euler**.) En particulier, $H_n \sim \ln(n)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. On applique la proposition avec $a := 1$ et $f(t) := \frac{1}{t}$. On a bien $\gamma > 0$, et même $\gamma \geq 1 - \int_1^2 \frac{dt}{t} = 1 - \ln(2)$. $\square$

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum \frac{1}{k \ln(k)^\alpha}$ est convergente.

Exercice 2. Soit α tel que $0 \leq \alpha < 1$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \rightarrow \infty$.

PROPOSITION 6.3. Soit $a \in \mathbb{N}$ et soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\int_a^\infty |f'(t)| dt < \infty$, et que $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Alors la série $\sum f(k)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^\infty f(t) dt$ est convergente.

Démonstration.

FAIT. L'intégrale $\int_a^\infty f(t) dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^n f(t) dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand l'entier $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.

Preuve du Fait. Pour tout nombre réel $X \geq a$, on a (en notant $E(X)$ la partie entière de X)

$$(*) \quad \int_a^X f(t) dt = \int_a^{E(X)} f(t) dt + \int_{E(X)}^X f(t) dt.$$

De plus

$$\left| \int_{E(X)}^X f(t) dt \right| \leq \int_{E(X)}^X |f(t)| dt \leq \sup_{t \geq E(X)} |f(t)|;$$

et donc $\int_{E(X)}^X f(t) dt \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$ car f tend vers 0 à l'infini. Donc, par (*), $\int_a^X f$ a une limite si et seulement si $\int_a^{E(X)} f$ en a une. $\square$

Par le Fait, il suffit maintenant de voir que

$$u_n := \int_a^n f(t) dt - \sum_{k=a}^{n-1} f(k)$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand l'entier n tend vers l'infini.

On écrit

$$u_n = \sum_{k=a}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(t) dt - f(k) \right) =: \sum_{k=a}^{n-1} v_k.$$

Si on pose $F(x) := \int_a^x f(t) dt$, alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ car f est $\mathcal{C}^1$, avec $F' = f$ et $F'' = f'$. D'après la formule de Taylor, on a donc

$$\begin{aligned} v_k &= \int_k^{k+1} f(t) dt - f(k) \\ &= F(k+1) - F(k) - F'(k) \times ((k+1) - k) \\ &= \int_k^{k+1} (k+1-t)F''(t) dt = \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit

$$|v_k| \leq \int_k^{k+1} |(k+1-t)f'(t)| dt \leq \int_k^{k+1} |f'(t)| dt \quad \text{pour tout } k \geq a;$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{\infty} |v_k| &\leq \sum_{k=a}^{\infty} \int_k^{k+1} |f'(t)| dt \\ &= \sum_{k=a}^{\infty} \int_{[k, k+1[} |f'(t)| dt \\ &= \int_a^{\infty} |f'(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'application $A \mapsto \int_A |f'(t)| dt$ est une *mesure* (borélienne) sur $[a, \infty[$. Ainsi, la série $\sum v_k$ est (absolument) convergente; autrement dit la *suite* (u_n) est convergente. $\square$

Exercice. Déterminer la nature des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(\ln(k))}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k}$.

7. Une formule de changement de variable “générale”

PROPOSITION 7.1. *Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$. On pose $\phi(a) := \lim_{t \rightarrow a+} \phi(t)$ et $\phi(b) := \lim_{t \rightarrow b-} \phi(t)$.*

(1) *Pour toute fonction borélienne positive f sur $I' := \phi(I)$, on a*

$$(7.1) \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

(2) *Si $f : I' \rightarrow \mathbb{C}$ est borélienne, alors f est intégrable sur $I' = \phi(I)$ si et seulement si la fonction $(f \circ \phi) \phi'$ est intégrable sur I , et dans ce cas la formule (7.1) est encore valable.*

Remarque. La subtilité est qu'on ne suppose pas que f est continue.

Preuve de la proposition. Comme d'habitude, le cas “intégrable” se déduit du cas “positif”; donc on va juste montrer (1).

L'hypothèse faite sur ϕ entraîne que ϕ est une bijection de I sur I' , ce qui sera utile. On suppose par exemple que ϕ est (strictement) croissante, et donc que $I' =]\phi(a), \phi(b)[$ et $\phi' \geq 0$.

FAIT 1. Il suffit de démontrer (7.1) dans le cas où la fonction f est une *fonction indicatrice*.

Preuve du Fait 1. Si la formule est vraie pour toutes les fonctions indicatrices, elle est vraie pour toutes les fonctions *étagées* positives, par “linéarité” ; et donc pour toute fonction borélienne $f \geq 0$ “par convergence monotonique” (**exo**). $\square$

Ainsi, on s’est ramené à montrer (7.1) pour toute fonction f de la forme $\mathbf{1}_A$, où A est un borélien de $I' =]\phi(a), \phi(b)[$; autrement dit, on veut montrer qu’on a

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \mathbf{1}_A(x) dx = \int_a^b \mathbf{1}_A(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Comme $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \mathbf{1}_A(x) dx = \lambda_1(A)$ pour tout $A \subseteq I' =]\phi(a), \phi(b)[$, il s’agit donc de montrer que

$$(7.2) \quad \int_a^b \mathbf{1}_A(\phi(t)) \phi'(t) dt = \lambda_1(A) \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq I'.$$

Soit $\mu : \mathcal{B}(I') \rightarrow [0, \infty]$ la fonction d’ensembles définie par

$$\mu(A) = \int_a^b \mathbf{1}_A(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

FAIT 2. μ est une mesure.

Preuve du Fait 2. On a évidemment $\mu(\emptyset) = 0$. Pour l’additivité dénombrable, soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de boréliens de I' deux à deux disjoints. On a

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k},$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(\phi(t))\phi'(t)\right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \mathbf{1}_{A_k}(\phi(t))\phi'(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

À la deuxième ligne, on a appliqué le théorème d’interversion série-intégrale aux fonctions $u_k(t) := \mathbf{1}_{A_k}(\phi(t))\phi'(t)$, qui sont ≥ 0 car $\phi' \geq 0$. $\square$

On veut montrer que $\mu(A) = \lambda_1(A)$ pour tout borélien $A \subseteq I'$. Par le Fait 2 et le lemme d’unicité, il suffit de vérifier que $\mu(J) = |J|$ pour tout *intervalle compact* $J \subseteq I'$, d’après le lemme d’unicité 4.1 du Chapitre 2.

Soit $J = [c, d] \subseteq I' =]\phi(a), \phi(b)[$ quelconque. On a

$$\begin{aligned} \mu(J) &= \int_a^b \mathbf{1}_{[c,d]}(\phi(t)) \phi'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{1}_{[\phi^{-1}(c), \phi^{-1}(d)]}(t) \phi'(t) dt \\ &= \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} \phi'(t) dt \\ &= \phi(\phi^{-1}(d)) - \phi(\phi^{-1}(c)) \\ &= d - c = |J|. \end{aligned}$$

□

Exercice 1. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de milieu m . Pour $x \in I$, on note x^* le symétrique de x par rapport à m . Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable “impaire”, i.e. vérifiant $f(x^*) = -f(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\int_I f(x) dx = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et T -périodique, pour un certain $T > 0$. Montrer que la valeur de l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est la même pour tous les intervalles I vérifiant $|I| = T$.

Théorèmes de convergence et applications

1. Les deux résultats principaux

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré et le mot “intégrable” signifie “intégrable par rapport à μ ”.

1.1. Convergence “monotone”.

THÉORÈME 1.1. (Théorème de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, $f_n : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow [0, \infty]$. On suppose que la suite (f_n) est croissante, i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega$. Alors, en posant $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (qui existe dans $[0, \infty]$), la fonction $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est mesurable et on a

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

COROLLAIRE 1.2. (intersion série-intégrale, cas “positif”)

Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables positives, alors

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_k \, d\mu.$$

Démonstration. On applique le théorème aux fonctions $f_n := \sum_{k=0}^n u_k$. □

Exemple 1. On a $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Démonstration. Si $0 < x < 1$, on a

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{-\ln(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} -x^k \ln(x).$$

Comme tout est ≥ 0 , on en déduit

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (\dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 -x^k \ln(x) dx$$

Ensuite, on intègre par parties pour trouver que $\int_0^1 -x^k \ln(x) dx = \frac{1}{(k+1)^2}$ pour tout $k \geq 0$.
(Exo : faire soigneusement le calcul.) □

Exercice. Calculer $J_k := \int_0^1 (-x \ln(x))^k dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis établir la formule

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Exemple 2. On a $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} dt = \infty$.

Démonstration. L'intégrale $I(\lambda) := \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} dt$ est une fonction décroissante de λ (**micro-exo**) et est toujours ≥ 0 ; donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$ existe dans $[0, \infty]$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante tendant vers 0 (avec $\lambda_n > 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I(\lambda_n) = \int_1^\infty -\infty f_n(t) dt$, où $f_n(t) = e^{-\lambda_n t}$. La suite (f_n) est croissante car (λ_n) est décroissante, et $f_n(t) \rightarrow 1$ pour tout $t \in [1, \infty[$. Donc, par convergence monotone, $I(\lambda_n) \rightarrow \int_1^\infty 1 dt = \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \infty$. $\square$

COROLLAIRE 1.3. (Lemme de Fatou)

Si (h_n) est une suite quelconque de fonctions mesurables positives sur Ω , alors

$$\int_\Omega (\liminf h_n) d\mu \leq \liminf \int_\Omega h_n d\mu.$$

Démonstration. Par définition,

$$\liminf h_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} h_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} h_m := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

La suite (f_n) est croissante, donc on a par convergence monotone

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\liminf h_n) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} \int_\Omega h_m d\mu \quad \text{car } f_n \leq h_m \text{ pour tout } m \geq n \\ &\leq \liminf \int_\Omega h_m d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Exercice. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables par rapport à μ . On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, et qu'il existe une constante $M < \infty$ telle $\int_\Omega |f_n| d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est intégrable par rapport à μ .

1.2. Convergence “dominée”. Le théorème suivant est un résultat de “passage à la limite sous le signe intégrale” extraordinairement efficace.

THÉORÈME 1.4. (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout.
- (ii) **Hypothèse de domination** : il existe une fonction mesurable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, indépendante de n , telle que

$$\int_\Omega g d\mu < \infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{presque partout.}$$

Alors la fonction f est intégrable, et $\int_\Omega |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En particulier :

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Démonstration. Comme $|\int_{\Omega} f_n - \int f| \leq \int_{\Omega} |f_n - f|$, il suffit de montrer que f est intégrable et que $\int_{\Omega} |f_n - f| \rightarrow 0$

CAS 1. On suppose que les f_n convergent partout vers f , et qu'on a $|f_n| \leq g$ partout.

Comme $|f_n(x)| \leq g(x)$ et $f_n(x) \rightarrow f(x)$, on a $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in \Omega$; donc f est intégrable sur Ω .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$h_n(x) := 2g(x) - |f_n - f(x)|.$$

Les h_n sont mesurables car les f_n le sont, et $h_n \geq 0$ car $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$. De plus $h_n(x) \rightarrow 2g(x)$ pour tout $x \in \Omega$, et donc $\underline{\lim} h_n = 2g$. Par le *Lemme de Fatou*, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2g \, d\mu &\leq \underline{\lim} \int_{\Omega} h_n \, d\mu \\ &= \underline{\lim} \left[\int_{\Omega} 2g \, d\mu - \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu \right] \\ &= \int_{\Omega} 2g \, d\mu + \underline{\lim} \left(- \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu \right) \\ &= \int_{\Omega} 2g \, d\mu - \overline{\lim} \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Comme $\int_{\Omega} 2g \, d\mu < \infty$, on peut simplifier par $\int_{\Omega} 2g \, d\mu$, et on obtient

$$\overline{\lim} \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu \leq 0;$$

autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu = 0$.

CAS 2. Cas général.

On se ramène au Cas 1 en jouant avec le “presque partout”. Soit $P(x)$ la propriété (dépendant de $x \in \Omega$) définie comme suit :

$$\begin{aligned} P(x) \text{ est vraie} &\iff \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq g(x) \\ &\text{et } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La propriété (P) est la conjonction d'une famille dénombrable de propriétés vraies presque partout ; donc $P(x)$ est vraie presque partout. Soit $\tilde{\Omega}$ un ensemble mesurable tel que $\mu(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) = 0$ et $P(x)$ est vraie pour tout $x \in \tilde{\Omega}$. Si on pose $\tilde{f}_n := f_n \mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}$ et $\tilde{f} := f \mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}$, alors on peut appliquer le Cas 1 à la suite $(\tilde{f}_n)$ et à $\tilde{f}$ (**micro-exo**). On en déduit que $\tilde{f}$ est intégrable et que $\int_{\Omega} |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \rightarrow 0$. Donc f est intégrable car $f = \tilde{f}$ pp, et $\int_{\Omega} |f_n - f| \rightarrow 0$ car $f_n - f = \tilde{f}_n - \tilde{f}$ pp. $\square$

Exemple. Si f est une fonction intégrable sur $]0, \infty[$, alors $e^{-\lambda t} f(t)$ est intégrable sur $]0, \infty[$ pour tout $\lambda > 0$ et

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) \, dt \rightarrow \int_0^{\infty} f(t) \, dt \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0^+,$$

et

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty.$$

Démonstration. On a $|e^{-\lambda t} f(t)| \leq |f(t)|$ si $t \in]0, \infty[$ et $\lambda > 0$, donc $e^{-\lambda t} f(t)$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

Soit (λ_n) une suite quelconque tendant vers 0^+ . Alors $f_n(t) = e^{-\lambda_n t} f(t) \rightarrow f(t)$ pour tout $t \in]0, \infty[$, et $|f_n(t)| \leq |f(t)|$, intégrable sur $]0, \infty[$ et indépendant de n . Donc $\int_0^\infty e^{-\lambda_n t} f(t) dt \rightarrow \int_0^\infty f(t) dt$ par le TCD, pour toute suite (λ_n) tendant vers 0^+ ; et donc OK.

Idem pour $\lambda \rightarrow \infty$. □

COROLLAIRE 1.5. (Théorème de convergence bornée)

Supposons que la mesure μ soit finie, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$. Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables convergeant presque partout vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et s'il existe une constante $M < \infty$ indépendante de n telle que $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq M$ presque partout, alors f est intégrable et $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

Démonstration. On applique le TCD avec $g(x) \equiv M$ (intégrable car $\mu(\Omega) < \infty$). □

CAS PARTICULIER. Si (f_n) est une suite de fonctions λ_1 -mesurables partout définies et bornées sur un segment $[a, b]$ et si (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, alors f est intégrable et $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$.

Démonstration. Comme les f_n sont bornées et convergent uniformément, la suite (f_n) est *uniformément bornée*; donc on peut appliquer le théorème de convergence bornée car $\lambda_1([a, b]) < \infty$. □

Exercice. Démontrer directement ce cas particulier.

Exemple. Montrons qu'on a $\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Si $0 \leq x < 1$, alors

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k.$$

En intégrant formellement, on en déduit

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Justification du calcul formel. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k.$$

Alors $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0, 1[$, avec de plus

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet, on a $f_{2m}(x) = f_{2m-1}(x) + x^{2m} \geq f_{2m-1}(x)$ pour tout $m \geq 1$; et en écrivant $f_{2m}(x) = 1 - (x - x^2) - \dots - (x^{2m-1} - x^{2m})$ et $f_{2m-1}(x) = (1-x) + \dots + (x^{2m-2} - x^{2m-1})$, on voit qu'on a $0 \leq f_{2m-1} \leq f_{2m}(x) \leq 1$.

Par “convergence bornée” (applicable puisqu’on est sur un intervalle de longueur finie), on en déduit

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx;$$

ce qui donne la conclusion souhaitée.

COROLLAIRE 1.6. (intersion série-intégrale, cas “sommable”)

Soit (u_k) une suite de fonctions mesurables, $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que la série $\sum u_k$ converge presque partout, et que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = f(x)$ pp. Si on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |u_k| d\mu < \infty,$$

alors on peut affirmer que f est intégrable et que $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_k d\mu$; autrement dit on a le droit d’écrire

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_k d\mu.$$

Démonstration. Soit $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ la fonction (mesurable) définie par

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|.$$

Par interversion série-intégrale (cas “positif”), on a $\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |u_k| d\mu < \infty$. Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominé aux fonctions $f_n := \sum_{k=0}^n u_k$, car $|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |u_k(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. □

Remarque. Les hypothèses du théorème d’intersion série-intégrale sont un peu redondantes : en fait, l’hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |u_k| d\mu < \infty$ entraîne que la série $\sum u_k$ est presque partout absolument convergente.

Démonstration. La fonction $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ définie par $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$ vérifie $\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |u_k| d\mu < \infty$; donc $g(x) < \infty$ presque partout, autrement dit la série $\sum u_k(x)$ est presque partout absolument convergente. □

Exemple. On a $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$

Si $0 < x < 1$, alors

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \ln(x).$$

En intégrant formellement, on en déduit

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (\dots) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} \ln(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$$

Justification de l’intersion de $\int$ et $\sum$. Il suffit de vérifier qu’on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |(-1)^k x^{2k} \ln(x)| dx < \infty;$$

ce qui est clair puisque $\int_0^1 |(-1)^k x^{2k} \ln(x)| dx = \int_0^1 -x^{2k} \ln(x) dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Remarque. Il arrive parfois qu'on puisse intervertir un $\int$ et un $\sum$, mais que le théorème d'inversion série-intégrale ne s'applique pas. Exemple : $u_k(x) = (-1)^k x^k$ sur $[0, 1[$.

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. On suppose que la fonction F' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$.

Exercice 2. En considérant les fonctions $u_k : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $u_k(x) := (-1)^k x^{2k}(1-x)$, établir la formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}.$$

2. Fonctions définies par des intégrales

2.1. Cadre. On s'intéresse à des fonctions de la forme

$$f(x) = \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t),$$

où x appartient à un certain "espace de paramètres" X et F est une fonction de 2 variables, $F : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

2.2. Continuité.

THÉORÈME 2.1. Soit $F : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, où X est un espace métrique. Soit également $a \in X$. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Pour tout $x \in X$ fixé, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur Ω .
- (ii) Pour presque tout $t \in \Omega$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue au point a .
- (iii) **Hypothèse de domination** : pour tout compact $K \subseteq X$, on peut majorer $|F(x, t)|$ pour $x \in K$ de la façon suivante : $|F(x, t)| \leq g_K(t)$, où $g_K(t)$ est indépendant de $x \in K$ et la fonction $g_K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable sur Ω .

Alors la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(x) := \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$$

est continue au point a .

Démonstration. La fonction f est bien définie par (i). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ une suite tendant vers a , et montrons que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Par (ii), on sait que $F(x_n, t)$ tend vers $F(a, t)$ presque partout. De plus, $K := \{a\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de X car $x_n \rightarrow a$. Donc, par (iii), on peut trouver une fonction g_K intégrable sur Ω telle que $\forall n \forall t \in \Omega : |F(x_n, t)| \leq g_K(t)$. Par le Théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions $F_n(t) := F(x_n, t)$, on en déduit que $\int_{\Omega} F(x_n, t) d\mu(t) \rightarrow \int_{\Omega} F(a, t) d\mu(t)$, i.e. $f(x_n) \rightarrow f(a)$. $\square$

Remarque. Dans (i), il suffit en fait de supposer que la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est mesurable (pour tout $x \in X$ fixé), car si on applique (iii) avec $K := \{x\}$, on obtient $|F(x, t)| \leq g_{\{x\}}(t)$, d'où l'intégrabilité de $t \mapsto F(x, t)$.

COROLLAIRE 2.2. Soit $F : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, où X est un espace métrique. On suppose que $F(x, t)$ est mesurable par rapport à $t \in \Omega$ (pour tout $x \in X$ fixé) et continu par rapport à $x \in X$ (pour tout $t \in \Omega$ fixé), et de plus que l'hypothèse de domination (iii) est satisfaite. Alors la formule $f(x) := \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$ définit une fonction continue sur X .

CAS PARTICULIER. Soit $F : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, où X est un espace métrique et $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction F est continue sur $[a, b] \times X$. Alors la formule $f(x) = \int_a^b F(x, t) dt$ définit une fonction continue sur X .

Démonstration. Comme $F(x, t)$ est évidemment continu par rapport à $x \in X$ et borélien par rapport à $t \in [a, b]$, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination. Si K est un compact de X , alors $K \times [a, b]$ est compact, donc la fonction continue F est bornée sur $K \times [a, b]$, disons $|F(x, t)| \leq M$. La constante M est intégrable sur $[a, b]$ car $[a, b]$ est de longueur finie, donc on peut prendre $g_K(t) := M$. $\square$

Exercice. Démontrer directement ce résultat.

Exemple. Soit $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\alpha(x) > 1$ pour tout $x \in X$. Alors la formule $f(x) = \int_2^{\infty} \frac{dt}{(t + \sin t)^{\alpha(x)}}$ définit une fonction continue sur X .

Démonstration. Soit $x \in X$ fixé. On a $|t + \sin t| \geq t - 1$, donc $t + \sin t \neq 0$ pour tout $t \geq 2$ et $|\frac{1}{(t + \sin t)^{\alpha(x)}}| \leq \frac{1}{(t-1)^{\alpha(x)}}$. Comme $\alpha(x) > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-1)^{\alpha(x)}}$ est intégrable sur $[2, \infty[$ car continue sur $[2, \infty[$ et $\sim \frac{1}{t^{\alpha(x)}}$ quand $t \rightarrow \infty$. Donc : $f(x)$ est bien défini, pour tout $x \in X$.

On a $f(x) = \int_2^{\infty} F(x, t) dt$, où $F(x, t) = \frac{1}{(t + \sin t)^{\alpha(x)}}$ est continu par rapport à x , avec $|F(x, t)| \leq \frac{1}{(t-1)^{\alpha(x)}}$. Si K est un compact de X , il existe une constante $c > 1$ telle que $\alpha(x) \geq c$ pour tout $x \in K$, car la fonction continue α possède un minimum sur K et $\alpha(x) > 1$ pour tout $x \in K$. Comme $t - 1 \geq 1$ si $t \in [2, \infty[$, on a donc $|F(x, t)| \leq |F(x, t)| \leq \frac{1}{(t-1)^c} := g_K(t)$ pour tout $x \in K$ et $t \in [2, \infty[$. La fonction g_K ne dépend pas de $x \in K$, et elle est intégrable sur $[2, \infty[$ car $c > 1$. Conclusion : f est continue sur X par le “théorème de continuité”. $\square$

2.3. Dérivabilité.

THÉORÈME 2.3. Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur Ω ;
- (ii) Pour tout $t \in \Omega$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est dérivable sur I ;
- (iii) **Hypothèse de domination** : pour tout compact $K \subseteq I$, on peut majorer $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)|$ pour $x \in K$ de la façon suivante : $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)| \leq g_K(t)$, où $g_K(t)$ est indépendant de $x \in K$ et la fonction $g_K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable sur Ω .

Alors la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(x) := \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$$

est dérivable sur I , et on peut dériver sous l'intégrale :

$$f'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) d\mu(t).$$

Remarque 1. Si dans (ii) on suppose que la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (pour tout $t \in \Omega$), alors on peut conclure que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$: cela découle de la formule pour $f'(x)$ et du théorème de *continuité* des intégrales à paramètres.

Remarque 2. Différence avec le théorème de continuité : dans l'hypothèse de domination, ce n'est pas $|F(x, t)|$ qu'on majore mais $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)|$.

Preuve du Théorème 2.3. La fonction f est bien définie par (i). De plus, si $x \in I$ alors, en appliquant (iii) au compact $K := \{x\}$, on voit que la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur Ω .

Soit $a \in I$ fixé. Pour montrer que f est dérivable en a avec la bonne formule pour $f'(a)$, il suffit de vérifier que pour toute suite $(x_n) \subseteq I$ tendant vers a (avec $x_n \neq a$), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x}(a, t) d\mu(t).$$

Par définition de f , on a

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \int_{\Omega} \frac{F(x_n, t) - F(a, t)}{x_n - a} d\mu(t).$$

Par (ii), $\frac{F(x_n, t) - F(a, t)}{x_n - a} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(a, t)$ pour tout $t \in \Omega$. Donc : il s'agit d'intervertir une limite et une intégrale.

Comme $x_n \rightarrow a$, on peut trouver un intervalle compact $K \subseteq I$ contenant a et tous les x_n . Comme $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)| \leq g_K(t)$ pour tout $x \in K$, on a par l'*inégalité des accroissements finis* appliquée à la fonction $x \mapsto F(x, t)$:

$$\left| \frac{F(x_n, t) - F(a, t)}{x_n - a} \right| \leq g_K(t)$$

pour tout n et pour tout $t \in \Omega$. Par convergence dominée, on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x_n, t) - F(a, t)}{x_n - a} d\mu(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x}(a, t) d\mu(t).$$

□

CAS PARTICULIER. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $F : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que la fonction F est continue sur $I \times [a, b]$, que F possède en tout point (x, t) une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ par rapport à la 1ère variable, et que la fonction $(x, t) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $I \times [a, b]$. Alors la formule $f(x) = \int_a^b F(x, t) dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , avec $f'(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur l'intervalle compact $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est dérivable sur I par hypothèse. Enfin, si K est un compact de I , alors la fonction continue $\frac{\partial F}{\partial x}$ est *bornée* sur le compact $K \times [a, b]$, disons $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)| \leq M$; et comme les constantes sont intégrables sur l'intervalle borné $[a, b]$, on en déduit que la condition de domination (iii) est satisfaite avec $g_K(t) := M$. Donc le théorème de dérivation s'applique (cf la Remarque 1 plus haut). □

COROLLAIRE 2.4. Soit $F : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que

- (1) $F(x, t)$ est intégrable par rapport à $t \in \Omega$ (pour $x \in U$ fixé) et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à $x \in U$ (pour $t \in \Omega$ fixé) ;
- (2) pour tout compact $K \subseteq U$, il existe des fonctions $g_{K,1}, \dots, g_{K,d}$ intégrables sur Ω telles que pour $j = 1, \dots, d$ on ait

$$\forall x \in K \quad \forall t \in \Omega : \left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, t) \right| \leq g_{K,j}(t).$$

Alors $f(x) := \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , avec pour $j = 1, \dots, d$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, t) d\mu(t).$$

Démonstration. Par le théorème, on voit que $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe sur U pour $j = 1, \dots, d$, avec $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, t) d\mu(t)$. Par le théorème de continuité, cette formule montre que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur U ; donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

Exercice 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que $\alpha(x) > 1$ pour tout $x \in U$. Montrer que la formule $f(x) = \int_2^{\infty} \frac{dt}{(t + \sin t)^{\alpha(x)}}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, \infty[$.

3. Deux exemples d'utilisation des théorèmes

3.1. Transformée de Fourier d'une gaussienne.

DÉFINITION 3.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Remarque. La définition a un sens car $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$, donc la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Exercice. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction continue.

PROPOSITION 3.2. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(t) := e^{-t^2/2}$, alors $\hat{g} = \sqrt{2\pi} g$; autrement dit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Comme g est continue (donc localement intégrable) et $g(t) = o(1/t^2)$ en $\pm\infty$, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\hat{g}$ est bien définie.

On a $\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x, t) dt$, où $F(x, t) = e^{-t^2/2} e^{-ixt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x (pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé), avec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = -ite^{-t^2/2} e^{-ixt}.$$

On a $|\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)| = |t|e^{-t^2/2} := g(t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout t . La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et $g(t) = o(1/t^2)$ en $\pm\infty$ (**exo**). D'après le "théorème de dérivation" (pas besoin de compact K ici), on en déduit que $\hat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\hat{g}'(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2} e^{-ixt} dt.$$

Maintenant, on intègre par parties, en remarquant que $te^{-t^2/2} = -\frac{d}{dt}(e^{-t^2/2})$. Pour tout $T > 0$, on a

$$\int_{-T}^T te^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = \left[-e^{-t^2/2} e^{-ixt} \right]_{-T}^T + \int_{-T}^T e^{-t^2/2} \times (-ixe^{-ixt}) dt.$$

Quand $T \rightarrow \infty$, le "crochet" tend vers 0 car $e^{-t^2/2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ et $|e^{-ixt}| = 1$; et l'intégrale apparaissant au second membre tend vers $-ix \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = -ix \hat{g}(x)$. On obtient donc

$$\hat{g}'(x) = -i \times (-ix \hat{g}(x)) = -x \hat{g}(x).$$

Donc $\hat{g}$ est solution de l'équation différentielle $y'(x) = -x y(x)$; et donc

$$\hat{g}(x) = C e^{-x^2/2},$$

pour une certaine constante C . On a $C = \hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$, et "on sait bien" que cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$ (on le démontrera plus tard...). $\square$

Exercice. Pour tout $\lambda > 0$, déterminer la transformée de Fourier de $g_\lambda(t) := e^{-\lambda t^2}$.

3.2. Calcul de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

FAIT. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Démonstration. On sait que $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée. De plus, $f(t) := \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (avec $f(0) = 1$) et donc f est intégrable sur $[0, 1]$. Donc, $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe également. $\square$

OBJECTIF : calculer $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

PROPOSITION 3.3. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. On suppose que $\int_0^\infty f(t) dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt.$$

Alors

$$\mathcal{L}f(\lambda) \rightarrow \int_0^\infty f(t) dt \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Démonstration. On a $|f(t)e^{-\lambda t}| \leq \|f\|_\infty e^{-\lambda t}$, donc la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0, \infty[$ pour tout $\lambda > 0$, i.e. $\mathcal{L}f(\lambda)$ est bien défini.

Dans la suite, on pose $I = \int_0^\infty f(t) dt$.

Soit $F : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(x) := \int_0^x f(t) dt$. Comme f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $F' = f$. De plus, $F(x) \rightarrow I$ quand $x \rightarrow \infty$. En particulier, la fonction F est bornée sur $[0, \infty[$.

Soit $\lambda > 0$. Pour tout $X \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^X f(t)e^{-\lambda t} dt &= \left[F(t)e^{-\lambda t} \right]_0^X + \lambda \int_0^X F(t)e^{-\lambda t} dt \\ &= F(X)e^{-\lambda X} + \lambda \int_0^X F(t)e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Comme F est bornée, $F(X)e^{-\lambda X} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$ et la fonction $t \mapsto F(t)e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0, \infty[$. En faisant tendre X vers l'infini, on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\lambda) &= \lambda \int_0^\infty F(t)e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty F\left(\frac{u}{\lambda}\right) e^{-u} du, \end{aligned}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Comme $F(x) \rightarrow I$ quand $x \rightarrow \infty$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(u/\lambda) = I$ pour tout $u > 0$. De plus, $|F(u/\lambda)e^{-u}| \leq \|F\|_\infty e^{-u}$ pour tout $\lambda > 0$ et pour tout u . Comme e^{-u} est intégrable sur $]0, \infty[$, on en déduit, “par convergence dominée”, que

$$\mathcal{L}f(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^\infty I \times e^{-u} du = I \int_0^\infty e^{-u} du = I.$$

□

Remarque. La conclusion “par convergence dominée” est volontairement un peu rapide. Le raisonnement correct est le suivant : par le TCD, on peut dire que pour toute suite (λ_n) tendant vers 0^+ , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(\lambda_n) = I$; ce qui suffit.

COROLLAIRE 3.4. On a $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. On va appliquer la proposition avec $f(t) := \frac{\sin t}{t}$, qui est continue sur $[0, \infty[$ avec $f(0) = 1$, et aussi bornée avec $\|f\|_\infty \leq 1$ car $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour $\lambda > 0$, on a $\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty F(\lambda, t) dt$, où $F(\lambda, t) = f(t)e^{-\lambda t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à λ , avec

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t) = -tf(t)e^{-\lambda t}.$$

Si K est un compact de $]0, \infty[$, on a une constante $c > 0$ telle que $\forall \lambda \in K : \lambda \geq c$. Donc, pour $\lambda \in K$ et $t \geq 0$, on a $|\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t)| \leq t|f(t)|e^{-ct}$, fonction indépendante de $\lambda \in K$ et intégrable sur $[0, \infty[$ car f est bornée et $c > 0$. Donc $\mathcal{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, avec

$$(\mathcal{L}f)'(t) = - \int_0^\infty tf(t) dt = - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin t dt.$$

Cette dernière intégrale est la partie imaginaire de $\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{it} dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda-i)t} dt$, qui vaut $\frac{1}{\lambda-i}$. Donc

$$(\mathcal{L}f)'(\lambda) = -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda-i} \right) = -\frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{pour tout } \lambda > 0;$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}f(\lambda) = -\arctan(\lambda) + C,$$

pour une certaine constante C .

Comme $\mathcal{L}f(\lambda) \rightarrow I$ quand $\lambda \rightarrow 0^+$ d'après la proposition et comme $\arctan(0) = 0$, on voit que $C = I$.

Mais par ailleurs, on a aussi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(\lambda) = 0,$$

ce qui se voit en appliquant le théorème de convergence dominée, ou simplement en écrivant $|\mathcal{L}f(\lambda)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\lambda t} dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$. Comme $\arctan(\lambda) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $\lambda \rightarrow \infty$, on en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$, d'où finalement $I = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Intégration dans $\mathbb{R}^d$

1. Cadre et notations

• On considère des fonctions *boréliennes*, positives ou à valeurs complexes, définies sur des parties boréliennes de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

• “Intégrable” veut dire “intégrable par rapport à λ_d ”.

EXEMPLE. si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ est un borélien *borné*, alors toute fonction borélienne *bornée* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur Ω , car $\lambda_d(\Omega) < \infty$. C’est le cas en particulier si f est continue et si Ω est compact.

• Notations pour l’intégrale d’une fonction f sur un borélien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\int_{\Omega} f d\lambda_d, \quad \int_{\Omega} f(x) d\lambda_d(x) \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} f.$$

• Autres notations :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

• Pour $d = 2$ et $d = 3$, on écrit plutôt

$$\int_{\Omega} f(x, y) dxdy \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz.$$

REMARQUE. Si $p, q \in \mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^{p+q}$ avec $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

RAPPEL. Si $A \subseteq \mathbb{R}^p$ et $B \subseteq \mathbb{R}^q$, alors (propriété de produit)

$$\lambda_{p+q}(A \times B) = \lambda_p(A) \times \lambda_q(B).$$

2. Coupes et volumes

2.1. Coupes “verticales” et “horizontales”.

NOTATIONS. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, et soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on note Ω_x la **coupe de Ω à l’abscisse x** :

$$\Omega_x := \{y \in \mathbb{R}^q; (x, y) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^q.$$

• Pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, on note Ω^y la **coupe de Ω à l’ordonnée y** :

$$\Omega^y := \{x \in \mathbb{R}^p; (x, y) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

EXEMPLE. Supposons que Ω soit de la forme $\Omega = A \times B$, avec $A \subseteq \mathbb{R}^p$ et $B \subseteq \mathbb{R}^q$. Alors

$$\Omega_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A; \end{cases} \quad \text{et} \quad \Omega^y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{si } y \notin B. \end{cases}$$

LEMME 2.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est borélien, alors toutes les coupes Ω_x et Ω^y sont des ensembles boréliens.

Démonstration. Si $x \in \mathbb{R}^p$, alors $\Omega_x = \Phi_x^{-1}(\Omega)$, où $\Phi_x : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est l'application $y \mapsto (x, y)$; donc Ω_x est borélienne car Ω est borélien et Φ_x est continue. Idem pour Ω^y . $\square$

LEMME 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est borélien, alors les applications $x \mapsto \lambda_q(\Omega_x)$ et $y \mapsto \lambda_p(\Omega^y)$ sont boréliennes, respectivement de $\mathbb{R}^p$ dans $[0, \infty]$ et de $\mathbb{R}^q$ dans $[0, \infty]$.

Démonstration. Ce n'est pas du tout évident. On la fera plus tard. $\square$

2.2. Principe de Cavalieri.

PROPOSITION 2.3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Pour tout borélien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on a

$$\lambda_{p+q}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(\Omega_x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(\Omega^y) dy.$$

Démonstration. On montre seulement que $\lambda_{p+q}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(\Omega_x) dx$ pour tout borélien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$.

FAIT. La fonction $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) \rightarrow [0, \infty]$ définie par $\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(A_x) dx$ est une mesure (borélienne) sur $\mathbb{R}^{p+q}$.

Preuve du Fait. On a $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset_x = \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de boréliens de $\mathbb{R}^{p+q}$ deux à deux disjoints. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right)_x = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k)_x \quad \text{union disjointe.}$$

Donc

$$\lambda_q \left[\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right)_x \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_q((A_k)_x).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_q((A_k)_x) \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q((A_k)_x) dx \quad \text{par interversion série-intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

$\square$

Il s'agit de montrer qu'en fait $\mu = \lambda_{p+q}$; et il suffit pour cela de vérifier qu'on a $\mu(P) = |P|$ pour tout pavé $P \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$.

Soit P un pavé quelconque de $\mathbb{R}^{p+q}$. On écrit $P = A \times B$, où A et B sont des pavés de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$ respectivement. Alors $P_x = B$ si $x \in A$ et $P_x = \emptyset$ si $x \notin A$; donc

$$\lambda_q(P_x) = \begin{cases} \lambda_q(B) & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mu(P) = \int_A \lambda_q(B) dx &= \int_A \lambda_q(B) d\lambda_p \\ &= \lambda_q(B) \lambda_p(A) \\ &= |A| |B| = |P|.\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.4. Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^d$, et soit $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ une fonction borélienne. Si on pose

$$\text{SG}(f, \Omega) := \{(x, \tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; x \in \Omega \text{ et } 0 \leq \tau < f(x)\},$$

alors

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lambda_{d+1}(\text{SG}(f, \Omega)).$$

En particulier : si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, alors $\int_{\Omega} f(x) dx$ est l'aire sous le graphe de f ; et si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, alors $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ est le volume sous le graphe de f .

Démonstration. On laisse en **exo** la preuve du fait que $\text{SG}(f, \Omega)$ est un borélien de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1}$. Si $x \in \mathbb{R}^d$, alors $\text{SG}(f, \Omega)_x = \emptyset$ si $x \notin \Omega$, et $\text{SG}(f, \Omega)_x = [0, f(x)[$ si $x \in \Omega$. Donc $\lambda_1(\text{SG}(f, \Omega)_x) = 0$ si $x \notin \Omega$ et $\lambda_1(\text{SG}(f, \Omega)_x) = f(x)$ si $x \in \Omega$; et donc, par le principe de Cavalieri :

$$\lambda_{d+1}(\text{SG}(f, \Omega)) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(\text{SG}(f, \Omega)_x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

□

Exemple 1. Aire d'un disque (!)

Soit $R > 0$, et soit $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ le disque fermé de centre $0 = (0, 0)$ et de rayon R :

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Ici, on est dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donc $p = 1 = q$.

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\overline{D}_x = \emptyset$ si $x \notin [-R, R]$, et $\overline{D}_x = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$ si $x \in [-R, R]$; donc

$$\lambda_1(\overline{D}_x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-R, R], \\ 2\sqrt{R^2 - x^2} & \text{si } x \in [-R, R]. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\lambda_2(\overline{D}) = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du,$$

en posant $x = Ru$. Comme $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi}{2}$ (calcul déjà fait au Chapitre 5), on obtient donc bien le résultat attendu : $\lambda_2(\overline{D}) = \pi R^2$.

Exemple 2. Volume d'une boule dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $R > 0$, et soit B la boule euclidienne fermée de rayon R (centrée en 0) dans $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

On va montrer que $\lambda_3(B) = \frac{4}{3} \pi R^3$ (comme on s'y attend).

On écrit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, et donc $(x, y, z) = ((x, y), z)$. Si $z \in \mathbb{R}$, alors $B^z = \emptyset$ si $z \notin [-R, R]$, et B^z est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$ si $z \in [-R, R]$; donc

$$\lambda_2(B^z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [-R, R], \\ \pi(R^2 - z^2) & \text{si } z \in [-R, R]. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda_3(B) &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left(R^2 \times 2R - \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R \right) \\ &= \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Exercice 1. Soient $R, h > 0$. Calculer le volume du cône $C \subseteq \mathbb{R}^3$ de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R dans le plan des xy .

Exercice 2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, alors le graphe de f est λ_2 -négligeable.

Exercice 3. Calculer le volume d'une boule euclidienne de rayon R dans $\mathbb{R}^4$.

3. Intégrales itérées ; Théorème de Fubini

NOTATION. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Un point $u \in \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ se notera

$$u = (x, y) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^p \text{ et } y \in \mathbb{R}^q.$$

LEMME 3.1. Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Si $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est une fonction borélienne, alors les fonctions $x \mapsto \int_{\Omega_x} f(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_{\Omega_y} f(x, y) dx$ sont boréliennes, respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et sur $\mathbb{R}^q$.

Démonstration. On traite seulement le cas de $\Phi_f(x) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dy$.

CAS 1. Cas où la fonction f est étagée.

On écrit $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$, où $\alpha_i \geq 0$ et les E_i sont des boréliens formant une partition de Ω . Si $x \in \mathbb{R}^p$, alors

$$\Omega_x = \left(\bigcup_{i=1}^N E_i \right)_x = \bigcup_{i=1}^N (E_i)_x \quad \text{union disjointe.}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} f(x, y) dy &= \sum_{i=1}^N \int_{(E_i)_x} f(x, y) dy \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{(E_i)_x} \alpha_i d\lambda_q(y) \quad \text{car } f(x, y) = \alpha_i \text{ si } y \in (E_i)_x \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_q((E_i)_x). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, les applications $x \mapsto \lambda_q((E_i)_x)$ sont boréliennes; donc Φ_f est borélienne.

CAS 2. Cas général.

Soit (φ_n) une suite approximante pour f . Par convergence monotone, on a

$$\int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_x} \varphi_n(x, y) dy \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^p;$$

donc Φ_f est borélienne par le Cas 1. $\square$

THÉORÈME DE FUBINI. Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et soit f une fonction borélienne sur Ω , positive ou à valeurs complexes.

(1) **Cas “positif”** : si f est *positive*, alors

$$\int_{\Omega} f d\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\Omega^y} f(x, y) dx \right) dy.$$

(2) **Cas “intégrable”** : si f est *intégrable* sur Ω (par rapport à λ_{p+q}), alors on a le droit d'écrire

$$\int_{\Omega} f d\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\Omega^y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque. Signification précise de “on a le droit d'écrire” dans (2) :

- pour *presque tout* $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω_x par rapport à λ_q ;
- pour *presque tout* $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω^y par rapport à λ_p ;
- Les fonctions Φ et Ψ définies par

$$\Phi(x) := \int_{\Omega_x} f(x, y) dy \quad \text{et} \quad \Psi(y) := \int_{\Omega^y} f(x, y) dx$$

là où les intégrales ont un sens, et $\Phi(x) = 0 = \Psi(y)$ autrement, sont intégrables respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et sur $\mathbb{R}^q$, et on a

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) dx = \int_{\Omega} f d\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^q} \Psi(y) dy.$$

COROLLAIRE 3.2. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^p$ et $B \subseteq \mathbb{R}^q$ des ensembles boréliens. Si f est une fonction borélienne positive ou intégrable définie sur $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, alors

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Démonstration. On applique le théorème avec $\Omega := A \times B$. Comme $\Omega_x = \emptyset$ si $x \notin A$ et $\Omega_x = B$ si $x \in A$, on a $\int_{\Omega_x} f(x, y) dy = 0$ si $x \notin A$ et $\int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \int_B f(x, y) dy$ si $x \in A$. Donc $\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx$; et de même $\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\Omega^y} f(x, y) dx \right) dy = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$. $\square$

MODE D'EMPLOI DE FUBINI. Le théorème de Fubini permet *sous certaines hypothèses* de permuter des intégrales.

- Si la fonction f qu'on considère est *positive*, il n'y a rien à vérifier : tous les calculs sont permis.
- Si la fonction f n'est pas positive, *il faut vérifier* qu'elle est intégrable sur le domaine Ω considéré, i.e. qu'on a $\int_{\Omega} |f| < \infty$. Comme $|f| \geq 0$, on peut le faire... en appliquant "Fubini positif".

Exemple 1. Calcul de l'intégrale $I := \int_{[0, \infty[\times [0, \infty[} \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$.

La fonction à intégrer est borélienne positive sur $\Omega := [0, \infty[\times [0, \infty[$, donc tous les calculs sont permis. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 2. Calcul de l'intégrale $I := \int_{\Omega} \frac{x}{y} dx dy$, où

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1, 1 \leq y \leq x^2 \text{ et } x + y \leq 6\}.$$

En dessinant Ω , on voit que

$$\Omega_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 5, \\ [1, x^2] & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ [1, 6 - x] & \text{si } 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Comme la fonction $(x, y) \mapsto x/y$ est borélienne positive sur Ω , tous les calculs sont permis. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y} dy \right) dx + \int_2^5 \left(\int_1^{6-x} \frac{x}{y} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 x \log(x^2) dx + \int_2^5 x \log(6 - x) dx \\ &= 2 \int_1^2 x \log(x) dx + \int_2^5 x \log(6 - x) dx \\ &= \dots \quad (\text{IPPs}) \\ &= \dots \frac{135}{4} \log(2) - 18 \quad (\text{à vérifier}). \end{aligned}$$

Exemple 3. Montrons (à nouveau) qu'on a pour tout $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda).$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$ est intégrable sur $]0, \infty[$ car $\frac{\sin x}{x}$ est borné (par 1), donc $I(\lambda) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$ est bien définie pour tout $\lambda > 0$. Dans la suite, on fixe $\lambda > 0$.

Point de départ : pour tout $x > 0$, on a

$$e^{-\lambda x} = x \int_\lambda^\infty e^{-xy} dy.$$

Donc $\frac{\sin x}{x} = \int_\lambda^\infty \sin x e^{-xy} dy$, et donc

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \left(\int_\lambda^\infty \sin x e^{-xy} dy \right) dx.$$

En faisant un calcul formel, on obtient

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_\lambda^\infty \left(\int_0^\infty \sin x e^{-xy} dx \right) dy \\ &= \int_\lambda^\infty \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty e^{(i-y)x} dx \right) dy \\ &= \int_\lambda^\infty \frac{dy}{1+y^2} \quad (\text{calcul déjà fait}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda). \end{aligned}$$

Justification du calcul formel : par Fubini, il suffit de vérifier qu'on a

$$\int_0^\infty \left(\int_\lambda^\infty |\sin x| e^{-xy} dy \right) dx < \infty \quad \text{ou encore} \quad \int_\lambda^\infty \left(\int_0^\infty |\sin x| e^{-xy} dx \right) dy < \infty.$$

Il ne faut surtout pas majorer $|\sin x|$ par 1 (vérifier que ça ne mène à rien). On a

$$\begin{aligned} \int_\lambda^\infty \left(\int_0^\infty |\sin x| e^{-xy} dy \right) dx &= \int_0^\infty |\sin x| \left(\int_\lambda^\infty e^{-xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} e^{-\lambda x} dx \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx < \infty. \end{aligned}$$

Preuve du théorème de Fubini. Soit f une fonction borélienne sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, positive ou intégrable par rapport à λ_{p+q} .

(1) Supposons $f \geq 0$. Par Cavalieri, on a

$$\int_\Omega f d\lambda_{p+q} = \lambda_{p+q+1}(\operatorname{SG}(f, \Omega)) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_{q+1}(\operatorname{SG}(f, \Omega)_x) dx.$$

De plus, on vérifie (**exo**) que si $x \in \mathbb{R}^p$, alors

$$\operatorname{SG}(f, \Omega)_x = \operatorname{SG}(f_x, \Omega_x),$$

où $f_x : \Omega_x \rightarrow [0, \infty]$ est la fonction définie par $f_x(y) = f(x, y)$.

Donc, à nouveau par Cavalieri,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \, d\lambda_{p+q} &= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_{q+1}(\text{SG}(f_x, \Omega_x)) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f_x \, d\lambda_q \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

(2) Supposons f intégrable.

Par linéarité, on peut supposer que f est à valeurs réelles, donc $f = f^+ - f^-$.

On doit montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω_x , et que la fonction presque partout définie $\Phi(x) := \int_{\Omega_x} f(x, y) \, dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, avec $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) \, dx = \int_{\Omega} f$.

Par (1), on a

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} |f(x, y)| \, dy \right) dx = \int_{\Omega} |f| \, d\lambda_{p+q} < \infty.$$

Autrement dit, si on pose $\Theta(x) := \int_{\Omega_x} |f(x, y)| \, dy$, alors la fonction (*borélienne*) positive Θ vérifie $\int_{\mathbb{R}^p} \Theta(x) \, dx < \infty$. En particulier, on a $\Theta(x) < \infty$ presque partout ; donc

$$\Phi(x) := \int_{\Omega_x} f(x, y) \, dy \quad \text{est bien défini presque partout.}$$

De façon précise, Φ est bien définie en tout point de l'ensemble borélien

$$E := \{x \in \mathbb{R}^p; \Theta(x) < \infty\};$$

et pour tout $x \in E$, on a

$$\Phi(x) = \int_{\Omega_x} f^+(x, y) \, dy - \int_{\Omega_x} f^-(x, y) \, dy.$$

Par le Lemme 3.1, cette formule montre que la fonction Φ est borélienne sur E . On prolonge Φ en une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^p$ tout entier en posant $\Phi(x) = 0$ pour $x \notin E$. On a $|\Phi(x)| \leq \Theta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ (évident si $x \notin E$; et si $x \in E$ on a $|\Phi(x)| = |\int_{\Omega_x} f(x, y) \, dy| \leq \int_{\Omega_x} |f(x, y)| \, dy = \Theta(x)$). Donc Φ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.

Pour finir, montrons que

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) \, dx = \int_{\Omega} f.$$

Par (1) appliqué à f^+ et f^- , et comme $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus E) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) dx &= \int_E \Phi(x) dx \\
 &= \int_E \left(\int_{\Omega_x} f^+(x, y) dy - \int_{\Omega_x} f^-(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_E \left(\int_{\Omega_x} f^+(x, y) dy \right) dx - \int_E \left(\int_{\Omega_x} f^-(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f^+(x, y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\Omega_x} f^-(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^- \quad \text{par (1)} \\
 &= \int_{\Omega} f.
 \end{aligned}$$

□

EXERCICE. Soit $f :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vérifier qu'on a

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

puis montrer que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ existent mais ne sont pas égales.

4. Changements de variables

4.1. Ré-écriture de la formule de changement de variable dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4.1. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. Pour toute fonction borélienne f positive ou intégrable sur $\phi(I)$, on a

$$(4.1) \quad \int_{\phi(I)} f(x) dx = \int_I f(\phi(u)) |\phi'(u)| du.$$

Démonstration. On écrit $I =]a, b[$.

Si ϕ est croissante, alors $\phi(I) =]\phi(a), \phi(b)[$ et $\phi' \geq 0$; donc

$$\int_I f(\phi(u)) |\phi'(u)| du = \int_a^b f(\phi(u)) \phi'(u) du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_{\phi(I)} f(x) dx.$$

Si ϕ est décroissante, alors $\phi(I) = (\phi(b), \phi(a))$ et $\phi' \leq 0$; donc

$$\int_I f(\phi(u)) |\phi'(u)| du = \int_a^b f(\phi(u)) \times (-\phi'(u)) du = - \int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x) dx = \int_{\phi(I)} f(x) dx.$$

□

4.2. Énoncé de la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 4.2. Une **difféomorphisme** entre deux ouverts $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$ est une bijection $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ telle que Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par exemple, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que ϕ' ne s'annule jamais, alors ϕ est un difféomorphisme de I sur l'intervalle ouvert $I' := \phi(I)$.

NOTATION. Si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, on note $J_\Phi(u)$ le **déterminant jacobien** de Φ en un point $u \in \Omega$, i.e. le déterminant de la matrice jacobienne de Φ au point u . En écrivant $\Phi(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_d(u))$, on a donc

$$J_\Phi(u) = \det(\partial_j \Phi_i(u))_{1 \leq i, j \leq d}.$$

FAIT IMPORTANT. Une bijection $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme si et seulement si Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $J_\Phi(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$. Plus généralement, si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et injective, avec $J_\Phi(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$, alors $\Omega' := \Phi(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et Φ est un difféomorphisme de Ω sur Ω' .

Démonstration. C'est une conséquence du **Théorème d'inversion locale**; cf n'importe quel livre de calcul différentiel. $\square$

THÉORÈME 4.3. (formule de changement de variables)

Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ et pour toute fonction borélienne f positive ou intégrable sur $\Phi(A)$, on a

$$\int_{\Phi(A)} f(x) dx = \int_A f(\Phi(u)) |J_\Phi(u)| du.$$

Remarque 1. $\Phi(A)$ est bien un borélien de $\mathbb{R}^d$ car $\Phi(A) = (\Phi^{-1})^{-1}(A)$ et l'application Φ^{-1} est continue (donc borélienne).

Remarque 2. Dans le cas "intégrable", l'énoncé précis est le suivant : si f est intégrable sur $\Phi(A)$, alors $f(\Phi(u))|J_\Phi(u)|$ est intégrable sur A et la formule est vraie.

COROLLAIRE 4.4. Si $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ est un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, alors on a pour tout borélien $A \subseteq \Omega$:

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi(u)| du.$$

Démonstration. On applique le théorème avec $f := \mathbf{1}$:

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} \mathbf{1}(x) dx = \int_A \mathbf{1}(\Phi(u)) |J_\Phi(u)| du = \int_A |J_\Phi(u)| du.$$

$\square$

MODE D'EMPLOI DE LA FORMULE. Supposons qu'on veuille calculer une intégrale

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N,$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$. On peut procéder comme suit.

- (i) On *devine* qu'il peut être avantageux d'introduire de nouvelles variables $u_1, \dots, u_d$.
- (ii) On exprime $x = (x_1, \dots, x_d)$ en fonction de $u = (u_1, \dots, u_d)$, et on vérifie qu'on a bien un difféomorphisme $x = \Phi(u)$ défini sur un ouvert Ω tel que $\Phi(\Omega) \supseteq \mathcal{D}$.
- (iii) On écrit $x = \Phi(u)$ et $dx = |J_\Phi(u)|du$, i.e.

$$dx_1 \cdots dx_d = |J_\Phi(u_1, \dots, u_d)| du_1 \cdots du_d.$$

- (iv) On trouve le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ tel que $\Phi(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}$.

- (v) On écrit la formule de changement de variables

$$\int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(u_1, \dots, u_d) |J_\Phi(u_1, \dots, u_d)| du_1 \cdots du_d,$$

en n'oubliant pas de remplacer $\mathcal{D}$ par $\tilde{\mathcal{D}}$ et de mettre une valeur absolue autour du déterminant jacobien.

Exemple 1. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+1 \leq y \leq x+2 \text{ et } -1 \leq x+2y \leq 2\}$. On veut calculer l'intégrale $I := \int_{\mathcal{D}} xy \, dx dy$.

On *devine* qu'il peut être utile d'introduire les variables

$$u = y - x \quad \text{et} \quad v = x + 2y.$$

Raison : par définition de $\mathcal{D}$,

$$(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \tilde{\mathcal{D}} := [1, 2] \times [-1, 2],$$

et le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ est visiblement "plus simple" que $\mathcal{D}$.

Pour exprimer (x, y) en fonction de (u, v) , on inverse le système

$$\begin{cases} u &= y - x \\ v &= x + 2y \end{cases}$$

On trouve

$$(x, y) = \left(\frac{v-2}{3}, \frac{u+v}{3} \right) := \Phi(u, v).$$

Il est évident que Φ est un difféomorphisme (linéaire) de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (l'inverse est $\Phi^{-1}(x, y) = (u, v) = (y - x, x + 2y)$!); et on a

$$J_\Phi(u, v) = \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

D'après la formule de changement de variables, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} xy \, dx dy &= \int_{[1,2] \times [-1,2]} \left(\frac{v-2}{3} \right) \left(\frac{u+v}{3} \right) \times \frac{1}{3} du dv \\ &= \frac{1}{27} \int_1^2 \left(\int_{-1}^2 (v^2 - uv - 2u^2) dv \right) du \quad \text{par Fubini.} \end{aligned}$$

Après calcul, on obtient (**vérifier**) $I = -\frac{29}{108}$.

Exercice. Calculer directement I à l'aide du théorème de Fubini, sans utiliser la formule de changement de variables.

Exemple 2. Calcul de l'intégrale

$$I := \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2}.$$

Soit $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u + v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right).$$

Exo : Φ est une bijection de Ω sur $\mathcal{D} =]0, 1[\times]0, 1[$. De plus, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour $(u, v) \in \Omega$, on a (en posant $(x, y) = \Phi(u, v)$)

$$\begin{aligned} J_{\Phi}(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} \\ \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 v} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} \\ &= 1 - \tan^2 u \tan^2 v \\ &= 1 - x^2 y^2. \end{aligned}$$

En particulier, $J_{\Phi}(u, v) > 0$ pour tout $(u, v) \in \Omega$, donc Φ est un difféomorphisme de Ω sur $]0, 1[\times]0, 1[$. D'après la formule de changement de variables et l'expression de $J_{\Phi}(u, v)$, on a donc

$$I = \int_{\Phi(\Omega)} \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2} = \int_{\Omega} du dv = \lambda_2(\Omega);$$

autrement dit

$$I = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice. Utiliser cet exemple pour calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$; puis calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

REMARQUE 4.5. On peut aussi utiliser la formule de changement de variables “en sens inverse” : on doit au départ calculer une intégrale $\int_{\Omega} g(u_1, \dots, u_d) du_1 \cdots du_d$, et on introduit de nouvelles variables $x_1, \dots, x_d$ telles que $(x_1, \dots, x_d) = \Phi(u_1, \dots, u_d)$ pour une certaine application Φ . Dans ce cas, il faut exprimer $(u_1, \dots, u_d)$ en fonction de $(x_1, \dots, x_d)$, autrement dit déterminer Φ^{-1} , et appliquer la formule de changement de variable à Φ^{-1} . En pratique : on doit se débrouiller pour tout exprimer en fonction de $x_1, \dots, x_d$ et $dx_1, \dots, dx_d$ dans $g(u_1, \dots, u_d) du_1 \cdots du_d$.

Exercice. Calculer l'intégrale $I := \int_{\{u>v>0\}} (u^4 - v^4) e^{-(u+v)^2} du dv$ en posant $(x, y) = (u^2 + v^2, 2uv)$.

4.3. Intégration en coordonnées polaires.

PROPOSITION 4.6. Soit $\mathcal{D}$ un borélien de $\mathbb{R}^2$, et soit $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pour toute fonction borélienne f positive ou intégrable sur $\mathcal{D}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) r dr d\theta,$$

où $\tilde{\mathcal{D}} := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0, 0 < \theta < 2\pi \text{ et } (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \in \mathcal{D}\}$.

Démonstration. Soit $\Phi :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(r, \theta) := (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta).$$

Alors Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ sur l'ensemble de tous les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrivant $(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \neq 0 [2\pi]$; autrement dit sur $\Omega' := \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, où Δ est la demi-droite d'origine (x_0, y_0) parallèle à l'axe des abscisses et dirigée vers la droite. En particulier, Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On a

$$J_\Phi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r > 0 \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in \Omega.$$

Donc Φ est un difféomorphisme; et comme $\Phi(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{D} \cap \Omega'$ par définition de $\tilde{\mathcal{D}}$, la formule de changement de variables s'écrit

$$\int_{\mathcal{D} \cap \Omega'} f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Enfin, on a $\lambda_2(\mathcal{D} \setminus \Omega') = 0$ car $\mathcal{D} \setminus \Omega'$ est contenu dans la demi-droite Δ . Donc on peut écrire $\int_{\mathcal{D}}$ au lieu de $\int_{\mathcal{D} \cap \Omega'}$. $\square$

CONCLUSION. Pour intégrer en coordonnées polaires, il faut se souvenir que

$$dx dy = r dr d\theta.$$

Si de plus $(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors il faut aussi se souvenir qu'on a

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Donc : si on voit apparaître $x^2 + y^2$ dans une intégrale, on *doit penser* au coordonnées polaires.

EXEMPLE 4.7. Calcul de $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$.

Idée : calculer I^2 . On a

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \quad \text{par Fubini "positif"} \\ &= \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\infty} d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Donc :

$$I = \sqrt{2\pi}.$$

4.4. Volumes et transformations affines.

RAPPEL. Une application $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est dite **affine** si elle est de la forme

$$\Phi(u) = a + L(u),$$

où $a \in \mathbb{R}^d$ est fixé et $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application linéaire. (On dit que L est l'**application linéaire associée à Φ** .) Autrement dit, Φ est affine si elle est de la forme $\Phi(u) = a + Mu$, où M est une matrice $d \times d$. Exemples : translations ($L = Id$) ; applications linéaires ($a = 0$) ; projections et symétries (pas forcément orthogonales).

NOTATION. Si Φ est une application affine, $\Phi(u) = a + L(u)$, on pose

$$\det(\Phi) = \det(L) = \det(M).$$

FAIT. Soit $\Phi : \mathbb{R}^d$ une application affine, $\Phi(u) = a + L(u) = a + Mu$.

- Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\text{Jac}_\Phi(u) = M$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, et donc $J_\Phi(u) = \det(\Phi)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.
- Φ difféo $\iff L$ inversible $\iff M$ inversible.

Démonstration. **Exo.** □

PROPOSITION 4.8. Si $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme affine, alors

$$(4.2) \quad \lambda_d(\Phi(A)) = |\det(\Phi)| \times \lambda_d(A) \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Autrement dit, Φ multiplie tous les volumes par le facteur constant $|\det(\Phi)|$.

Démonstration. Évident par le Corollaire 4.4 :

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi(u)| d\lambda_d(u) = |\det(\Phi)| \times \lambda_d(A).$$

□

Vu l'importance de ce résultat, on va maintenant en donner une preuve "directe" n'utilisant la formule de changement de variables générale.

Preuve directe de la Proposition 4.8. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translations, il suffit de démontrer (4.2) pour toute transformation *linéaire* Φ . Autrement dit, il s'agit de montrer que pour toute matrice inversible $M \in GL_N(\mathbb{R})$ et pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^N$, on a

$$(4.3) \quad \lambda_N(M \cdot A) = |\det(M)| \lambda_N(A),$$

où $M \cdot A = \{Mu; u \in A\}$.

On va pour cela utiliser des matrices particulières : les matrices dites **de transvection**. Par définition, une matrice de transvection est une matrice T de la forme

$$T = Id + \alpha E_{i,j},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $i \neq j$ et $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. Notons qu'une telle matrice T est de déterminant 1. L'intérêt de ces matrices tient au fait suivant.

FAIT 1. Toute matrice $M \in GL_N(\mathbb{R})$ de déterminant 1 est produit de matrices de transvections. Par conséquent, toute matrice $M \in GL_N(\mathbb{R})$ est produit de matrices de transvections et d'une matrice diagonale.

Preuve du Fait 1. Le premier point se démontre sans trop de difficultés en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes; cf n'importe quel livre d'algèbre linéaire. Pour le deuxième point, il suffit d'observer que toute matrice $M \in GL_N(\mathbb{R})$ peut s'écrire $M = DS$, où D est diagonale et $\det(S) = 1$; par exemple, on peut prendre pour D la matrice dont le premier coefficient diagonal vaut $1/\det(M)$ et tous les autres valent 1 (une matrice de ce type est ce qu'on appelle une **matrice de dilatation**). $\square$

FAIT 2. La formule (4.3) est vraie pour toute matrice de transvection.

Preuve du Fait 2. Soit T une matrice de transvection. Comme $\det(T) = 1$, on doit montrer qu'on a $\lambda_N(T \cdot A) = \lambda_N(A)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Si on pose $\mu(A) = \lambda_N(T \cdot A)$, on voit sans difficulté que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^N$. Donc, il s'agit de montrer qu'on a

$$\lambda_N(T \cdot P) = |P| \quad \text{pour tout pavé } P \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Pour simplifier les écritures, on va supposer que ($N \geq 2$ et)

$$T = Id + \alpha E_{1,2},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $u = (x, y, u_3, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$, on a donc

$$Tu = \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

En écrivant $P = I \times J \times Q$ où I, J sont des intervalles et Q est un pavé de $\mathbb{R}^{N-2}$, on en déduit que

$$T \cdot P = A \times Q,$$

où

$$A = \{(x + \alpha y, y); (x, y) \in I \times J\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

D'après le principe de Cavalieri, on a

$$\begin{aligned} \lambda_2(A) &= \int_J \lambda_1(A^y) dy \\ &= \int_J \lambda_1(I + \alpha y) dy \\ &= |I| |J|, \end{aligned}$$

car $\lambda_1(I + \alpha y) = \lambda_1(I) = |I|$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\lambda_N(T \cdot P) = \lambda_2(A) \lambda_{N-2}(Q) = |I| |J| |Q| = |P|.$$

$\square$

FAIT 3. La formule (4.3) est vraie pour toute matrice diagonale.

Preuve du Fait 3. On procède comme pour le Fait 2 en introduisant la mesure μ définie par $\mu(A) = \mu(D \cdot A)$, où D est la matrice diagonale considérée. Les détails constituent un bon exercice. $\square$

FAIT 4. Si la formule (4.3) est vraie pour deux matrices M_1, M_2 , alors elle est vraie pour $M = M_1 M_2$.

Preuve du Fait 4. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$, alors

$$\lambda_N(M \cdot A) = \lambda_N(M_1 \cdot (M_2 \cdot A)) = \det(M_1) \lambda_N(M_2 \cdot A) = \det(M_1) \det(M_2) \lambda_N(A);$$

d'où le résultat puisque $\det(M_1) \det(M_2) = \det(M)$. $\square$

La Proposition 4.8 découle immédiatement des faits précédents : si $M \in GL_N(\mathbb{R})$, on écrit $M = DT_1 \cdots T_K$ où D est diagonale et les T_k sont des matrices de transvection ; la formule (4.3) est vraie pour D et chacune des T_k par les Faits 2 et 3, donc elle est vraie pour M d'après le Fait 4. $\square$

Exemple 1. Si $ABCD$ est un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$, alors l'aire de $ABCD$ est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Démonstration. Un point M appartient au parallélogramme $ABCD$ si et seulement si on peut écrire

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 1$.

Donc $ABCD$ est l'image du pavé $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(\lambda, \mu) := A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

L'application Φ est un difféomorphisme affine de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'application linéaire associée $L(\lambda, \mu) = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$. Si on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, i.e. $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, alors $L(e_1) = \overrightarrow{AB}$ et $L(e_2) = \overrightarrow{AD}$. Donc

$$\det(\Phi) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD});$$

et donc

$$\lambda_2(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| \times \lambda_2([0, 1] \times [0, 1]) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|. \quad \square$$

Exemple 2. Aire d'une ellipse "pleine".

Soient $a, b > 0$. On veut calculer l'aire de

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Si on pose $u = \frac{x}{a}$ et $v = \frac{y}{b}$, alors

$$(x, y) \in \mathcal{E} \iff u^2 + v^2 \leq 1.$$

Autrement dit, si on définit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\Phi(u, v) = (au, bv)$, alors (Φ est un difféo linéaire et) $\mathcal{E} = \Phi(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est le disque unité, $\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 \leq 1\}$. Comme

$$\det(\Phi) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab,$$

on a donc $\lambda_2(\mathcal{E}) = ab \times \lambda_2(\mathcal{D})$, autrement dit

$$\lambda_2(\mathcal{E}) = \pi ab.$$

4.5. Volumes et isométries.

RAPPEL. Une application $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une **isométrie euclidienne** si on a

$$\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_2 = \|v - u\|_2 \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^d,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Exemples : translations, les rotations et les symétries orthogonales

LEMME 4.9. *Toute isométrie euclidienne $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est affine.*

Démonstration. On va utiliser une voie qui n'est pas la plus courte possible, mais qui a l'avantage d'être praticable avec d'autres normes que la norme euclidienne.

FAIT 1. Si $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une isométrie, alors Φ conserve les milieux : on a

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{\Phi(u) + \Phi(v)}{2} \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve du Fait 1. De façon générale, le milieu m d'un segment $[x, y] \subseteq \mathbb{R}^d$ est caractérisé par les égalités purement métriques

$$\|m - x\|_2 = \frac{1}{2} \|y - x\|_2 = \|y - m\|_2.$$

Maintenant, si $u, v \in \mathbb{R}^d$ et si on pose $m' := \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)$, alors

$$\|m' - \Phi(u)\|_2 = \left\| \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) - \Phi(u) \right\|_2 = \left\| \frac{u+v}{2} - u \right\|_2 = \frac{1}{2} \|v - u\|_2,$$

et de même

$$\|\Phi(v) - m'\|_2 = \frac{1}{2} \|v - u\|_2;$$

donc $m' = \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ est le milieu de $[\Phi(u), \Phi(v)]$. □

FAIT 2. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et conserve les milieux, alors f est affine.

Preuve du Fait 2. Quitte à remplacer f par $f - f(0)$ (qui vérifie les mêmes hypothèses que f), on peut supposer que $f(0) = 0$. Dans ce cas, on doit montrer que f est linéaire.

L'hypothèse faite sur f est qu'on a

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2} \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^d.$$

En prenant $u := x \in \mathbb{R}^d$ et $v := 0$ et comme $f(0) = 0$, on obtient $f(x/2) = f(x)/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} f(u+v)$, et on obtient ainsi

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Autrement dit, l'application f est additive.

Il reste alors à montrer qu'on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$; ce qui est un exercice très classique. En utilisant l'additivité, on montre d'abord que cela est vrai pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate). Comme de plus $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (car $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$), on en déduit qu'on a $f(nu)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De là, on montre que $f(ru) = rf(u)$ pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ en écrivant $pf(u) = f(pu) = f(qru) = qf(ru)$. Enfin, on utilise la continuité de f pour montrer que l'identité $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. □

□

THÉORÈME 4.10. *La mesure de Lebesgue est **invariante par isométries** : si Φ est une isométrie euclidienne de $\mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(\Phi(A)) = \lambda_d(A)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une isométrie euclidienne. Par le Lemme 4.9, Φ est affine et donc de la forme $\Phi(u) = a + Mu$ pour une certaine matrice M . La matrice M vérifie $\|Mu\|_2 = \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_2 = \|u\|_2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$; donc M est une matrice *orthogonale*, et en particulier M est inversible avec $\det(M) = \pm 1$. Donc Φ est un difféomorphisme affine avec $|\det(\Phi)| = 1$; et donc le résultat découle de la Proposition 4.8. □

REMARQUE. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $d \geq 1$. En choisissant une base orthonormée $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$ de E , on peut identifier E à $\mathbb{R}^d$, et donc définir une “mesure de Lebesgue associée à la base $\mathbf{e}$ ” sur E . Le Théorème 4.10 montre que cette mesure ne dépend en fait pas de la base orthonormée $\mathbf{e}$. On peut donc la noter λ_E , et l’appeler *la mesure de Lebesgue sur E* . Plus généralement, on peut définir une mesure de Lebesgue sur tout sous-espace *affine* de $\mathbb{R}^n$ (i.e. un translaté d’un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$).

4.6. Preuve de la formule de changement de variables. Comme d’habitude : il suffit de traiter le cas des fonctions *positives*.

TERMINOLOGIE. On écrira (CV) au lieu de “formule de changement de variables”, et on dira que (CV) est vraie pour un difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ si on a

$$\int_{\Phi(A)} f(x) dx = \int_A f(\Phi(u)) |J_\Phi(u)| du$$

pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ et pour toute fonction borélienne $f : \Phi(A) \rightarrow [0, \infty]$.

But : montrer que (CV) est vraie pour *tout* difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux ouverts quelconques $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$, quel que soit l’entier $d \geq 1$.

LEMME SIMPLIFICATEUR. Pour un difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) (CV) est vraie pour Φ ;
- (2) pour tout borélien $A \subseteq \Omega$,

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi(u)| du;$$

- (3) pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert U_a de a (avec $U_a \subseteq \Omega$) tel que

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi(u)| du \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq U_a.$$

Démonstration. (1) $\implies$ (2) : évident en prenant $f = \mathbf{1}$ dans (CV).

(2) $\implies$ (3) : évident aussi (**micro-exo**).

(2) $\implies$ (1) : “déjà fait” (si (2) est vraie, alors (CV) est vraie pour les fonctions étagées positives par “linéarité”, et donc pour toutes les fonctions boréliennes positives par convergence monotone.)

(3) $\implies$ (2). Supposons (3) vérifiée. Pour tout $a \in \Omega$, soit U_a un voisinage ouvert de a comme dans (3). Quitte à dilminuer U_a , on peut supposer que U_a est un pavé ouvert à extrémités rationnelles. On a $\Omega = \bigcup_{a \in \Omega} U_a$; et comme la famille des pavés ouverts à extrémités rationnelles est dénombrable, on voit ainsi qu'il existe une suite d'ouverts $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = \Omega \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall A \subseteq U_k : \lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi(u)| du.$$

Maintenant, soit A un borélien quelconque de Ω . On pose $A_0 := U_0$ et

$$A_k := U_k \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_{k-1}) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Les A_k sont des boréliens deux à deux disjoints, et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$. Comme Φ est injective, $\Phi(A)$ est donc la réunion *disjointe* des $\Phi(A_k)$:

$$\Phi(A) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi(A_k) \quad \text{union disjointe.}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lambda_d(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_d(\Phi(A_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} |J_\Phi(u)| du \quad \text{car } A_k \subseteq U_k \text{ pour tout } k \\ &= \int_{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k} |J_\Phi(u)| du \quad \text{car les } A_k \text{ sont disjoints} \\ &= \int_A |J_\Phi(u)| du. \end{aligned}$$

Donc (2) est vérifiée. □

DÉFINITION 4.11. Soient V et V' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

(1) On dit qu'un difféomorphisme $\Sigma : V \rightarrow V'$ est une **permutation de coordonnées** si Σ est de la forme $\Sigma(x_1, \dots, x_d) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})$, où σ est une permutation de $\{1, \dots, d\}$.

(2) Étant donné $j \in \{1, \dots, d\}$, on dira qu'un difféomorphisme $\Phi : V \rightarrow V'$ **préserve la j -ième coordonnée** si, pour tout $v \in V$, la j -ième coordonnée de $\Phi(v)$ est égale à celle de v ; autrement dit, si Φ est de la forme

$$\Phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_d) = (\Phi_1(v_1, \dots, v_d), \dots, v_j, \dots, \Phi_d(v_1, \dots, v_d)).$$

Par exemple, le difféomorphisme $\Sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\Sigma(x, y, z) = (y, z, x)$ est une permutation de coordonnées; et le difféomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\Phi(x, y, z) = (x, x + y, y + z)$ préserve la 1ère coordonnée.

FAIT 1. Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^{d+1}$. Pour tout $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert U_a de a tel que

$$\forall u \in U_a : \Phi(u) = \Phi^2 \circ \Phi^1 \circ \Sigma(u),$$

où Σ est une permutation de coordonnées, Φ^2 est un difféomorphisme préservant les d premières coordonnées (défini sur $\Sigma(U_a)$), et Φ^1 est un difféomorphisme préservant la $(d+1)$ -ième coordonnée (défini sur $\Phi^1 \circ \Sigma(U_a)$).

Preuve pour $d = 1$. (Pour d quelconque, la preuve est essentiellement la même, avec des notations plus lourdes.)

On est dans $\mathbb{R}^2$, donc on écrit $u = (x, y)$ et $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, y) \\ \Phi_2(x, y) \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \Omega$ fixé. Comme Φ est un difféo, la matrice $\text{Jac}_\Phi(a)$ est inversible, donc $(\partial_1 \Phi_2(a), \partial_2 \Phi_2(a)) \neq (0, 0)$. On suppose par exemple que $\partial_1 \Phi_2(a) \neq 0$. Alors, par continuité de $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$, on peut trouver un pavé ouvert U_a contenant a tel que $\partial_1 \Phi_2(u) \neq 0$ pour tout $u \in U_a$.

Soit $\Sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la permutation de coordonnées définie par $\Sigma(x, y) = (y, x)$, et soit $V := \Sigma(U_a)$. On définit $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\Psi = \Phi \circ \Sigma^{-1};$$

autrement dit $\Psi(s, t) = \Phi(t, s)$. Alors $\Psi(s, t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t, s) \\ \Phi_2(t, s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Psi_1(s, t) \\ \Psi_2(s, t) \end{pmatrix}$, donc $\partial_2 \Psi_2(s, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_2(t, s)) = \partial_1 \Phi_2(t, s)$. En particulier :

$$\forall v \in V : \partial_2 \Psi_2(v) \neq 0.$$

De plus, Ψ est un difféomorphisme de V sur $\Psi(V)$.

Soit maintenant $\Phi^2 : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi^2(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ \Psi_2(s, t) \end{pmatrix}$$

Alors Φ^2 est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, on a $J_{\Phi^2}(s, t) = \partial_2 \Psi_2(s, t)$ pour tout $(s, t) \in V$; et donc $J_{\Phi^2}(V) \neq 0$ pour tout $v \in V$.

Sous-fait. Φ^2 est *injective* sur V .

Preuve du sous-fait. Comme U_a est un pavé ouvert, $V = \{(s, t); (t, s) \in U_a\}$ est aussi un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. On écrit $V = J \times I$, où J et I sont des intervalles ouverts. Supposons que $(s, t), (s', t') \in V$ vérifient $\Phi^2(s, t) = \Phi^2(s', t')$. Alors $s = s'$ vu la forme de Φ^2 , et donc $\Psi_2(s, t) = \Psi_2(s, t')$. Supposons $t \neq t'$, par exemple $t < t'$. Comme la fonction $\xi \mapsto \Psi_2(s, \xi)$ est dérivable sur I et $t, t' \in I$, il existe $c \in I$ (en fait $c \in [t, t']$) tel que $\partial_2 \Psi_2(s, c) = 0$, par le théorème de Rolle. Mais c'est absurde car $(s, c) \in J \times I = V$ et $\partial_2 \Psi_2(v) \neq 0$ sur V . $\square$

Par le sous-fait, et comme $J_{\Phi^2}(V) \neq 0$ pour tout $v \in V$, on sait maintenant que $V' := \Phi^2(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que Φ^2 est un difféomorphisme de V sur V' ; et bien sûr Φ^2 préserve la 1ère coordonnée.

Soit alors $\Phi^1 := \Psi \circ (\Phi^2)^{-1}$, qui est un difféomorphisme de V' sur $\Psi(V) = \Phi(U_a)$. Si $(s', t') = \Phi^2(s, t) \in V'$, alors $\Phi^1(s', t') = \Phi^1(\Phi^2(s, t)) = \Psi(s, t) = (\Psi_1(s, t), \Psi_2(s, t))$. Mais $\Psi_2(s, t) = t'$ par définition de Φ^2 , donc $\Phi^1(s', t') = (\Psi_1(s, t), t')$; donc Φ^1 préserve la 1ère coordonnée.

Comme $\Phi \circ \Sigma^{-1} = \Psi = \Phi^1 \circ \Phi^2$ sur $V = \Sigma(U)$, on voit que $\Phi = \Phi^1 \circ \Phi^2 \circ \Sigma$ sur U ; donc on a fini. $\square$

FAIT 2. Si (CV) est vraie pour $\Phi^1 : \Omega \rightarrow \Omega'$ et $\Phi^2 : \Omega' \rightarrow \Omega''$, alors elle est vraie pour $\Phi := \Phi^2 \circ \Phi^1$.

Démonstration. Soit A un borélien quelconque de Ω . Si (CV) est vraie pour Φ^1 et Φ^2 , on peut écrire

$$\begin{aligned}\lambda_d(\Phi(A)) &= \lambda_d(\Phi^2(\Phi^1(A))) \\ &= \int_{\Phi^1(A)} |J_{\Phi^2}(v)| dv \\ &= \int_A |J_{\Phi^2}(\Phi^1(u))| |J_{\Phi^1}(u)| du.\end{aligned}$$

De plus, comme $\Phi = \Phi^2 \circ \Phi^1$ on a $J_{\Phi}(u) = J_{\Phi^2}(\Phi^1(u)) J_{\Phi^1}(u)$ pour tout $u \in \Omega$. Donc

$$J_{\Phi^2}(\Phi^1(u)) J_{\Phi^1}(u) = J_{\Phi}(u),$$

et donc

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |J_{\Phi}(u)| du.$$

Ainsi, (CV) est vraie pour Φ d'après le Lemme simplificateur. $\square$

FAIT 3. (CV) est vraie pour toute permutation de coordonnées.

Démonstration. Soit $\Sigma : V \rightarrow V'$ une permutation de coordonnées, et soit σ la permutation de $\{1, \dots, d\}$ associée. Alors Σ est la restriction à V de l'application linéaire $\tilde{\Sigma} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\tilde{\Sigma}(e_j) = e_{\sigma^{-1}(j)}$ pour $j = 1, \dots, d$, où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. La matrice de $\tilde{\Sigma}$ est une "matrice de permutation" ; donc $\det(\tilde{\Sigma}) = \pm 1$, et donc $|J_{\Sigma}(u)| = |\det(\tilde{\Sigma})| = 1$ pour tout $u \in V$. D'après le Lemme simplificateur, il suffit donc vérifier qu'on a $\lambda_d(\Sigma(A)) = \lambda_d(A)$ pour tout borélien $A \subseteq V$;. Comme l'application $A \mapsto \lambda_d(\Sigma(A))$ est une mesure borélienne sur V (exo), il suffit de vérifier qu'on a $\lambda_d(\Sigma(P)) = |P|$ pour tout pavé $P \subseteq V$. On écrit $P = I_1 \times \dots \times I_d$: alors $\Sigma(P)$ est le pavé $P_{\sigma} := I_{\sigma(1)} \times \dots \times I_{\sigma(d)}$, et donc $|\sigma(P)| = |P|$. $\square$

PREUVE DE (CV). On va le faire par *récurrence sur la dimension d*.

(1) Cas où $d = 1$.

Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}$. Pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un intervalle ouvert I tel que $a \in I \subseteq \Omega$. Alors Φ est strictement monotone sur I . Pour tout borélien $A \subseteq I$, on a d'après la Proposition 4.1 :

$$\lambda_1(\Phi(A)) = \int_{\Phi(I)} \mathbf{1}_{\Phi(A)}(x) dx = \int_I \mathbf{1}_{\Phi(A)}(\Phi(u)) |\Phi'(u)| du = \int_A |\Phi'(u)| du.$$

Donc (CV) est vraie pour Φ d'après le Lemme simplificateur.

(2) Passage de d à $d + 1$

Supposons avoir montré que (CV) est vraie en dimension d , et soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^{d+1}$.

D'après le Lemme simplificateur, il suffit de vérifier que pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert U_a de a tel que

$$(4.4) \quad \lambda_{d+1}(A) = \int_A |J_{\Phi}(u)| du \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq U_a.$$

On fixe donc un point $a \in \Omega$.

Par le Fait 1, on peut trouver un voisinage ouvert $U = U_a$ de a sur lequel Φ peut se “décomposer” sous la forme $\Phi = \Phi^2 \circ \Phi^1 \circ \Sigma$, où Σ est une permutation de coordonnées, Φ^1 est un difféo préservant la dernière coordonnée, et Φ^2 est un difféo préservant la première coordonnée. Par les Faits 2 et 3, on voit donc qu’il suffit de montrer que (CV) est vraie pour Φ^1 et Φ^2 . Donc : on s’est ramené au cas où Φ *préserve la première ou la dernière coordonnée*.

Supposons par exemple que Φ préserve la dernière coordonnée. Dans la suite, on écrit un point $u \in \mathbb{R}^{d+1}$ sous la forme $u = (v, t)$ où $v \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$(4.5) \quad \Phi(u) = \Phi(v, t) = (\Psi(v, t), t)$$

pour tout $u = (v, t) \in U$, où $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

NOTATIONS. Pour $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A^t := \{v \in \mathbb{R}^d; (v, t) \in A\}.$$

Et pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $U^t \neq \emptyset$, on note $\Psi_t : U^t \rightarrow \mathbb{R}^d$ l’application définie par

$$\Psi_t(v) = \Psi(v, t).$$

Par définition de Φ et comme Φ est injective, chaque application Ψ_t est injective (exo). De plus, on a (autre exo)

$$J_{\Psi_t}(v) = J_{\Phi}(v, t) \quad \text{pour tout } v \in U^t.$$

En particulier $J_{\Psi_t}(v) \neq 0$ pour tout $v \in U^t$. Donc $\Psi_t(U^t)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et Ψ_t est un difféomorphisme de U^t sur $\Psi_t(U^t)$.

Maintenant, soit A un borélien quelconque de U . D’après le principe de Cavalieri, on a

$$\lambda_{d+1}(\Phi(A)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_d(\Phi(A)^t) dt.$$

De plus, par (4.5) on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi(A)^t &= \{v' \in \mathbb{R}^d; \exists (v, s) \in A : \Phi(v, s) = (v', t)\} \\ &= \{v' \in \mathbb{R}^d; \exists (v, s) \in A : (\Psi(v, s), s) = (v', t)\} \\ &= \{v' \in \mathbb{R}^d; \exists v \in A^t : v' = \Psi(v, t)\} \\ &= \Psi_t(A^t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lambda_{d+1}(\Phi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_d(\Psi_t(A^t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A^t} |J_{\Psi_t}(v)| dv \right) dt, \end{aligned}$$

où on a appliqué l’hypothèse de récurrence aux difféomorphismes Ψ_t .

Comme $J_{\Psi_t}(v) = J_{\Phi}(v, t)$ pour tout $(v, t) \in U$, on obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \lambda_{d+1}(\Phi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A^t} |J_{\Phi}(v, t)| dv \right) dt \\ &= \int_A |J_{\Phi}(u)| du \quad \text{par Fubini.} \end{aligned}$$

Conclusion : on a fini ! □

Espaces L^p

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ fixé une fois pour toutes.

- “Intégrable” veut dire “intégrable par rapport à μ ”.
- “Presque partout” ou “pp” veut dire “ μ -presque partout”.

1. Semi-normes $\|\cdot\|_p$ et espaces $\mathcal{L}^p$

1.1. Le cas $1 \leq p < \infty$. On fixe un nombre p tel que $1 \leq p < \infty$.

DÉFINITION 1.1. Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p},$$

avec la convention $\infty^{1/p} = \infty$. On pose aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \|f\|_p < \infty\} \\ &= \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 1. On écrira souvent $\mathcal{L}^p$ au lieu de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Mais on pourra aussi écrire $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)}$ au lieu de $\|\cdot\|_p$.

Remarque 2. Par définition, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable, alors

$$f \in \mathcal{L}^p \iff |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Remarque 3. “ $f \in \mathcal{L}^1$ ” signifie que f est intégrable sur Ω .

CAS PARTICULIERS. (1) Si Ω est un borélien de $\mathbb{R}^d$, la notation $\mathcal{L}^p(\Omega)$ signifiera toujours $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_d)$.

(2) Pour tout ensemble $I \neq \emptyset$, l’espace $\mathcal{L}^p(I, \mathcal{P}(I), \mu_c)$ se notera $\ell^p(I)$. Pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$, on a

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i \in I} |f(i)|^p \right)^{1/p},$$

et donc

$$\ell^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{i \in I} |f(i)|^p < \infty \right\}.$$

(3) Si $I = \{1, \dots, d\}$, alors $\ell^p(I)$ s’identifie à $\mathbb{C}^d$; et pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ on a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p};$$

- (4) si $I = \mathbb{N}$, alors $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble de toutes les suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

DÉFINITION 1.2. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une **semi-norme** sur X est une application $x \mapsto \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour $x, y \in X$.

PROPOSITION 1.3. $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. De plus, pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a l'équivalence $\|f\|_p = 0 \iff f(t) = 0$ presque partout.

Démonstration. (i) Comme $\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu$ et $|f|^p \geq 0$, on a $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $|f(t)|^p = 0$ presque partout, i.e. $f(t) = 0$ presque partout.

(ii) Il est évident que $\|f\|_p \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{L}^p$, et aussi que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_{\Omega} |\lambda f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p.$$

(iii) Inégalité triangulaire : moins évident.

FAIT. L'ensemble $B := \{u \in \mathcal{L}^p; \|u\|_p \leq 1\}$ est convexe : si $u, v \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $(1 - \lambda)u + \lambda v \in B$.

Preuve du Fait. Point clé : la fonction $z \mapsto |z|^p$ est convexe sur $\mathbb{C}$, car $z \mapsto |z|$ est convexe et $x \mapsto x^p$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $p \geq 1$).

Si $u, v \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors on a par convexité de $z \mapsto |z|^p$:

$$|(1 - \lambda)u(t) + \lambda v(t)|^p \leq (1 - \lambda)|u(t)|^p + \lambda|v(t)|^p \quad \text{pour tout } t \in \Omega.$$

Donc, en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(1 - \lambda)u(t) + \lambda v(t)|^p d\mu(t) &\leq (1 - \lambda) \int_{\Omega} |u(t)|^p d\mu(t) + \lambda \int_{\Omega} |v(t)|^p d\mu(t) \\ &\leq (1 - \lambda) + \lambda \quad \text{car } u, v \in B. \end{aligned}$$

Ainsi $\|(1 - \lambda)u + \lambda v\|_p^p \leq 1$ et donc $(1 - \lambda)u + \lambda v \in B$. □

Soient maintenant $f, g \in \mathcal{L}^p$: on veut montrer que $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ presque partout, donc $f + g = g$ presque partout et donc $\|f + g\|_p = \|g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. De même si $\|g\|_p = 0$.

Supposons $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$. Alors les fonctions

$$u := \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad v := \frac{g}{\|g\|_p}$$

sont bien définies, et par (ii) on a $\|u\|_p = 1 = \|v\|_p$. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} u + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} v \\ &= (1-\lambda)u + \lambda v \quad \text{avec } \lambda := \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Par le Fait, on en déduit que $\frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} \in B$, i.e.

$$\left\| \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right\|_p \leq 1.$$

Donc OK par (ii).

(iv) Par (iii), si $f, g \in \mathcal{L}^p$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty$, donc $f+g \in \mathcal{L}^p$. Et par (ii), si $f \in \mathcal{L}^p$, alors $\lambda f \in \mathcal{L}^p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc $\mathcal{L}^p$ est un ev. $\square$

Remarque 1. L'inégalité triangulaire $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ s'appelle l'**inégalité de Minkowski**. Elle est en fait valable pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$, appartenant ou non à $\mathcal{L}^p$ (car évidente si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_p = \infty$). Écriture explicite :

$$\left(\int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Cas particulier : inégalité de Minkowski *pour les sommes* : si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont deux familles de nombres complexes indexées par le même ensemble I , alors

$$\left(\sum_{i \in I} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i \in I} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i \in I} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Remarque 2. Pour $p = 1$, l'inégalité de Minkowski est évidente car $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Exercice. Montrer que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel *sans utiliser* l'inégalité de Minkowski. (Montrer d'abord que si $f, g \in \mathcal{L}^p$, alors $\max(|f|, |g|) \in \mathcal{L}^p$.)

1.2. Le cas $p = \infty$.

LEMME 1.4. *Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$, il existe une plus petite constante $C \leq \infty$ telle que $|f(t)| \leq C$ presque partout.*

Démonstration. Il existe au moins une constante $C \leq \infty$ telle que $|f(t)| \leq C$ presque partout, à savoir $C := \infty$. Donc

$$K := \inf\{C \leq \infty; |f(t)| \leq C \text{ presque partout}\}$$

est un nombre positif bien défini, éventuellement égal à ∞ . Il suffit de montrer qu'on a $|f(t)| \leq K$ presque partout.

Par définition de K , on peut trouver une suite $(C_n) \subseteq [0, \infty]$ telle que

$$C_n \rightarrow K \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (|f(t)| \leq C_n \text{ pp}).$$

Comme une conjection dénombrable de propriétés vraies presque partout est encore vraie presque partout, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N} : |f(t)| \leq C_n) \text{ pp};$$

et donc $|f(t)| \leq K$ pp puisque $C_n \rightarrow K$. $\square$

DÉFINITION 1.5. Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$, on note $\|f\|_\infty$ la plus petite constante $C \leq \infty$ telle que $|f(t)| \leq C$ presque partout ; et on pose

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable ; } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

REFORMULATION. Pour une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, on a l'équivalence

$$f \in \mathcal{L}^\infty \iff \exists C < \infty \text{ telle que } |f(t)| \leq C \text{ presque partout ;}$$

et pour toute constante $C \leq \infty$, on a l'équivalence

$$\|f\|_\infty \leq C \iff |f(t)| \leq C \text{ pp.}$$

En particulier, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable et bornée, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et

$$\|f\|_\infty \leq \sup \{|f(t)| ; t \in \Omega\}.$$

Remarque. Les fonctions de $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ sont dites **essentiellement bornées** (relativement à la mesure μ).

Exercice. Montrer qu'une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$ si et seulement si elle est presque partout égale à une fonction mesurable bornée.

CAS PARTICULIERS. (1) Si Ω est un borélien de $\mathbb{R}^d$, la notation $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est synonyme de $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_d)$.

(2) Si I est un ensemble non vide, l'espace $\mathcal{L}^\infty(I, \mathcal{P}(I), \mu_c)$ se note $\ell^\infty(I)$. Comme "presque partout relativement à μ_c " veut simplement dire "partout", $\ell^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions bornées $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, et on a pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| ; t \in I\}.$$

(3) Si $I = \{1, \dots, d\}$ alors $\ell^\infty(I)$ s'identifie à $\mathbb{C}^d$, et pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ on a

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_d|).$$

(4) Si $I = \mathbb{N}$, alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble de toutes les suites bornées $x = (x_i) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, et pour toute suite $x = (x_i) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ on a

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Exemple 1. Soit $\Omega =]0, 1]$ muni de la mesure $\mu = \delta_{1/2}$. La fonction $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$ n'est pas bornée (!), mais elle est dans $\mathcal{L}^\infty(]0, 1], \mathcal{P}(]0, 1]), \delta_{1/2})$ avec $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = |f(1/2)| = 2$.

Démonstration. C'est clair car "pour $\delta_{1/2}$ -presque tout $t \in]0, 1]$ " est synonyme de "pour $t = 1/2$ ". $\square$

Exemple 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| ; t \in I\}$. Donc $f \in \mathcal{L}^\infty(I)$ si et seulement si f est bornée, et $\|f\|_\infty$ a son sens "habituel".

Démonstration. On a vu que $\|f\|_\infty \leq \sup\{|f(t)| ; t \in I\}$. Inversement, on a $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ presque partout par définition de $\|f\|_\infty$. Donc l'ensemble $E := \{t \in I ; |f(t)| \leq \|f\|_\infty\}$ est tel que $\lambda_1(I \setminus E) = 0$, et donc E est dense dans I (exo déjà posé). Mais E est également fermé dans I car f est supposée continue. Donc $E = I$, autrement dit $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t \in I$, et ainsi $\sup\{|f(t)| ; t \in I\} \leq \|f\|_\infty$. $\square$

PROPOSITION 1.6. $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$. De plus, pour $f \in \mathcal{L}^\infty$ on a l'équivalence $\|f\|_\infty = 0 \iff f(t) = 0$ presque partout.

Démonstration. **Exo** pas difficile. $\square$

2. Les espaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$

2.1. Définition des L^p . Pour $p \in [1, \infty]$, on définit l'espace $L^p = L^p(\Omega, \mu)$ par

$$L^p(\Omega, \mu) = \dots \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu),$$

en convenant que le symbole d'égalité “=” doit être interprété au sens suivant :

$$f = g \text{ dans } L^p \iff f(t) = g(t) \text{ presque partout.}$$

Donc, si $f \in L^p$, alors

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ dans } L^p.$$

FAIT 2.1. $L^p = L^p(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p .

Démonstration. Évident avec la convention sur le symbole “=”. $\square$

2.2. Complétude.

THÉORÈME 2.2. Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace vectoriel normé $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet. Autrement dit : L^p est un espace de Banach.

RAPPEL. Soit $(Z, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que pour toute suite $(z_k) \subseteq Z$ telle que $\sum_0^\infty \|z_k\| < \infty$, la série $\sum z_k$ converge dans Z . Alors Z est complet.

Remarque. Il est encore mieux connu que la réciproque est vraie... et beaucoup plus importante.

Preuve du “rappel”. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans Z . On veut montrer que (x_n) converge dans Z .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_k tel que

$$\forall p, q \geq n_k : \|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}.$$

De plus, on peut supposer que la suite (n_k) est strictement croissante (**micro-exo**).

Si on pose $z_0 := x_{n_0}$ et $z_k := x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ pour $k \geq 1$, alors $\|z_k\| \leq 2^{-(k-1)}$ pour tout $k \geq 1$, et donc $\sum_0^\infty \|z_k\| < \infty$. Par hypothèse sur Z , on en déduit que la série $\sum z_k$ converge dans Z ; et comme $\sum_{i=0}^k z_i = x_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, cela signifie que la suite (x_{n_k}) est convergente. Ainsi, la suite (x_n) possède une sous-suite convergente, et donc (x_n) converge dans Z car elle est de Cauchy (**exo**). $\square$

Preuve du Théorème 2.2.

FAIT. Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables positives sur Ω , alors

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p.$$

Preuve du Fait. (i) Supposons d'abord que $p < \infty$. Si on pose $U := \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $U_n := \sum_{k=0}^n u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $((U_n)^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers U^p en tout point. Par convergence monotone, on a donc

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)^p ;$$

d'où, en prenant les "puissances $1/p$ -ièmes" :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\|_p \\ &= \underline{\lim} \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\|_p \\ &\leq \underline{\lim} \sum_{k=0}^n \|u_k\|_p = \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p \quad \text{par Minkowski.} \end{aligned}$$

(ii) Maintenant, supposons que $p = \infty$. Par définition de $\|\cdot\|_{\infty}$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left(u_k(t) \leq \|u_k\|_{\infty} \text{ presque partout} \right).$$

Donc, par l'argument habituel de "déplacement de parenthèses" :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N} : u_k(t) \leq \|u_k\|_{\infty} \right) \text{ presque partout.}$$

On en déduit

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_{\infty} \quad \text{presque partout,}$$

et donc $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_{\infty}$.

□

Montrons maintenant que L^p est complet en utilisant le "rappel".

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que $\sum_0^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$. Il s'agit de montrer que la série $\sum f_k$ converge dans L^p .

Par le Fait appliqué aux fonctions $u_k := |f_k|$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \right\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| |f_k| \|_p = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty.$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| < \infty \quad \text{presque partout.}$$

Soit alors $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $F(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ si la série $\sum f_k(t)$ converge, et $F(t) := 0$ sinon.

La fonction F est mesurable car les f_k le sont. On a $|F(t)| \leq \sum_0^{\infty} |f_k(t)|$ pour tout $t \in \Omega$, donc $\|F\|_p \leq \left\| \sum_0^{\infty} |f_k| \right\|_p < \infty$, et donc $F \in L^p$.

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $F(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)$ presque partout. Donc

$$\left| F(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(t)| \quad \text{presque partout,}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\| F - \sum_{k=0}^n f_k \right\|_p &\leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \right\|_p \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p \quad \text{par le Fait .} \end{aligned}$$

Donc $\|F - \sum_{k=0}^n f_k\|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, autrement dit la série $\sum f_k$ converge dans L^p et a pour somme F . $\square$

Exercice. Montrer directement que les espaces $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et $\ell^1(\mathbb{N})$ sont complets.

2.3. Le cas “hilbertien” $p = 2$.

RAPPELS. • On dit qu’un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$ est une espace **préhilbertien** si la norme $\|\cdot\|$ dérive d’un produit scalaire, *i.e.* il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur H tel que

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

• Produit scalaire : $\langle x, y \rangle$ est linéaire par rapport à x et anti-linéaire par rapport à y (ou le contraire...), et $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ pour tout $x \in H$. On a alors $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous $x, y \in H$ (**exo**).

• Dans toute espace préhilbertien $(H, \|\cdot\|)$, on a l’**inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{pour tous } x, y \in H.$$

• Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien *complet*.

LEMME 2.3. Si $u, v \in L^2$, alors $uv \in L^1$.

Démonstration. On a $|uv| \leq \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2)$ car $|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| = (|u| - |v|)^2 \geq 0$; donc $\int_{\Omega} |uv| \leq \frac{1}{2} (\int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |v|^2) < \infty$. $\square$

Remarque. Le lemme montre en particulier que : si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres complexes telles que $\sum_0^\infty |u_n|^2 < \infty$ et $\sum_0^\infty |v_n|^2 < \infty$, alors $\sum_0^\infty |u_n v_n| < \infty$.

THÉOREME 2.4. L’espace $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est défini par

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \quad \text{pour } f, g \in L^2.$$

Démonstration. Par le lemme, $\langle f, g \rangle$ est bien défini pour toutes $f, g \in L^2$; et il est évident que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est un produit scalaire et qu’on a $\langle f, f \rangle_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2$ pour toute $f \in L^2$. $\square$

COROLLAIRE 2.5. (Cauchy-Schwarz)

Si $f, g \in L^2$, alors

$$\left| \int_{\Omega} f(t) \bar{g}(t) d\mu(t) \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^2 d\mu(t) \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g(t)|^2 d\mu(t) \right)^{1/2};$$

et en fait

$$\left| \int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu(t) \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^2 d\mu(t) \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g(t)|^2 d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Démonstration. La première inégalité est Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$; et la deuxième est C-S appliqué aux fonctions $|f|$ et $|g|$, qui sont dans L^2 . $\square$

COROLLAIRE 2.6. Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles de nombres complexes, alors

$$\sum_{i \in I} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i \in I} |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in I} |v_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice. Soit H un espace préhilbertien, et soient $x, y \in H$ avec $y \neq 0$. Montrer que si on pose $u := \langle x, \frac{y}{\|y\|} \rangle \frac{y}{\|y\|}$, alors $u - x$ est orthogonal à y , et donc à u . En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour x et y .

2.4. Convergence dans L^p et convergence presque partout.

PROPOSITION 2.7. (convergence dominée dans L^p)

Supposons que $p < \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions de L^p , et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. On suppose que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ presque partout et qu'il existe une fonction $g \in L^p$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(t)| \leq g(t)$ presque partout. Alors $f \in L^p$ et $f_n \rightarrow f$ en norme L^p .

Démonstration. On a $|f(t)|^p = \lim |f_n(t)|^p \leq g(t)^p$ pp, donc $|f|^p$ est intégrable (car g^p l'est) i.e. $f \in L^p$. Ensuite, on a $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ et donc $|f - f_n|^p \leq 2^p g^p$ pour tout n . Donc, comme la fonction $2^p g^p$ est intégrable, $\|f_n - f\|_p^p = \int_{\Omega} |f_n - f|^p \rightarrow 0$ par le TCD appliqué aux fonctions $\tilde{f}_n = |f_n - f|^p$. $\square$

REMARQUE. Il n'y a pas de théorème de convergence dominée dans L^∞ .

PROPOSITION 2.8. Soit $(f_n) \subseteq L^p$ une suite convergeant en norme L^p vers une fonction $f \in L^p$.

- (1) Si $p = \infty$, alors $f_n \rightarrow f$ pp.
- (2) Si $p < \infty$, alors (f_n) admet une sous-suite (f_{n_k}) qui tend vers f presque partout.

Démonstration. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ pp. Donc, par "déplacement de parenthèses", on peut dire que $(\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty)$ pp; et donc $|f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$ pp puisque $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

(2) Comme $f_n \rightarrow f$ en norme L^p , on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que $\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f|^p \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |f_{n_k} - f|^p = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-pk} < \infty.$$

En particulier, $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f(t)|^p < \infty$ presque partout, et donc $|f_{n_k}(t) - f(t)| \rightarrow 0$ presque partout. $\square$

Remarque. En général, la convergence en norme L^p n'entraîne pas la convergence presque partout. **Exo** non évident : le montrer.

3. L'inégalité de Hölder

3.1. L'inégalité et quelques conséquences.

DÉFINITION 3.1. Si $p \in [1, \infty]$, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique $q \in [1, \infty]$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Exemples : si $p = 1$ alors $q = \infty$; si $p = \infty$ alors $q = 1$; et si $p = 2$ alors $q = 2$.

Exercice. Montrer que si p, q sont des exposants conjugués avec $1 < p, q < \infty$, alors

$$(q-1)p = q \quad \text{et} \quad (p-1)q = p.$$

THÉORÈME 3.2. (inégalité de Hölder)

Soit $p \in [1, \infty]$, et soit q l'exposant conjugué. Pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ou $\mathbb{C}$, on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si $1 < p, q < \infty$, cette inégalité s'écrit

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Remarque. Pour $p = 2 = q$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Preuve du Théorème 3.2. Si $p = 1$, $q = \infty$, on a $|f(t)g(t)| \leq |f(t)| \times \|g\|_{\infty}$ presque partout, et donc $\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu(t) \leq \|g\|_{\infty} \int_{\Omega} |f| d\mu = \|g\|_{\infty} \|f\|_1$. De même si $p = \infty$, $q = 1$.

Supposons maintenant $1 < p, q < \infty$. On a besoin du fait suivant.

FAIT. Si $a, b \in [0, \infty]$, alors $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

Preuve du Fait. L'inégalité est évidente si $a = \infty$ ou $b = \infty$ (car $\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q = \infty$ dans ce cas), et également si $a = 0$ ou $b = 0$ (car $ab = 0$ dans ce cas). On suppose donc qu'on a $0 < a, b < \infty$, ce qui permet de "passer aux logarithmes". Par *concavité* de la fonction logarithme et comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab);$$

ce qui est l'inégalité souhaitée. □

Soient maintenant f, g deux fonctions mesurables sur Ω (à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$).

Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, l'inégalité de Hölder est évidente car on a dans ce cas $f(t) = 0$ presque partout ou $g(t) = 0$ presque partout, et donc $fg = 0$ presque partout. On suppose donc qu'on a $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$.

Les fonctions $u := \frac{f}{\|f\|_p}$ et $v := \frac{g}{\|g\|_q}$ vérifient $\|u\|_p = 1 = \|v\|_q$. Par le fait, on a

$$|u(t)v(t)| \leq \frac{1}{p} |u(t)|^p + \frac{1}{q} |v(t)|^q \quad \text{pour tout } t \in \Omega;$$

d'où en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |uv| d\mu &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |v|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Par définition de u et v , cela s'écrit $\int_{\Omega} \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu \leq 1$; d'où

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Exercice. Dédurre l'inégalité de Minkowski $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ de l'inégalité de Hölder. (En supposant $1 < p < \infty$, écrire $|f + g| = |f + g|^{p-1} |f + g|$, puis majorer $|f + g|$ et utiliser deux fois Hölder.)

COROLLAIRE 3.3. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $fg \in L^1$.

COROLLAIRE 3.4. Si $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_i)_{i \in I}$ sont deux familles de nombres complexes, alors

$$\sum_{i \in I} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i \in I} |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i \in I} |v_i|^q \right)^{1/q}.$$

COROLLAIRE 3.5. On suppose que la mesure μ est finie, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$.

- (1) La famille des espaces L^p est décroissante : si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^{p_2} \subseteq L^{p_1}$. En particulier, on a $L^\infty \subseteq L^p \subseteq L^1$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
- (2) Si de plus $\mu(\Omega) = 1$, alors la famille des normes L^p est croissante : si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\|\cdot\|_{p_1} \leq \|\cdot\|_{p_2}$. En particulier, on a $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\infty$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Démonstration. (1) Supposons $p_1 < p_2 < \infty$. Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, l'inégalité de Hölder appliquée avec $p := \frac{p_2}{p_1}$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^{p_1} d\mu &= \int_{\Omega} |f|^{p_1} \times \mathbf{1} d\mu \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (|f|^{p_1})^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} \mathbf{1}^q d\mu \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_1/p_2} \mu(\Omega)^{1 - \frac{p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

En élevant à la puissance $1/p_1$, on obtient

$$(3.1) \quad \|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \times \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}.$$

Comme $\mu(\Omega) < \infty$, on en déduit que si $\|f\|_{p_2} < \infty$ alors $\|f\|_{p_1} < \infty$; autrement dit : $f \in L^{p_2} \implies f \in L^{p_1}$.

Supposons maintenant $p_1 < p_2 = \infty$. Dans ce cas, on a

$$(3.2) \quad \|f\|_{p_1} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^{p_1} d\mu(t) \right)^{1/p_1} \leq \|f\|_\infty \times \mu(\Omega)^{1/p_1};$$

et donc $f \in L^\infty \implies f \in L^{p_1}$.

(2) Clair par (3.1) et (3.2). $\square$

REMARQUE. Pour les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$, la situation est exactement inverse : la famille des normes $\|\cdot\|_{\ell^p(\mathbb{N})}$ est *décroissante* (si $p_1 \leq p_2$, alors $\|\cdot\|_{\ell^{p_1}} \geq \|\cdot\|_{\ell^{p_2}}$), et donc la suite des espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ est croissante. En particulier, on a $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_1$ et $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Démonstration. D'abord, on a $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p$ pour tout $p < \infty$ (**exo**). Donc, il suffit de montrer que $\|\cdot\|_{\ell^{p_1}} \geq \|\cdot\|_{\ell^{p_2}}$ si $p_1 \leq p_2 < \infty$. Et par homogénéité, il suffit en fait de montrer que si $x = (x_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ vérifie $\|x\|_{p_1} \leq 1$, alors $\|x\|_{p_2} \leq 1$ (**exo**). Comme $|x_n| = (|x_n|^{p_1})^{1/p_1} \leq \|x\|_{p_1} \leq 1$, on a $|x_n|^{p_2} \leq |x_n|^{p_1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|x\|_{p_2}^{p_2} = \sum_0^\infty |x_n|^{p_2} \leq \sum_0^\infty |x_n|^{p_1} = \|x\|_{p_1}^{p_1} \leq 1$. $\square$

Exercice 1. Montrer qu'il n'y a aucune inclusion entre espaces $L^p(\mathbb{R})$. (Considérer des fonctions de la forme $f(t) := \frac{1}{t^\alpha} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(t)$ ou $f(t) := \frac{1}{t^\alpha} \mathbf{1}_{]0, 1]}(t)$.)

Exercice 2. On suppose que $\mu(\Omega) = 1$. Montrer que si $f \in L^\infty$, alors $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$. (Observer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $B_\varepsilon := \{|f| \geq (1 - \varepsilon)\|f\|_\infty\}$ est de mesure strictement positive, puis minorer $\int_{B_\varepsilon} |f|^p d\mu$ pour tout $p < \infty$.)

COROLLAIRE 3.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $L^p(I)$ pour un certain $p \in [1, \infty]$, alors f est intégrable sur tout intervalle borné $J \subseteq I$. En particulier, f est localement intégrable.

Démonstration. Si $J \subseteq I$ est un intervalle borné, alors $f|_J \in L^p(J) \subseteq L^1(J)$; donc f est intégrable sur J . $\square$

Exercice. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \bar{I}$. Montrer que si $f \in L^p(I)$ pour un certain $p > 1$, alors la fonction $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ est uniformément continue sur I . (Montrer qu'en fait $|F(y) - F(x)| \leq C|y - x|^\alpha$ pour certaines constantes $C < \infty$ et $\alpha > 0$.)

COROLLAIRE 3.7. Si $g \in L^q$, alors la formule $\Phi_g(f) := \int_\Omega fg d\mu$ définit une forme linéaire continue sur L^p , avec $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$.

Démonstration. Par l'inégalité de Hölder, la forme linéaire Φ_g est bien définie et on a $|\Phi_g(f)| \leq \int_\Omega |fg| \leq \|g\|_q \|f\|_p$ pour toute $f \in L^p$; autrement dit, Φ_g est continue avec $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$. $\square$

REMARQUE 1. Si $p > 1$, on a en fait $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ pour toute fonction $g \in L^q$. C'est encore vrai si $p = 1$ et si l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est "raisonnable".

REMARQUE 2. On peut montrer que si $1 < p < \infty$, alors toute forme linéaire continue sur L^p est de la forme Φ_g . Autrement dit : "le dual de L^p , c'est L^q ". C'est encore vrai si $p = 1$ et si l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est "raisonnable".

4. Résultats de densité

4.1. Fonctions étagées. On note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions étagées sur Ω , à valeurs complexes. Donc, une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{E}(\Omega)$ si et seulement si elle est de la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

où les A_i sont des ensembles mesurables et $\alpha_i \in \mathbb{C}$, et si on veut on peut supposer que les A_i sont disjoints et que $\alpha_i \neq 0$ pour tout i .

Remarque 1. Toute fonction étagée est *bornée*, et donc $\mathcal{E}(\Omega) \subseteq L^\infty$. De plus, si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ s'écrit $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec des A_i deux à deux disjoints vérifiant $\mu(A_i) > 0$, alors $\|\varphi\|_{L^\infty} = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|)$.

Démonstration. **Exo.** □

Remarque 2. Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ s'écrit $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec des A_i deux à deux disjoints et des $\alpha_i \neq 0$, alors $\|\varphi\|_p^p = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^p \mu(A_i)$. Donc : $\varphi \in L^p$ si et seulement si $\mu(A_i) < \infty$ pour tout i .

Démonstration. Comme les A_i sont disjoints, on a $|\varphi|^p = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^p \mathbf{1}_{A_i}$. Donc tout est clair. □

LEMME 4.1. *Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, on peut trouver une suite (φ_n) de fonctions étagées telle que*

- (i) $\varphi_n(t) \rightarrow f(t)$ pour tout $t \in \Omega$;
- (ii) $|\varphi_n(t)| \leq |f(t)|$ pour tout n et pour tout $t \in \Omega$.

Si de plus la fonction f est bornée, on peut faire en sorte que (φ_n) converge uniformément vers f .

Démonstration. Si $f \geq 0$, on a déjà démontré ce résultat, avec même des $\varphi_n \geq 0$ et une suite (φ_n) croissante.

Supposons f à valeurs réelles, et écrivons $f = f^+ - f^-$. Par le cas “positif”, on peut trouver des suites $(\varphi_{n,+})$ et $(\varphi_{n,-})$ convenant pour f^+ et f^- . On a alors $\varphi_{n,+} \equiv 0$ sur $\Omega^- := \{f \leq 0\}$ car $0 \leq \varphi_{n,+} \leq f^+$ et $f^+ \equiv 0$ sur Ω^- ; et de même $\varphi_{n,-} \equiv 0$ sur $\Omega^+ := \{f \geq 0\}$. Donc $\varphi_{n,+} \varphi_{n,-} = 0$. Donc, si on pose $\varphi_n := \varphi_{n,+} - \varphi_{n,-}$, alors $(\varphi_n)^\pm = \varphi_{n,\pm}$ (cf un **exo** ancien). Donc $|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- = \varphi_{n,+} + \varphi_{n,-} \leq f^+ + f^- = |f|$; et $\varphi_n \rightarrow f^+ - f^- = f$, avec convergence uniforme si f est bornée (car f^+ et f^- sont alors bornées).

Si f à valeurs complexes, on applique le cas “réel” aux fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. Les détails sont laissés en exercice. □

THÉORÈME 4.2. *Les fonctions étagées appartenant à L^p sont denses dans L^p , pour tout $p \in [1, \infty]$.*

Démonstration. (i) Supposons $p < \infty$. Soit $f \in L^p$ quelconque, et soit (φ_n) une “suite approximante” de fonctions étagées pour f comme dans le lemme. Comme $|\varphi_n| \leq |f| \in L^p$, les fonctions φ_n sont dans L^p ; et la suite (φ_n) converge vers f en norme L^p par convergence dominée dans L^p .

(ii) Supposons maintenant $p = \infty$. Soit $f \in L^\infty$ quelconque. Il existe alors une fonction mesurable *bornée* $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\tilde{f} = f$ presque partout.

Soit (φ_n) une suite de fonctions étagées (donnée par le lemme) convergeant uniformément vers $\tilde{f}$ sur Ω . On pose $\varepsilon_n := \sup\{|\varphi_n(t) - \tilde{f}(t)|; t \in \Omega\}$ (donc $\varepsilon_n \rightarrow 0$). Comme $f = \tilde{f}$ presque partout, on a $|\varphi_n(t) - f(t)| = |\varphi_n(t) - \tilde{f}(t)| \leq \varepsilon_n$ presque partout. Donc $\|\varphi_n - f\|_\infty \leq \varepsilon_n$, et donc $\varphi_n \rightarrow f$ pour la norme L^∞ . $\square$

4.2. Fonctions continues à support compact.

DÉFINITION 4.3. Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **à support compact** s'il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que $\varphi(t) \equiv 0$ en dehors de K . On note $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues à support compact $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Remarque 1. Attention : le compact K dans la définition dépend de la fonction φ , et K doit être entièrement contenu dans Ω . Par exemple, la fonction $\varphi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) := 1 - t^2$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_{00}(]-1, 1[)$; mais elle appartient à $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ si on la prolonge par 0 en dehors de $]-1, 1[$.

Remarque 2. On a $\mathcal{C}_{00}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\Omega)$, et soit $K \subseteq \Omega$ un compact tel que $\varphi(t) \equiv 0$ en dehors de K . Comme φ est continue, elle est bornée sur le compact K , donc bornée sur Ω puisqu'elle est nulle en dehors de K ; donc $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Si $p < \infty$, alors

$$\int_{\Omega} |\varphi|^p = \int_K |\varphi|^p d\lambda_d \leq \|\varphi\|_\infty^p \times \lambda_d(K) < \infty \quad \text{car } K \text{ est borné,}$$

donc $\varphi \in L^p(\Omega)$. $\square$

Exercice. Montrer que $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

THÉORÈME 4.4. Si $p < \infty$, alors $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

LEMME 4.5. (régularité de la mesure de Lebesgue)

Pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(A) < \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact E et un ouvert U tels que

$$E \subseteq A \subseteq U \quad \text{et} \quad \lambda_d(U \setminus E) < \varepsilon.$$

Démonstration. On la fera plus tard. $\square$

LEMME 4.6. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et si $E \subseteq \Omega$ est un compact tel que $E \subseteq U$, alors on peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\Omega)$ telle que $\varphi(t) \equiv 1$ sur E et $\varphi(t) \equiv 0$ en dehors de U , avec de plus $0 \leq \varphi \leq 1$.

Démonstration. Quitte à remplacer U par $U \cap \Omega$ (qui est ouvert et contient E), on peut supposer que $U \subseteq \Omega$.

Comme E est compact et U ouvert, on peut trouver un ouvert borné W tel que

$$E \subseteq W \quad \text{et} \quad \overline{W} \subseteq U.$$

(Il suffit de prendre $W := \{x \in \mathbb{R}^d; \text{dist}(x, E) < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.)

On a alors

$$\text{dist}(x, E) + \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus W) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

En effet : comme $E \subseteq W$, on a ou bien $x \notin E$ ou bien $x \notin \mathbb{R}^d \setminus W$, donc ou bien $\text{dist}(x, E) > 0$ ou bien $\text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus W) > 0$ car E et $\mathbb{R}^d \setminus W$ sont des fermés de $\mathbb{R}^d$.

On peut donc définir $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) := \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus W)}{\text{dist}(x, E) + \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus W)}.$$

La fonction φ est continue, avec $0 \leq \varphi \leq 1$. On a $\varphi(x) = 1$ si $x \in E$ car $\text{dist}(x, E) = 0$; et $\varphi(x) = 0$ si $x \notin W$, donc $\varphi \equiv 0$ en dehors de U car $W \subseteq U$. Enfin, φ est nulle en dehors de $K := \overline{W}$ qui est compact et contenu dans U , donc dans Ω ; donc $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\Omega)$. $\square$

Preuve du Théorème 4.4. Comme on sait que les fonctions étagées sont denses dans $L^p(\Omega)$, il suffit de montrer que l'adhérence de $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ contient toutes les fonctions étagées appartenant à L^p . De plus, $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ est un espace vectoriel, donc $\overline{\mathcal{C}_{00}(\Omega)}^{L^p}$ aussi (exo). Il suffit donc de montrer que $\overline{\mathcal{C}_{00}(\Omega)}^{L^p}$ contient toutes les *fonctions indicatrices* appartenant à $L^p(\Omega)$; autrement dit (comme $p < \infty$) toutes les fonctions de la forme $\mathbf{1}_A$ avec $A \subseteq \Omega$ et $\lambda_d(A) < \infty$.

On fixe donc un borélien $A \subseteq \Omega$ vérifiant $\lambda_d(A) < \infty$, et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\Omega)$ telle que $\|\varphi - \mathbf{1}_A\|_p < \varepsilon$.

Par le Lemme 4.5, on peut trouver un compact E et un ouvert U tels que $E \subseteq A \subseteq U$ et $\lambda_d(U \setminus E) < \varepsilon$; et par le Lemme 4.6, on peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\Omega)$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur E et $\varphi \equiv 0$ en dehors de U , avec $0 \leq \varphi \leq 1$. Quitte à remplacer U par $U \cap \Omega$, on peut aussi supposer que $U \subseteq \Omega$.

Par définition de φ , on a $\mathbf{1}_E \leq \varphi \leq \mathbf{1}_U$; et on a aussi $\mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_U$ car $E \subseteq A \subseteq U$. Donc $|\varphi - \mathbf{1}_A| \leq \mathbf{1}_U - \mathbf{1}_E$. Mais $\mathbf{1}_U - \mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{U \setminus E}$ car $E \subseteq U$, donc

$$|\varphi - \mathbf{1}_A| \leq \mathbf{1}_{U \setminus E}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\varphi - \mathbf{1}_A\|_p^p &= \int_{\Omega} |\varphi - \mathbf{1}_A|^p d\lambda_d \\ &\leq \int_{\Omega} \mathbf{1}_{U \setminus E}^p d\lambda_d \\ &= \lambda_d(U \setminus E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait, avec $\varepsilon^{1/p}$ au lieu de ε . $\square$

Exercice. Montrer que $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$.

Produit de convolution

1. Définition et exemples

1.1. Définition. Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions boréliennes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt.$$

La fonction $f * g$ s'appelle la **convolée** des fonctions f et g .

Remarque 1. Soit $f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f_-(u) = f(-u).$$

Comme $f(x-t) = f(-(t-x)) = f_-(t-x) = (\tau_x f_-)(t)$, on a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f_-)(t)g(t) dt$$

en tout point x où $f * g(x)$ est bien défini.

Remarque 2. Si $f * g$ est bien définie en un certain point x , alors $g * f$ aussi et

$$f * g(x) = g * f(x).$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(u)g(u-x)| du$ par changement de variable; donc $f * g(x)$ est bien défini si et seulement si $g * f(x)$ l'est, et dans ce cas le même calcul donne $f * g(x) = g * f(x)$. $\square$

1.2. Quelques cas où $f * g$ est bien définie. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions boréliennes.

PROPOSITION 1.1. *Si f est localement intégrable et si g est dans L^∞ et à support compact, alors $f * g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $A < \infty$ tel que $g \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$. Si $x \in \mathbb{R}$ est donné, alors $f(x-t)g(t) = 0$ si $t \notin [-A, A]$, et $|f(x-t)g(t)| \leq \|g\|_\infty |f(x-t)|$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt &= \int_{-A}^A |f(x-t)g(t)| dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{-A}^A |f(x-t)| dt \\ &= \|g\|_\infty \int_{x-A}^{x+A} |f(u)| du \\ &< \infty \quad \text{car } f \text{ est localement intégrable.} \end{aligned}$$

$\square$

EXERCICE. Montrer que si f et g sont toutes les deux à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

Exemple. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < a \leq b$. La convolée $\mathbf{1}_{[-a,a]} * \mathbf{1}_{[-b,b]}$ est une fonction “trapèze”, donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{1}_{[-a,a]} * \mathbf{1}_{[-b,b]}(x) = \begin{cases} x + a + b & \text{si } -(a+b) \leq x \leq a-b \\ 2a & \text{si } a-b \leq x \leq b-a \\ a + b - x & \text{si } b-a \leq x \leq a+b \\ 0 & \text{si } |x| \geq a+b \end{cases}$$

(Si $a = b$, le trapèze devient un triangle...)

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[-a,a]} * \mathbf{1}_{[-b,b]}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) \mathbf{1}_{[-b,b]}(x-t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) \mathbf{1}_{[x-b, x+b]}(t) dt \\ &= |\mathbf{1}_{[-a,a]} \cap [x-b, x+b]|. \end{aligned}$$

Et c'est bien ça. □

PROPOSITION 1.2. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, où $p, q \in [1, \infty]$ sont des exposants conjugués, alors $f * g(x)$ est bien défini partout, et $f * g$ est une fonction continue bornée, avec

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on a $f(x-t)g(t) = \tau_x f_{-}(t)g(t)$, où $f_{-}(u) = f(-u)$. Comme $\tau_x f_{-} \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $(\tau_x f_{-})g \in L^1$ par Hölder ; donc $f * g(x)$ est bien défini en tout point $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a (toujours par Hölder)

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f_{-})(t)g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |(\tau_x f_{-})(t)g(t)| dt = \|(\tau_x f_{-})g\|_1 \leq \|\tau_x f_{-}\|_p \|g\|_q.$$

Donc $f * g$ est bornée, avec $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Pour la continuité, on introduit la forme linéaire $\Phi_g : L^p \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_g(h) := \int_{\mathbb{R}} h(t)g(t) dt.$$

Par Hölder, cette forme linéaire est continue (avec $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$) ; et on a par définition :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f_{-})(t)g(t) dt = \Phi_g(\tau_x f_{-}).$$

Comme l'application $x \mapsto \tau_x f_{-}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^p (continuité des translations), on en déduit par composition que $f * g$ est continue. □

COROLLAIRE 1.3. Si f est localement intégrable et si g est dans L^{∞} et à support compact, alors $f * g$ est continue.

Démonstration. Par la Proposition 1.1, $f * g$ est bien définie en tout point. Pour la continuité, il suffit de montrer que $f * g$ est continue sur tout intervalle $[-B, B]$, $B > 0$. On fixe donc $B > 0$; et on fixe également $A < \infty$ tel que $g \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int_{-A}^A f(x-t)g(t) dt.$$

Si de plus $x \in [-B, B]$, alors $t-x \in [-(A+B), A+B] := K$ pour tout $t \in [-A, A]$, et donc on peut écrire $f(x-t) = (\mathbf{1}_K f)(t-x)$. Donc

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-A}^A (\mathbf{1}_K f)(t-x)g(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_K f)(t-x)g(t) dt \\ &= (\mathbf{1}_K f) * g(x). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f * g \equiv (\mathbf{1}_K f) * g$ sur $[-B, B]$. Mais comme $\mathbf{1}_K f \in L^1$ (car f est localement intégrable et K est compact) et $g \in L^\infty$, la fonction $(\mathbf{1}_K f) * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ par la Proposition 1.2; donc $f * g$ est continue sur $[-B, B]$. $\square$

Exercice. Soient p, q des exposants conjugués tels que $1 < p, q < \infty$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $f * g$ tend vers 0 à l'infini. (Commencer par le cas où f et g sont continues à support compact.)

THÉORÈME 1.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, alors $f * g$ est bien définie presque partout et appartient à $L^p(\mathbb{R})$, avec

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Démonstration. On la fait seulement pour $p = 1$. Pour p quelconque, cf poly. Soit h la fonction borélienne positive définie par

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt.$$

Par Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right)}_{\|f\|_1} dt \\ &= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

En particulier, $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx < \infty$. Donc $h(x) < \infty$ presque partout; autrement dit $f * g(x)$ est bien défini presque partout.

On vérifie que la fonction $f * g$ est λ_1 -mesurable (exo; commencer par le cas où f et g sont ≥ 0 , puis f et g réelles, puis...). De plus, on a

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt = h(x) \quad \text{presque partout;}$$

donc $f * g \in L^1$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|h\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$. $\square$

Exercice. Montrer que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g) * h = f * (g * h)$. (Expliquer d'abord pourquoi ceci a un sens, et quel sens.)

2. Propriété “régularisante”

THÉORÈME 2.1. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est localement intégrable et si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^N$ à support compact, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^N$ sur $\mathbb{R}$, avec pour $k = 1, \dots, N$:*

$$(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)}).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $N = 1$ (ensuite : récurrence). Donc, on suppose que f est localement intégrable et que g de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact.

Idée : écrire

$$f * g(x) = g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt,$$

pour faire apparaître le x dans la fonction “gentille” g .

Maintenant, on applique le théorème de dérivabilité pour les intégrales à paramètres. Si on pose $F(x, t) := f(t)g(x-t)$, alors $F(x, t)$ est intégrable par rapport à t pour tout x fixé (car f est localement intégrable et g est bornée à support compact), et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x , avec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = f(t)g'(x-t).$$

Pour vérifier l’hypothèse de domination, on fixe un compact $K \subseteq \mathbb{R}$, et $B_K > 0$ tel que $K \subseteq [-B_K, B_K]$. Soit également $A > 0$ tel que $g \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$.

On a $g'(u) \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$. Donc, si $x \in K \subseteq [-B_K, B_K]$, alors $g'(x-t) = 0$ pour tout $t \notin [-(A+B_K), A+B_K] := J_K$. On en déduit

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq g_K(t) \quad \text{pour tout } x \in K,$$

où la fonction g_K est définie par

$$g_K(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin J_K, \\ \|g'\|_{\infty} |f(t)| & \text{si } t \in J_K. \end{cases}$$

La fonction g_K est intégrable sur $\mathbb{R}$ car f est intégrable sur l’intervalle compact J_K . Donc le théorème de dérivabilité s’applique : la fonction $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$(f * g)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t) dt = g * f'(x) = f * g'(x).$$

□

REMARQUE. Le théorème n’est pas vide : il existe bien des fonctions non nulles, de classe $\mathcal{C}^N$ et à support compact. Plus précisément, pour tout intervalle ouvert borné non trivial $I \subseteq \mathbb{R}$, on peut trouver une fonction $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ positive, nulle en dehors de I et vérifiant $\chi(t) > 0$ sur I .

Démonstration. Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\theta(t) := 0$ si $t \leq 0$ et $\theta(t) := e^{-1/t}$ si $t > 0$. La fonction θ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et on vérifie très facilement que les dérivées $\theta^{(k)}(t)$ pour $t > 0$ sont de la forme $\theta^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}$, où P_k est un polynôme. Donc $\theta^{(k)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et par conséquent θ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\theta^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si on maintenant on écrit $I =]a, b[$ et si on pose $\chi(t) := \theta(t-a)\theta(b-t)$, alors χ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, identiquement nulle en dehors de $I =]a, b[$, car $\theta(t-a) = 0$ si $t \leq a$ et $\theta(b-t) = 0$ si $t \geq b$, et on a $\chi(t) > 0$ sur I car $\theta(s) > 0$ pour tout $s > 0$. □

EXERCICE. Montrer que pour tout intervalle non trivial $I \subseteq \mathbb{R}$ de centre m , on peut trouver une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ positive, nulle en dehors de I et vérifiant $\chi(t) \equiv 1$ au voisinage de m . (*Indications* : (i) En primitivant une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact convenable, montrer qu'il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$ et $\phi(t) = 1$ pour tout $t \geq 1$. (ii) Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ identiquement nulle en dehors de $]0, 4[$ telle que $\psi(t) \equiv 1$ sur $[1, 3]$. (iii) Conclure.)

3. Approximation par convolution

DÉFINITION 3.1. Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\mathbb{R})$. On dit que (k_n) est une **suite de Dirac** si elle vérifie les propriétés suivantes.

- (i) $\int_{\mathbb{R}} k_n(t) dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) (k_n) est **bornée dans** L^1 , i.e. il existe une constante M telle que $\|k_n\|_1 \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) Pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| dt = 0$.

Remarque. La condition (iii) signifie que " k_n se concentre autour de 0" quand $n \rightarrow \infty$.

EXEMPLE. Soit $k \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} k(t) dt = 1$. Si (λ_n) est une suite de nombre réels strictement positifs tendant vers ∞ , alors la suite (k_n) définie par

$$k_n(t) := \lambda_n k(\lambda_n t)$$

est une suite de Dirac.

Démonstration. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |k(\lambda_n u)| \lambda_n du = \int_{\mathbb{R}} |k(u)| du = \|k\|_1.$$

Donc $k_n \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|k_n\|_1 = \|k\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier, (ii) est vérifiée. De même $\int_{\mathbb{R}} k_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} k(\lambda_n u) \lambda_n du = \int_{\mathbb{R}} k(u) du = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. (i) est vérifiée.

Pour vérifier (iii), on fixe $\delta > 0$. Alors

$$\int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| dt = \int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(\lambda_n t)| \lambda_n dt = \int_{\{|u| \geq \lambda_n \delta\}} |k(u)| du.$$

Comme $\lambda_n \delta \rightarrow \infty$ et comme k est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\{|u| \geq \lambda_n \delta\}} |k(u)| du = \int_{\mathbb{R}} |k(u)| du - \int_{-\lambda_n \delta}^{\lambda_n \delta} |k(u)| du$$

tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$; donc (iii) est vérifiée. □

THÉORÈME 3.2. Soit $(k_n) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ une suite de Dirac, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ borélienne.

- (1) Si f est bornée et continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $k_n * f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (2) Si f est bornée et uniformément continue, alors $k_n * f \rightarrow f$ uniformément.
- (3) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $k_n * f \rightarrow f$ en norme L^p .

Remarque 1. Notons $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Toute mesure borélienne finie μ sur $\mathbb{R}$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, notée $f \mapsto \langle \mu, f \rangle$, par la formule

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Par ailleurs, toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ définit également une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, notée $f \mapsto \langle g, f \rangle$, par la formule

$$\langle g, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt.$$

Avec cette notation, on a $g * f(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t) f(-t) dt = \langle g, f_- \rangle$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Donc, la partie (1) du théorème, appliquée avec $x_0 := 0$ et f_- au lieu de f , dit que

$$\langle k_n, f \rangle \rightarrow \langle \delta_0, f \rangle \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

Ainsi, la suite (k_n) "tend vers la masse de Dirac δ_0 ".

Remarque 2. En raison de (3), les suites de Dirac s'appellent souvent des **unités approchées** pour la convolution.

Exercice. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution; autrement dit, qu'il n'existe pas de fonction $k \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $k * f = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$. (Montrer qu'une telle fonction k devrait vérifier $\int_{x-1}^{x+1} k(u) du = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ presque partout, et utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \int_{x-1}^{x+1} k(u) du$ est continue sur $\mathbb{R}$.)

Preuve du Théorème 3.2.

FAIT. Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est borélienne bornée et vérifie $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \varphi(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Preuve du Fait. Pour pouvoir utiliser la propriété (iii) dans la définition d'une suite de Dirac, on coupe l'intégrale en deux : pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \varphi(t) dt &= \int_{\{|t| < \delta\}} |k_n(t)| \varphi(t) dt + \int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| \varphi(t) dt \\ &\leq \sup_{|t| < \delta} \varphi(t) \int_{\{|t| < \delta\}} |k_n(t)| dt + \|\varphi\|_\infty \int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| dt \\ &\leq M \sup_{|t| < \delta} \varphi(t) + \|\varphi\|_\infty \int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| dt, \end{aligned}$$

où la constante M est donnée par la propriété (ii) dans la définition d'une suite de Dirac. Comme $\int_{\{|t| \geq \delta\}} |k_n(t)| dt \rightarrow 0$ par (iii), on en déduit

$$\overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \varphi(t) dt \leq M \sup_{|t| < \delta} \varphi(t) \quad \text{pour tout } \delta > 0;$$

et donc $\int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \varphi(t) dt \rightarrow 0$ puisque $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. □

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème.

(1) Comme $f \in L^\infty$ et $k_n \in L^1$, la convolée $k_n * f$ est bien définie *partout*, donc l'énoncé a un sens!

Idée clé : comme $\int_{\mathbb{R}} k_n = 1$, on peut écrire

$$f(x_0) = f(x_0) \times \int_{\mathbb{R}} k_n(t) dt,$$

et donc

$$\begin{aligned} k_n * f(x_0) - f(x_0) &= \int_{\mathbb{R}} k_n(t) f(x_0 - t) dt - f(x_0) \times \int_{\mathbb{R}} k_n(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} k_n(t) (f(x_0 - t) - f(x_0)) dt. \end{aligned}$$

On en déduit

$$|k_n * f(x_0) - f(x_0)| \leq \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \underbrace{|f(x_0 - t) - f(x_0)|}_{\varphi(t)} dt.$$

Le fonction φ est bornée car f l'est, et $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ puisque f est continue en x_0 . Donc $k_n * f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ par le Fait.

(2) La preuve est la même. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a comme plus haut

$$\begin{aligned} |k_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| |f(x - t) - f(x)| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \times \underbrace{\sup\{|f(v) - f(u)|; |v - u| \leq |t|\}}_{\varphi(t)} dt. \end{aligned}$$

Le fonction φ est bornée car f l'est, et $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ car f est uniformément continue. Donc l'intégrale de droite tend vers 0 par le Fait, et donc $k_n * f(x) - f(x) \rightarrow 0$ uniformément puisque la majoration ne dépend pas de x .

(3) On la fait seulement pour $p = 1$. Il faut faire un peu attention car $k_n * f$ n'est définie que *presque partout*.

On a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |k_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x - t) - f(x)) k_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - t) - f(x)| |k_n(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| |\tau_t f(x) - f(x)| dt \\ &:= \int_{\mathbb{R}} \Phi_t(x) dt. \end{aligned}$$

Donc, en intégrant :

$$\begin{aligned} \|k_n * f - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi_t(x) dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau_t f(x) - f(x)| dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)| \underbrace{\|\tau_t f - f\|_1}_{\varphi(t)} dt \end{aligned}$$

La fonction φ est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\varphi(t) \leq 2\|f\|_1$, et $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ par *continuité des translations* dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc $\|k_n * f - f\|_1 \rightarrow 0$ par le Fait. $\square$

COROLLAIRE 3.3. *Pour tout $p \in [1, \infty[$, les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Comme les fonctions *continues* à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ (car $p < \infty$), il suffit de montrer que l'adhérence de $\mathcal{C}_{00}^\infty(\mathbb{R})$ dans L^p contient $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$. On fixe donc une fonction $f \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$, et on cherche une suite $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{C}_{00}^\infty(\mathbb{R})$ qui converge vers f en norme L^p .

Soit $\chi \in \mathcal{C}_{00}^\infty(\mathbb{R})$ positive et non identiquement nulle. Alors $\int_{\mathbb{R}} \chi \neq 0$, donc on peut définir $k(t) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \chi} \chi(t)$. La fonction k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact avec $\int_{\mathbb{R}} k(t) dt = 1$. Donc, si on pose $k_n(t) := n k(nt)$, alors (k_n) est une suite de Dirac formée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Par le Théorème 3.2, $\varphi_n := k_n * f$ tend vers f en norme L^p . De plus, les φ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par le Théorème 2.1. Enfin, chaque φ_n est à *support compact* car k_n et f le sont. (Si on choisit A et A_n tels que $f \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$ et $\varphi_n \equiv 0$ en dehors de $[-A_n, A_n]$, alors $k_n * f(x) = \int_{-A}^A k_n(x-t)f(t) dt$ vaut 0 en dehors de $[-A - A_n, A + A_n]$.) $\square$

COROLLAIRE 3.4. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$, on peut trouver une suite $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{C}_{00}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. **Exo.** $\square$

4. Transformation de Fourier

4.1. Généralités.

RAPPEL. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la **transformée de Fourier** de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

EXEMPLE. Si g est la fonction définie par $g(t) = e^{-t^2/2}$, alors $\hat{g}(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

REMARQUE. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est une fonction *continue bornée*, avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Démonstration. **Exo** $\square$

PROPOSITION 4.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$ (**Lemme de Riemann-Lebesgue**).*

Démonstration. **Exo** non trivial. Commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact. $\square$

PROPOSITION 4.2. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.*

Démonstration. $\square$

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $k \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : k * f = f$.

4.2. Formule d'inversion de Fourier.

THÉORÈME 4.3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si de plus $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx \quad \text{presque partout}$$

Démonstration.

FAIT 1. Il existe une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ et bornée telle que : g continue en 0 avec $g(0) = 1$ et $\hat{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} \hat{g} = 2\pi$.

Preuve du Fait 1. La gaussienne. □

NOTATION. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\check{g}$ la fonction définie par

$$\check{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{itx} dx.$$

FAIT 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(\varepsilon x) e^{itx} dx = f * h_\varepsilon(t),$$

où h_ε est la fonction définie par

$$h_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon} \check{g}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Preuve du Fait 2. Fubini. □

Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1$. Soit aussi (ε_n) une suite de nombre réels strictement positifs tendant vers 0. Si g est comme dans le Fait 1 et si on pose $k := \frac{1}{2\pi} \check{g}$, alors on a par le Fait 2 :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(\varepsilon_n x) e^{itx} dx = f * k_n(t),$$

où $k_n(u) := \frac{1}{\varepsilon_n} k\left(\frac{u}{\varepsilon_n}\right)$.

De plus, par définition de k , on a $\int_{\mathbb{R}} k = 1$ car $\int_{\mathbb{R}} \check{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{g} = 2\pi$. Donc la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Dirac dans $L^1(\mathbb{R})$. Etc □

COROLLAIRE 4.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Les fonctions f et $t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx$ sont continues et égales presque partout, donc égales partout. □

REMARQUE. L'hypothèse " $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ " est satisfaite en particulier si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. □

Exercice. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = e^{-|t|}$, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}.$$

4.3. Formule de Plancherel.

THÉOREME 4.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a la **formule de Plancherel***

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant

LEMME 4.6. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une suite (φ_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact telle que $\varphi_n \rightarrow f$ en norme L^1 et en norme L^2 .*

Démonstration. Posons d'abord $f_n := \mathbf{1}_{[-n,n]} f$. Alors $f_n(t) \rightarrow f(t)$ presque partout, et $|f_n| \leq |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f \in L^1 \cap L^2$, on en déduit par convergence dominée (dans L^1 et dans L^2) que $f_n \rightarrow f$ en norme L^1 et en norme L^2 .

Maintenant, soit $(k_r)_{r \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ une suite de Dirac formée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on sait que $k_r * f_n \rightarrow f_n$ en norme L^1 et en norme L^2 quand $r \rightarrow \infty$; donc on peut trouver un entier r_n tel que $\|k_{r_n} * f_n\|_p \leq 2^{-n}$ pour $p = 1, 2$.

Comme $\|k_{r_n} * f_n - f\|_p \leq \|k_{r_n} * f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p$, on voit que $\varphi_n := k_{r_n} * f_n$ tend vers f en norme L^1 et en norme L^2 quand $n \rightarrow \infty$. De plus, chaque φ_n est de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact car k_{r_n} est de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact et f_n est à support compact. $\square$

Preuve du Théorème 4.5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On va distinguer 2 cas.

CAS 1. On suppose que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, c'est un calcul direct utilisant la formule d'inversion et Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{f}(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \left(\overline{f(t)} e^{itx} dt \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx \right) dt \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

CAS 2. Cas général.

Soit (φ_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact convergeant vers f en norme L^1 et en norme L^2 . (La suite (φ_n) est donnée par le Lemme 4.6.)

On sait que $\widehat{\varphi_n} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le Cas 1, on a donc

$$\|\widehat{\varphi_n}\|_2^2 = 2\pi \|\varphi_n\|_2^2.$$

Comme de plus $\|\varphi_n\|_2^2 \rightarrow \|f\|_2^2$ puisque $\varphi_n \rightarrow f$ en norme L^2 , on en déduit que

$$(4.1) \quad \|\widehat{\varphi_n}\|_2^2 \rightarrow 2\pi \|f\|_2^2.$$

Par ailleurs, on a $\|\widehat{\varphi_q} - \widehat{\varphi_p}\|_2^2 = \|\widehat{\varphi_p - \varphi_q}\|_2^2 = \|\varphi_q - \varphi_p\|_2^2$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, d'après le Cas 1 appliqué à $\varphi_q - \varphi_p$. Donc la suite $(\widehat{\varphi_n})$ est *de Cauchy* dans L^2 car (φ_n) est de Cauchy. Comme L^2 est complet, la suite $\widehat{\varphi_n}$ converge donc dans L^2 vers une certaine fonction g ; et par conséquent, $(\widehat{\varphi_n})$ admet une sous-suite qui tend vers g presque partout. Mais $\widehat{\varphi_n}(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$ en tout point (et même uniformément) car $\varphi_n \rightarrow f$ en norme L^1 et $|\widehat{\varphi_n}(x) - \widehat{f}(x)| = |(\widehat{\varphi_n - f})(x)| \leq \|\varphi_n - f\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $g(x) = \widehat{f}(x)$ presque partout; et donc $\widehat{\varphi_n} \rightarrow \widehat{f}$ en norme L^2 . En particulier :

$$(4.2) \quad \|\widehat{\varphi_n}\|_2^2 \rightarrow \|\widehat{f}\|_2^2.$$

En comparant (4.1) et (4.2), on obtient immédiatement la formule de Plancherel. $\square$

Classes monotones et applications

1. Théorème des classes monotones

DÉFINITION 1.1. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathcal{M}$ une famille de parties de Ω . On dit que $\mathcal{M}$ est une **classe monotone** si elle vérifie les propriétés suivantes.

- (o) $\Omega \in \mathcal{M}$.
- (i) Stabilité par **différences propres** : si $A, A' \in \mathcal{M}$ et $A \subseteq A'$, alors $A' \setminus A \in \mathcal{M}$.
- (ii) Stabilité par **réunions dénombrables croissantes** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Exemple 0. Toute tribu est une classe monotone.

Exemple 1. Soit $\mathcal{B}$ une tribu de parties de Ω . Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures finies sur $(\Omega, \mathcal{B})$ telles que $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$, alors $\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{B}; \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ est une classe monotone.

Démonstration. On a $\Omega \in \mathcal{M}$ par hypothèse. La stabilité par réunions dénombrables croissantes vient de la continuité par en dessous des mesures μ_1 et μ_2 ; et si $A, A' \in \mathcal{M}$ avec $A \subseteq A'$, alors $\mu_1(A' \setminus A) = \mu_1(A') - \mu_1(A) = \mu_2(A') - \mu_2(A) = \mu_2(A' \setminus A)$, donc $A' \setminus A \in \mathcal{M}$. (On a besoin de savoir que les mesures sont finies pour pouvoir soustraire $\mu_1(A)$ et $\mu_2(A)$.) $\square$

Exemple 2. Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces métriques. Pour $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ et $x \in \Omega_1$, notons A_x la coupe de A à l'abscisse x . Si μ est une mesure borélienne finie sur Ω_2 , alors la famille

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2); \text{ la fonction } x \mapsto \mu(A_x) \text{ est borélienne sur } \Omega_1\}$$

est une classe monotone.

Démonstration. Si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$ et si on pose $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, alors $\mu(A_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((A_n)_x)$ car A_x est la réunion croissante des $(A_n)_x$; donc la fonction $x \mapsto \mu(A_x)$ est borélienne car les fonctions $x \mapsto \mu((A_n)_x)$ le sont. Si $A, A' \in \mathcal{M}$ avec $A \subseteq A'$, alors on peut écrire $\mu((A' \setminus A)_x) = \mu(A'_x \setminus A_x) = \mu(A'_x) - \mu(A_x)$ car la mesure μ est finie; donc la fonction $x \mapsto \mu((A' \setminus A)_x)$ est borélienne. $\square$

DÉFINITION 1.2. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω . On dit que $\mathcal{C}$ est un **π -système** si $\mathcal{C}$ est stable par **intersections finies**.

Exemple 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La famille des pavés compacts contenus dans Ω est un π -système de parties de Ω .

Exemple 2. Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces métriques, et soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. La famille $\mathcal{C} = \{C_1 \times C_2; C_1 \in \mathcal{B}(\Omega_1), C_2 \in \mathcal{B}(\Omega_2)\}$ est un π -système de parties de Ω .

THÉORÈME DES CLASSES MONOTONES. Soit $\mathcal{C}$ un π -système de parties de Ω . Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{M}$ contient la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{M}_0$ la classe monotone **engendrée par $\mathcal{C}$** , i.e. l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{C}$, ou encore la *plus petite* classe monotone contenant $\mathcal{C}$. On a par définition $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$; donc il suffit de montrer que $\mathcal{M}_0$ est en fait une tribu : on aura alors $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_0$, et donc $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$.

Comme $\Omega \in \mathcal{M}_0$, on a $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{M}_0$ car $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone. De même, si $A \in \mathcal{M}_0$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{M}_0$ car $\Omega \in \mathcal{M}_0$.

La stabilité par réunions dénombrables va se prouver en 3 étapes.

FAIT. Si $E \in \mathcal{M}_0$, alors $\mathcal{M}_E := \{M \subseteq \Omega; M \cap E \in \mathcal{M}_0\}$ est une classe monotone.

Preuve du Fait. On a $\Omega \in \mathcal{M}_E$ puisque $\Omega \cap E = E$. Si $M, M' \in \mathcal{M}_E$ et $M \subseteq M'$, alors

$$(M' \setminus M) \cap E = \underbrace{(M' \cap E)}_{\in \mathcal{M}_0} \setminus \underbrace{(M \cap E)}_{\in \mathcal{M}_0} \in \mathcal{M}_0$$

car $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone; donc $M' \setminus M \in \mathcal{M}_E$. De même, si (M_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}_E$, alors $(\bigcup_0^\infty M_n) \cap E = \bigcup_0^\infty (M_n \cap E) \in \mathcal{M}_0$ car $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone; donc $\bigcup_0^\infty M_n \in \mathcal{M}_E$. $\square$

ÉTAPE 1. Si $B \in \mathcal{C}$, alors $A \cap B \in \mathcal{M}_0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_0$.

Démonstration. Par le Fait, la famille $\mathcal{M}_B = \{A \subseteq \Omega; A \cap B \in \mathcal{M}_0\}$ est une classe monotone. De plus, $\mathcal{M}_B$ contient $\mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies : si $A \in \mathcal{C}$, alors $A \cap B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_0$. Donc $\mathcal{M}_B$ contient $\mathcal{M}_0$, ce qui est le résultat souhaité. $\square$

ÉTAPE 2. $\mathcal{M}_0$ est stable par intersections finies.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'on a $A \cap B \in \mathcal{M}_0$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_0$. Pour cela, on fixe $A \in \mathcal{M}_0$ et on considère la famille $\mathcal{M}_A = \{B \subseteq \Omega; A \cap B \in \mathcal{M}_0\}$. Par le Fait, $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone. De plus $\mathcal{M}_A$ contient $\mathcal{C}$ par l'Étape 1. Donc $\mathcal{M}_A$ contient $\mathcal{M}_0$. $\square$

ÉTAPE 3. $\mathcal{M}_0$ est stable par réunions dénombrables.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{M}_0$. Si on pose $B_n := A_0 \cup \dots \cup A_n$, alors $B_n \in \mathcal{M}_0$ d'après l'Étape 2 car $B_n = (\bigcap_{k=0}^n A_k^c)^c$ et $\mathcal{M}_0$ est stable par complémentation. De plus, la suite (B_n) est croissante et $\bigcup_0^\infty B_n = \bigcup_0^\infty A_n$; donc $\bigcup_0^\infty A_n \in \mathcal{M}_0$ car $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone. $\square$

Maintenant qu'on sait que $\mathcal{M}_0$ est une tribu, la preuve du théorème des classes monotones est achevée. $\square$

2. Application 1 : unicité des mesures

THÉORÈME 2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω , avec $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $\mathcal{C}$ est un π -système.
- (ii) $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.
- (iii) Il existe une suite $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\Omega = \bigcup_{k=0}^\infty E_k$.

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{B})$ vérifiant $\mu_1(C) = \mu_2(C) < \infty$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration.

CAS 1. On suppose que $\Omega \in \mathcal{C}$.

Dans ce cas, $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$, i.e. μ_1 et μ_2 sont des mesures finies telles que $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$. Donc la famille

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{B}; \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

est une classe monotone. Comme $\mathcal{C}$ est un π -système et comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ par hypothèse sur μ_1 et μ_2 , le théorème des classes monotones dit que $\mathcal{M}$ contient la tribu $\sigma(\mathcal{C})$, qui est égale à $\mathcal{B}$; donc $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, i.e. $\mu_1 = \mu_2$.

CAS 2. Cas général.

On peut appliquer le cas précédent pour tout $k \in \mathbb{N}$ aux restrictions $\mu_{1,k}$ et $\mu_{2,k}$ de μ_1 et μ_2 à E_k , où les E_k sont donnés par (iii).

Les mesures $\mu_{1,k}$ et $\mu_{2,k}$ sont définies sur $\mathcal{B}_k := \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(E_k)$, et elles coïncident sur $\mathcal{C}_k := \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(E_k)$. De plus, on a $\sigma(\mathcal{C}_k) = \mathcal{B}_k$ (ex); poser $\mathcal{T} = \{B \subseteq \Omega; B \cap E_k \in \sigma(\mathcal{C}_k)\}$. Par le Cas 1, on a donc $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$; autrement dit

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \text{ vérifiant } A \subseteq E_k.$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{B}$ quelconque. Si on pose $\Omega_0 := E_0$ et

$$\Omega_k := E_k \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}) \quad \text{pour } k \geq 1,$$

alors $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$ car $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = \Omega$, et les Ω_k sont deux à deux disjoints. Donc A est la réunion disjointe des $A_k := A \cap \Omega_k$. De plus, comme $A_k \subseteq E_k$, on a $\mu_1(A_k) = \mu_2(A_k)$ pour tout k et donc

$$\mu_1(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_k) = \mu_2(A).$$

□

COROLLAIRE 2.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si μ_1, μ_2 sont deux mesures boréliennes sur Ω vérifiant $\mu_1(P) = \mu_2(P) < \infty$ pour tout pavé compact $P \subseteq \Omega$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C} = \{\text{pavés compacts contenus dans } \Omega\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. La famille $\mathcal{C}$ est un π -système de parties de Ω , et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$. De plus, l'ouvert Ω est réunion dénombrable de pavés compacts, autrement dit (iii) est vérifiée. Donc OK par le théorème. □

3. Application 2 : un lemme de mesurabilité

LEMME 3.1. Pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, les fonctions $x \mapsto \lambda_q(A_x)$ et $y \mapsto \lambda_p(A^y)$ sont boréliennes, respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et sur $\mathbb{R}^q$.

Démonstration. On montre seulement que la fonction $x \mapsto \lambda_q(A_x)$ est borélienne, pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}^q$ telle que $\lambda_q(E_n) < \infty$ pour tout n et $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^q$. Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, alors $\lambda_q(A_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_q(A_x \cap E_n)$; donc il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \lambda_q(A_x \cap E_n)$ est borélienne.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soit μ la mesure borélienne sur $\mathbb{R}^q$ définie par

$$\mu(B) := \lambda_q(B \cap E_n).$$

Il s'agit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, la fonction $x \mapsto \mu(A_x)$ est borélienne. Autrement dit, si on pose

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q); \text{ la fonction } x \mapsto \mu(A_x) \text{ est borélienne}\},$$

il s'agit de montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$.

Comme $\lambda_q(E_n) < \infty$, la mesure μ est *finie*; donc la famille $\mathcal{M}$ est une classe monotone. De plus $\mathcal{M}$ contient la famille

$$\mathcal{C} := \{C_1 \times C_2; C_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)\}.$$

En effet, si $C = C_1 \times C_2 \in \mathcal{C}$, alors $\mu(C_x) = \mu(C_2)$ si $x \in C_1$ et $\mu(C_x) = 0$ si $x \notin C_1$, donc la fonction $x \mapsto \mu(C_x)$ est borélienne par recollement. Comme $\mathcal{C}$ est un π -système (**micro-exo**) et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ (car $\mathcal{C}$ contient tous les pavés), le théorème des classes monotones permet de conclure que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. $\square$

Construction de mesures

1. Un théorème général

DÉFINITION 1.1. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω . On dit que la famille $\mathcal{C}$ est un **semi-anneau** si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\mathcal{C}$ contient $\emptyset$ et est stable par intersections finies ;
- (b) Si $C, C' \in \mathcal{C}$, alors $C' \setminus C$ est réunion finie d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux dis-joints.

EXEMPLE. On prend $\Omega = \mathbb{R}^d$. Alors la famille de tous les pavés de $\mathbb{R}^d$ est un semi-anneau.

Démonstration. (a) Si $P = I_1 \times \cdots \times I_N$ et $Q = J_1 \times \cdots \times J_N$, alors $P \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_N \cap J_N)$.

(b) On montre par récurrence sur d que si P et P' sont des pavés de $\mathbb{R}^d$, alors $P' \setminus P$ est réunion d'au plus $2d$ pavés disjoints.

Pour $d = 1$, c'est clair : si I, I' sont des intervalles bornés, alors $I' \setminus I$ est bien réunion d'au plus 2 intervalles bornés disjoints (*faire un dessin*).

Supposons le résultat démontré pour un certain $d \geq 1$. Soient P et P' deux pavés de $\mathbb{R}^{d+1}$. Alors $P = Q \times I$ et $P' = Q' \times I'$, où Q, Q' sont des pavés de $\mathbb{R}^d$ et I, I' des intervalles bornés. Donc

$$P' \setminus P = ((Q' \setminus Q) \times I) \bigsqcup ((Q' \cap Q) \times (I' \setminus I)).$$

Comme $Q' \setminus Q$ est réunion d'au plus $2d$ pavés disjoints par hypothèse de récurrence et comme $I' \setminus I$ est réunion d'au plus 2 intervalles bornés disjoints, on en déduit que $P' \setminus P$ est réunion d'au plus $2d + 2 = 2(d + 1)$ pavés disjoints. $\square$

THÉORÈME 1.2. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathcal{C}$ un semi-anneau de parties de Ω . Soit également $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ une "fonction d'ensembles" définie sur $\mathcal{C}$. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $\alpha(\emptyset) = 0$, et α est **finiment additive sur $\mathcal{C}$** : si $C_0, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ sont deux à deux disjoints et si $C_0 \cup \cdots \cup C_n$ appartient à $\mathcal{C}$, alors $\alpha(C_0 \cup \cdots \cup C_n) = \alpha(C_0) + \cdots + \alpha(C_n)$.
- (ii) Si $C \in \mathcal{C}$ et si $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $C \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$, alors

$$\alpha(C) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(C_k).$$

Alors il existe une mesure μ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$ telle que $\mu(C) = \alpha(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. Cette mesure μ est donnée par la formule

$$\mu(A) := \inf \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(C_k),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les suites (C_k) d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

Démonstration. Cf poly! □

2. La mesure de Lebesgue

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ le semi-anneau constitué par tous les pavés de $\mathbb{R}^d$, et soit $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction d'ensembles définie par

$$\alpha(P) := |P| \quad \text{pour tout pavé } P \subseteq \mathbb{R}^d.$$

On sait que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Pour montrer que la mesure de Lebesgue existe, il suffit donc de vérifier que α vérifie les propriétés (i) et (ii) du Théorème 1.2, autrement dit :

- (i) si $P_0, \dots, P_n$ sont des pavés deux à deux disjoints et si $P_0 \cup \dots \cup P_n$ est un pavé, alors $|P_0 \cup \dots \cup P_n| = |P_0| + \dots + |P_n|$;
- (ii) si P est un pavé et si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de pavés telle que $P \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$, alors

$$|P| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |P_k|.$$

LEMME 2.1. Soient $I_0, \dots, I_m, J_0, \dots, J_n$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$, et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Si on a

$$\sum_{l=0}^m \alpha_l \mathbf{1}_{I_l} \leq \sum_{k=0}^n \beta_k \mathbf{1}_{J_k},$$

alors

$$\sum_{l=0}^m \alpha_l |I_l| \leq \sum_{k=0}^n \beta_k |J_k|.$$

(Par conséquent, si $\sum_l \alpha_l \mathbf{1}_{I_l} = \sum_k \beta_k \mathbf{1}_{J_k}$ alors $\sum_l \alpha_l |I_l| = \sum_k \beta_k |J_k|$.)

Preuve du lemme 2.1. Choisissons un intervalle $[a, b]$ contenant tous les I_k et tous les J_l . Alors $\varphi := \sum_{l=0}^m \alpha_l \mathbf{1}_{I_l}$ et $\psi := \sum_{k=0}^n \beta_k \mathbf{1}_{J_k}$ sont des fonctions en escaliers sur $[a, b]$, et $\varphi \leq \psi$. Donc $\int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt$, ce qui est la conclusion souhaitée. □

LEMME 2.2. (propriété de Borel-Lebesgue)

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, alors on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N}$.

Preuve 1. On dira qu'un compact $L \subseteq K$ est *gentil* s'il peut être recouvert par un nombre fini de O_i . Par exemple : tout singleton $\{x\} \subseteq K$ est gentil. But : montrer que K est gentil. Par l'absurde, on suppose que K est méchant.

Soit $\varepsilon_1 = 2^{-1}$. Comme K est borné, il est contenu dans un pavé compact P , et P peut se subdiviser en un nombre fini de pavés compacts $P^1, \dots, P^M$ de diamètres inférieurs à ε_1 . (On a fixé une norme sur $\mathbb{R}^d$.) Donc, K est réunion d'un nombre fini de compacts $K^1, \dots, K^M$ de diamètres inférieurs à ε_1 . Comme K est méchant, l'un au moins des K^j est méchant (**micro-exo**), disons K^{j_1} . On pose $K_1 = K^{j_1}$. Alors $K_1 \subseteq K$, $\text{diam}(K_1) \leq 2^{-1}$ et K_1 est méchant.

On recommence avec K_1 , etc : par récurrence, on construit une suite décroissante de compacts $(K_n)_{n \geq 1}$ avec $K_n \subseteq K$, tels que $\text{diam}(K_n) \leq 2^{-n}$ et K_n est méchant.

Par le théorème des fermés emboîtés, $\bigcap_{n \geq 1} K_n$ est non vide, et réduite à un point $\{a\}$. Comme $a \in K$, on peut trouver un $i \in I$ tel que $a \in O_i$; et comme O_i est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq O_i$. Soit alors n tel que $\text{diam}(K_n) < \varepsilon$. Comme $a \in K_n$, on a alors $K_n \subseteq B(a, \varepsilon)$, et donc $K_n \subseteq O_i$. Mais c'est impossible car K_n est méchant. $\square$

Preuve 2. Par la propriété de Lindelöf, il existe un ensemble dénombrable $\tilde{I} \subseteq I$ tel que $\bigcup_{i \in \tilde{I}} O_i = \bigcup_{i \in I} O_i$, et donc $K \subseteq \bigcup_{i \in \tilde{I}} O_i$.

On écrit $\tilde{I} = \{i_n; n \geq 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Omega_n = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$. Alors (Ω_n) est une suite décroissante d'ouverts, et $K \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Donc, si on pose $K_n = K \setminus \Omega_n$, alors (K_n) est une suite décroissante de compacts et $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. D'après le *théorème des compacts emboîtés*, il existe un entier N tel que $K_N = \emptyset$. Ainsi $K \subseteq \Omega_N = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N}$. $\square$

Preuve de la propriété (i). Soient $P_0, \dots, P_n$ des pavés de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjoints tels que $P := P_0 \cup \dots \cup P_n$ soit un pavé. On a par hypothèse

$$\mathbf{1}_P = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{P_k}.$$

Si $d = 1$, le Lemme 2.1 donne

$$|P| = \sum_{k=0}^n |P_k|.$$

Si $d = 2$, écrivons $P = I_1 \times I_2$ et $P_k = I_{k,1} \times I_{k,2}$ pour $k = 0, \dots, n$. Alors

$$\mathbf{1}_{I_1}(t_1) \mathbf{1}_{I_2}(t_2) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{I_{k,1}}(t_1) \mathbf{1}_{I_{k,2}}(t_2) \quad \text{pour tous } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

En appliquant le Lemme 2.1 avec $m := 0$, $\alpha_0 := \mathbf{1}_{I_1}(t_1)$ et $n := n$, $\beta_k := \mathbf{1}_{I_{k,1}}(t_1)$, on obtient

$$\mathbf{1}_{I_1}(t_1) |I_2| = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{I_{k,1}}(t_1) |I_{k,2}| \quad \text{pour tout } t_1 \in \mathbb{R};$$

d'où en appliquant à nouveau le Lemme 2.1 :

$$|I_2| |I_1| = \sum_{k=0}^n |I_{k,2}| |I_{k,1}|,$$

ce qui est le résultat souhaité.

Pour un entier $d \geq 1$ quelconque, *idem* en appliquant d fois le Lemme 2.1. $\square$

Preuve de la propriété (ii). Soit P un pavé de $\mathbb{R}^d$, et soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de pavés telle que $P \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$.

CAS 1. P est compact et les P_k sont ouverts.

Dans ce cas, d'après le Lemme 2.2, le pavé compact P est recouvert par un nombre fini des pavés ouverts P_k : on peut trouver un entier n tel que $P \subseteq P_0 \cup \dots \cup P_n$. On a alors

$$\mathbf{1}_P \leq \mathbf{1}_{P_0 \cup \dots \cup P_n} \leq \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{P_k}.$$

et en raisonnant exactement comme dans la preuve de (i), on en déduit

$$|P| \leq \sum_{k=0}^n |P_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |P_k|.$$

CAS 2. Cas général.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On peut trouver un pavé *compact* Q tel que $Q \subseteq P$ et $|Q| \geq |P| - \varepsilon$; et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver un pavé *ouvert* Q_k tel que $P_k \subseteq Q_k$ et $|Q_k| \leq |P_k| + 2^{-k}\varepsilon$. Alors $Q \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$; donc d'après le Cas 1 :

$$|Q| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k|.$$

On obtient ainsi

$$|P| - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|P_k| + 2^{-k}\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} |P_k| + 2\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $|P| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |P_k|$. □

3. Mesures produits et Théorème de Fubini “général”

3.1. Tribus produits.

DÉFINITION 3.1. Soient $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), \dots, (\Omega_d, \mathcal{B}_d)$ des espaces mesurables, et soit $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$.

(1) Un **pavé mesurable** est ensemble $A \subseteq \Omega$ de la forme

$$A = A_1 \times \dots \times A_d, \quad \text{avec } A_j \in \mathcal{B}_j \text{ pour } j = 1, \dots, d.$$

(2) La **tribu produit** sur $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$ est la tribu de parties de Ω engendrée par les pavés mesurables. Cette tribu se note $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_d$.

EXEMPLE. Si $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ sont des espaces métriques *séparables*, alors la tribu $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\Omega_d)$ est la tribu borélienne de $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$. En particulier, la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$; et si $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$.

Démonstration. Vu en exo. □

CONVENTION. Chaque fois qu'on aura affaire à des espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), \dots, (\Omega_d, \mathcal{B}_d)$, on considérera que $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$ est “par défaut” muni de la tribu produit.

EXERCICE. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit $f : \Omega \rightarrow \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$. On écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$. Montrer que f est mesurable si et seulement si ses composantes $f_1, \dots, f_d$ le sont.

3.2. Mesure produit.

DÉFINITION 3.2. Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$ est dite **σ -finie** s'il existe une suite (E_n) d'ensembles mesurables telle que $\Omega = \bigcup_0^{\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut toujours supposer que la suite (E_n) est *croissante*, quitte à remplacer E_n par $E_0 \cup \dots \cup E_n$.

Exemple. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est σ -finie.

THÉORÈME 3.3. *Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ -finies sur $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ respectivement, alors il existe une unique mesure μ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ telle que*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$$

*pour tout rectangle mesurable $A_1 \times A_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$. La mesure μ s'appelle la **mesure produit** des mesures μ_1 et μ_2 , et se note $\mu_1 \otimes \mu_2$.*

Exemple. Si $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors $\lambda_{p+q} = \lambda_p \otimes \lambda_q$.

Preuve du théorème. Comme on n'a que deux espaces Ω_1 et Ω_2 , on parlera de **rectangles mesurables** plutôt que de pavés mesurables.

On note $\mathcal{R}$ la famille de tous les rectangles mesurables $R = A_1 \times A_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$; et pour tout $R = A_1 \times A_2 \in \mathcal{R}$, on pose

$$|R| = |A_1 \times A_2| := \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

(1) *Unicité* de la mesure produit : on applique le “théorème d'unicité des mesures” à la famille

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{R}; |C| < \infty\}.$$

Exo : écrire les détails.

(2) *Existence* de la mesure produit : on va utiliser le Théorème 1.2, en prenant cette fois pour $\mathcal{C}$ la famille $\mathcal{R}$ de *tous* les rectangles mesurables et pour $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ la fonction définie par $\alpha(R) := |R|$ pour tout $R \in \mathcal{R}$.

On vérifie que $\mathcal{C}$ est un semi-anneau. (En fait, si $C, C' \in \mathcal{C}$, alors $C' \setminus C$ est réunion de 2 éléments de $\mathcal{C}$ disjoints : **exo**.) Il s'agit de voir que les propriétés (i) et (ii) du Théorème 1.2 sont satisfaites.

(i) Soient $R_0, \dots, R_n \in \mathcal{R}$ deux à deux disjoints tels que $R := R_0 \cup \dots \cup R_n$ appartienne encore à $\mathcal{R}$. On écrit $R = A_1 \times A_2$ et $R_k = A_{k,1} \times A_{k,2}$ pour $k = 0, \dots, n$. Comme les R_k sont deux à deux disjoints, on a $\mathbf{1}_R = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{R_k}$; autrement dit

$$\mathbf{1}_{A_1}(x) \mathbf{1}_{A_2}(y) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{A_{k,1}}(x) \mathbf{1}_{A_{k,2}}(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

En fixant $x \in \Omega_1$ et en intégrant en $y \in \Omega_2$ par rapport à μ_2 , on en déduit

$$\mathbf{1}_{A_1}(x) \mu_2(A_2) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{A_{k,1}}(x) \mu_2(A_{k,2}) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1;$$

d'où en intégrant par rapport à μ_1 :

$$\mu_2(A_2) \mu_1(A_1) = \sum_{k=0}^n \mu_2(A_{k,2}) \mu_1(A_{k,1}),$$

autrement dit $|R| = \sum_{k=0}^n |R_k|$.

(ii) Soit $R \in \mathcal{R}$, et soit (R_k) une suite de rectangles mesurables telle que $R \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k$. On a cette fois $\mathbf{1}_R \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{R_k}$. Autrement dit, en écrivant $R = A_1 \times A_2$ et $R_k = A_{k,1} \times A_{k,2}$:

$$\mathbf{1}_{A_1}(x) \mathbf{1}_{A_2}(y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_{k,1}}(x) \mathbf{1}_{A_{k,2}}(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

En intégrant en y par rapport à μ_2 et *en utilisant le théorème de convergence monotone* (sous la forme “intersion série-intégrale”), on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A_1}(x) \mu_2(A_2) &\leq \int_{\Omega_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_{k,1}}(x) \mathbf{1}_{A_{k,2}}(y) \right) d\mu_2(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_{k,1}}(x) \mu_2(A_{k,2}) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1; \end{aligned}$$

et donc, en intégrant maintenant par rapport à μ_1 :

$$\mu_2(A_2) \mu_1(A_1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2(A_{k,2}) \mu_1(A_{k,1}),$$

autrement dit $|R| \leq \sum_0^{\infty} |R_k|$. □

Remarque. On montrerait de la même façon l’existence et l’unicité de la mesure produit de d mesures σ -finies $\mu_1, \dots, \mu_d$, notée $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_N$.

Exercice. Montrer que si $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$, $(\Omega_3, \mathcal{B}_3)$ sont 3 espaces mesurables, alors $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \otimes \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \otimes (\mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3)$; et que si μ_1, μ_2, μ_3 sont 3 mesures σ -finies, alors $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

3.3. Cavalieri et Fubini. Soient $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis.

NOTATIONS. pour tout ensemble $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ on note A_x et A^y les coupes de A respectivement à l’abscisse $x \in \Omega_1$ et à l’ordonnée $y \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned} A_x &:= \{y \in \Omega_2; (x, y) \in A\} \quad \text{pour } x \in \Omega_1, \\ A^y &:= \{x \in \Omega_1; (x, y) \in A\} \quad \text{pour } y \in \Omega_2. \end{aligned}$$

LEMME 3.4. Si $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ appartient à la tribu produit $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, alors $A_x \in \mathcal{B}_2$ pour tout $x \in \Omega_1$ et $A^y \in \mathcal{B}_1$ pour tout $y \in \Omega_2$.

Démonstration. Pour $x \in \Omega_1$ fixé, l’application $\Phi_x : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2$ définie par $\Phi_x(y) := (x, y)$ est mesurable car ses composantes le sont (**exo** déjà posé). Donc $A_x = \Phi_x^{-1}(A)$ est mesurable, i.e. appartient à $\mathcal{B}_2$. De même, $A^y \in \mathcal{B}_1$ pour tout $y \in \Omega_2$. □

LEMME 3.5. Pour tout $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, les fonctions $x \mapsto \mu_2(A_x)$ et $y \mapsto \mu_1(A^y)$ sont mesurables, respectivement sur Ω_1 et sur Ω_2 .

Démonstration. Non-triviale, mais identique à celle du Lemme 3.1. **Exo** : écrire les détails. □

PRINCIPE DE CAVALIERI. Pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, on a

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^y) d\mu_2(y).$$

Démonstration. Identique à celle faite pour $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. □

Remarque. Si on ne suppose pas que les mesures μ_1 et μ_2 sont σ -finies, on peut très bien avoir $\int_{\Omega_1} \mu_2(A_x) d\mu_1(x) \neq \int_{\Omega_2} \mu_1(A^y) d\mu_2(y)$. Par exemple, soit $\Omega_1 = \mathbb{R} = \Omega_2$ avec $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_2$ et les mesures $\mu_1 := \lambda_1$ (la mesure de Lebesgue) et $\mu_2 := \mu_c$ (la mesure de comptage). Soit

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x = y\}$$

la “diagonale” de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme Δ est fermée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c’est un ensemble borélien. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\Delta_x = \{x\}$ et $\Delta^y = \{y\}$. Donc $\mu_2(\Delta_x) = \mu_c(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mu_1(\Delta^y) = \lambda_1(\{y\}) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_2(\Delta_x) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} d\lambda_1 = \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \mu_1(\Delta^y) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu_c = 0.$$

THÉORÈME DE FUBINI. Soit f une fonction mesurable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, positive ou à valeurs complexes.

(1) Si f est *positive*, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

(2) Si f est *intégrable* par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$, alors on a le droit d’écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Remarque. Le Théorème de Fubini “général” contient à la fois le théorème de Fubini “classique” dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et les théorèmes d’interversion série-intégrale (à condition de supposer qu’on a affaire à un espace mesuré σ -fini).

Exercice. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ et pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$ et vérifiant $\phi(0) = 0$, on a

$$\int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^\infty \phi'(t) \mu(\{f > t\}) dt.$$

Régularité

THÉORÈME 0.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit μ une mesure borélienne sur Ω . On suppose qu'on a $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$. Alors, pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ vérifiant $\mu(A) < \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $E \subseteq \Omega$ et un ouvert $U \subseteq \Omega$ tels que $E \subseteq A \subseteq U$ et $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$.*

Démonstration. On dira qu'un ensemble $A \subseteq \Omega$ est **régulier pour μ** s'il vérifie la conclusion du théorème : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $E \subseteq \Omega$ et un ouvert $U \subseteq \Omega$ tels que $E \subseteq A \subseteq U$ et $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$. Il s'agit de montrer que tout borélien $A \subseteq \Omega$ tel que $\mu(A) < \infty$ est régulier pour μ . On aura besoin de trois faits préliminaires.

FAIT 1. Si $H \subseteq \mathbb{R}^d$ vérifiant $\mu(H) < \infty$ est réunion dénombrable de compacts, alors H est **intérieurement régulier** pour μ : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $E \subseteq H$ tel que $\mu(H \setminus E) < \varepsilon$.

Preuve du Fait 1. Écrivons $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, où les K_n sont compacts. Quitte à remplacer K_n par $K_0 \cup \dots \cup K_n$, on peut supposer que la suite (K_n) est croissante. Alors la suite $(H \setminus K_n)$ est décroissante et $\bigcap_n (H \setminus K_n) = \emptyset$. Donc $\mu(H \setminus K_n) \rightarrow 0$ puisqu'on suppose que $\mu(H) < \infty$, et donc on peut trouver un entier n_0 tel que $E := K_{n_0}$ vérifie $\mu(H \setminus E) < \varepsilon$. $\square$

FAIT 2. Tout ouvert V de Ω vérifiant $\mu(V) < \infty$ est régulier pour μ , et tout fermé H de Ω vérifiant $\mu(H) < \infty$ est intérieurement régulier pour μ .

Preuve du Fait 2. Montrons d'abord que si $H \subseteq \Omega$ vérifiant $\mu(H) < \infty$ est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de Ω , alors H est intérieurement régulier.

D'après le Fait 1, il suffit de vérifier que H est réunion dénombrable de compacts. Comme tout ouvert de Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et tout fermé de Ω est l'intersection d'un fermé de $\mathbb{R}^d$ avec l'ouvert Ω , on peut écrire $H = V \cap F$, où V et F sont respectivement ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^d$. Fixons une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Si on pose

$$K_n := \{x \in F; \|x\| \leq n \text{ et } \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus V) \geq 2^{-n}\},$$

on vérifie très facilement que les K_n sont compacts et qu'on a $\bigcup_0^{\infty} K_n = V \cap F$.

On sait à présent que tout fermé H de Ω de mesure finie est intérieurement régulier. Soit maintenant V un ouvert de Ω tel que $\mu(V) < \infty$. Alors V est intérieurement régulier par ce qui précède. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc trouver un compact $E \subseteq V$ tel que $\mu(V \setminus E) < \varepsilon$; et comme V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, il suffit alors de prendre $U := V$ pour voir que V est régulier pour μ . $\square$

FAIT 3. Soit (A_n) une suite de boréliens réguliers pour μ , et soit $A := \bigcup_0^{\infty} A_n$. Si $\mu(A) < \infty$, alors A est régulier pour μ .

Preuve du Fait 3. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme les A_n sont réguliers pour μ , on peut pour tout $n \in \mathbb{N}$ trouver un compact E_n et un ouvert U_n tels que

$$E_n \subseteq A_n \subseteq U_n \quad \text{et} \quad \mu(U_n \setminus E_n) < 2^{-n} \varepsilon.$$

Si on pose $H := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, alors U est ouvert, $H \subseteq A \subseteq U$ et

$$U \setminus H = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (U_n \setminus E_n).$$

On a donc

$$\mu(U \setminus H) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n \setminus E_n) < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon = 2\varepsilon.$$

L'ensemble H n'est pas compact ; mais il est réunion dénombrable de compacts, et donc intérieurement régulier pour μ d'après le Fait 1 car $\mu(H) \leq \mu(A) < \infty$. On peut ainsi trouver un compact $E \subseteq H$ tel que $\mu(H \setminus E) < \varepsilon$. Alors $E \subseteq A \subseteq U$, et

$$\mu(U \setminus E) = \mu((U \setminus H) \cup (H \setminus E)) \leq \mu(U \setminus H) + \mu(H \setminus E) < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon;$$

donc A est régulier pour μ . $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème, en distinguant deux cas.

CAS 1. On suppose que $\mu(\Omega) < \infty$.

Dans ce cas, il s'agit de montrer que tout borélien $A \subseteq \Omega$ est régulier pour μ ; autrement dit, en posant

$$\mathcal{R}_\mu := \{A \in \mathcal{B}(\Omega); A \text{ est régulier pour } \mu\},$$

on veut montrer que $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{B}(\Omega)$. Pour cela, il suffit de vérifier que $\mathcal{R}_\mu$ est une tribu de parties de Ω et contient tous les ouverts.

Le fait que $\mathcal{R}_\mu$ contienne tous les ouverts découle du Fait 2, puisqu'on suppose que $\mu(\Omega) < \infty$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{R}_\mu$ est une tribu.

Il est clair que $\emptyset$ est régulier (pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre $E = \emptyset = U$), et le Fait 3 dit que $\mathcal{R}_\mu$ est stable par réunions dénombrables (puisque on suppose que $\mu(\Omega) < \infty$) ; donc il faut juste vérifier que si $A \in \mathcal{R}_\mu$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{R}_\mu$. Fixons $A \in \mathcal{R}_\mu$, et soit $\varepsilon > 0$.

Comme A est régulier pour μ , on peut trouver un compact $E \subseteq \Omega$ et un ouvert $U \subseteq \Omega$ tels que $E \subseteq A \subseteq U$ et $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$. Alors

$$\underbrace{\Omega \setminus U}_H \subseteq \Omega \setminus A \subseteq \underbrace{\Omega \setminus E}_{\tilde{U}}.$$

De plus, on a $\tilde{U} \setminus H = (\Omega \setminus E) \setminus (\Omega \setminus U) = U \setminus E$, et donc

$$\mu(\tilde{U} \setminus H) < \varepsilon.$$

Comme $\tilde{U} = \Omega \cap (\mathbb{R}^d \setminus E)$ est ouvert, tout serait donc pour le mieux si H était compact. Il ne l'est pas ; mais $H = \Omega \setminus U$ est tout de même un fermé de Ω , donc il est intérieurement régulier pour μ d'après le Fait 2. On peut ainsi trouver un compact $\tilde{E} \subseteq H$ tel que $\mu(H \setminus \tilde{E}) < \varepsilon$. Alors

$$\tilde{E} \subseteq \Omega \setminus A \subseteq \tilde{U} \quad \text{et} \quad \mu(\tilde{U} \setminus \tilde{E}) \leq \mu(\tilde{U} \setminus H) + \mu(H \setminus \tilde{E}) < 2\varepsilon;$$

ce qui prouve que $\Omega \setminus A$ est régulier pour μ .

CAS 2. Cas général.

On peut trouver une suite de pavés ouverts (Ω_n) telle que $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega$ pour tout n et $\Omega = \bigcup_0^\infty \Omega_n$. Alors $\mu(\Omega_n) \leq \mu(\overline{\Omega_n}) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\overline{\Omega_n}$ est compact ; donc on sait par le Cas 1 que tout borélien $A \subseteq \Omega_n$ est régulier pour μ . Si maintenant A est un borélien quelconque de Ω tel que $\mu(A) < \infty$, alors $A = \bigcup_0^\infty A_n$ où $A_n := A \cap \Omega_n$, donc A est régulier pour μ d'après le Fait 2. $\square$