Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence-Master Maths
Module *Variable complexe*

Examen du 22 Juin 2010

Durée : 4h

Sans documents

Questions de cours.

(1) On note log la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et on pose $\alpha = -1 + i$. A-t-on $\log(\alpha^2) = 2\log(\alpha)$?
(2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Pour $r > 0$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. Montrer qu'on a $|c_n r^n| \leq M(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Déterminer la nature de la singularité de $f(z) = e^{-1/z^2}$ en 0.
(4) Montrer que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe, et que tout ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.
(5) Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que la formule $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{P(nz)}{2^n}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, f est une fonction entière, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'il existe deux constantes A et C telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} \,:\, |f(z)| \leq Ae^{C|z|}\,.$$

(1) Montrer qu'on a $|c_n| r^n \leq Ae^{Cr}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.
(2) En choisissant convenablement r dans (1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|c_n| \leq A \left(\frac{Ce}{n}\right)^n\,.$$
(3) Déduire de (2) que la série entière $\sum_{n\geq 0} n! c_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$.
(4) Dans cette question, on prend $f(z) = \sin z$.
    (a) Montrer que l'hypothèse de départ est vérifiée avec $C = 1$ et A à préciser.

(b) Pour $|w| > 1$, calculer $g(w) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{w^{n+1}}$ ·

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

(1) On suppose que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ est bien définie et bornée sur Ω.

(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est non-constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-itz}\, dt\,.$$

(1) Montrer que F est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(2) Calculer $F(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$. (*On rappelle qu'on a* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$).

(3) Montrer qu'on a $F(z) = \sqrt{2\pi}\, e^{-z^2/2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f.

(1) Dans cette question, on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

(a) Soit $a \in \Omega$. Pourquoi peut-on trouver $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(\xi)| \geq \varepsilon$ pour tout $\xi \in \partial D(a, r)$?

(b) En utilisant le théorème de Rouché, montrer que pour tout $a \in \Omega$ on peut trouver $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que f et f_n ont le même nombre de zéros dans le disque $\overline{D}(a, r)$.

(2) Montrer que si les f_n ne s'annulent jamais, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien f ne s'annule jamais.

Exercice 5. Soit $\alpha \geq 0$. En considérant des domaines élémentaires du type

$$K_R = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\},$$

calculer l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1 + t^6}\, dt\,.$$

Exercice 6. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points non nuls de $\mathbb{D}$ vérifiant $\sum_0^\infty (1 - |a_n|) < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction $B : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée dont les zéros sont exactement les a_n.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $b_n : \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}_n\} \to \mathbb{C}$ par

$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \cdot$$

(a) Déterminer les zéros de b_n.

(b) Montrer qu'on a

$$1 - b_n(z) = \frac{1 - |a_n|}{1 - \bar{a}_n z} \left(1 + \frac{|a_n|}{a_n}\, z\right),$$

et en déduire que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$|1 - b_n(z)| \leq 2\, \frac{1 - |a_n|}{1 - |z|} \cdot$$

(c) Calculer $|b_n(\xi)|$ pour $\xi = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, et en déduire qu'on a $|b_n(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant un produit infini.