[16] J. Puhl, *The trace of finite and nuclear elements in Banach algebras*, Czechoslovak Math. J. 28 (103) (1978), 656–676.
[17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.
[18] Y. Sun, *A remark on the trace of some Riesz operators*, Arch. Math. (Basel) 63 (1994), 530–534.
[19] M. Trémon, *Polynômes de degré minimum connectant deux projections dans une algèbre de Banach*, Linear Algebra Appl. 64 (1985), 115–132.
[20] H. K. Wimmer, *Spectral radius and radius of convergence*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 625–627.
[21] J. Zemánek, *Idempotents in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 177–183.

Département de Mathématiques
et de Statistique
Université Laval
Québec, Qué., Canada, G1K 7P4

Department of Electronic and
Electrical Engineering
University of Stellenbosch
Stellenbosch, 7600 South Africa

Received March 3, 1995
Revised version June 28, 1996
(3448)

STUDIA MATHEMATICA 121 (2) (1996)

Complexité de la famille des ensembles de synthèse d'un groupe abélien localement compact

par

ETIENNE MATHERON (Paris)

Résumé. On montre que si $\mathbf{G}$ est un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts, alors la famille des fermés de synthèse pour l'algèbre de Fourier $A(\mathbf{G})$ est une partie coanalytique non borélienne de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$, l'ensemble des fermés de $\mathbf{G}$ muni de la structure borélienne d'Effros. On généralise ainsi un résultat connu dans le cas du groupe $\mathbb{T}$.

Introduction. Depuis une dizaine d'années, les relations entre l'Analyse Harmonique et la Théorie Descriptive des Ensembles ont été largement explorées (voir par exemple [KL1] ou [KL2]). L'étude des propriétés descriptives de certaines familles de fermés issues de l'Analyse Harmonique s'est révélée très profitable aux deux disciplines.

Cet article est consacré à la famille des fermés de synthèse d'un groupe abélien localement compact.

Dans [KMG2], Katznelson et McGehee construisent dans le groupe $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ des ensembles de synthèse de "rang" arbitrairement grand, et indiquent très brièvement qu'une construction analogue est réalisable dans $\mathbb{T}$. Ce résultat est utilisé par Kechris et Solovay pour montrer que les ensembles de synthèse du groupe $\mathbb{T}$ forment une partie coanalytique non borélienne de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$, l'ensemble des compacts de $\mathbb{T}$ muni de la topologie de Hausdorff. Dans cet article, on obtient la même conclusion pour tous les groupes abéliens localement compacts (non discrets) à base dénombrable d'ouverts.

Dans toute la suite, la lettre $\mathbf{G}$ désigne un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts, et on note $\mathbf{\Gamma}$ le groupe dual de $\mathbf{G}$.

Par transformation de Fourier, on identifie $L^1(\mathbf{\Gamma})$ à une sous-algèbre de $C_0(\mathbf{G})$, que l'on note $A(\mathbf{G})$. Le dual de $A(\mathbf{G})$ est l'espace $PM(\mathbf{G})$ des *pseudomesures* sur $\mathbf{G}$ (qui s'identifie à $L^\infty(\mathbf{\Gamma})$). L'espace $M(\mathbf{G})$ des

1991 *Mathematics Subject Classification*: 43A46, 04A15.

mesures bornées sur $\mathbf{G}$ se plonge de manière évidente dans $PM(\mathbf{G})$, et $\| \|_{PM(\mathbf{G})} \le \| \|_{M(\mathbf{G})}$.

DÉFINITION. On dit qu'un fermé $E \subseteq \mathbf{G}$ est un *ensemble de synthèse* pour l'algèbre $A(\mathbf{G})$ s'il existe un seul idéal fermé de $A(\mathbf{G})$ admettant E comme annulateur. En d'autres termes, si on pose

$$I(E) = \{f \in A(\mathbf{G}) : f \equiv 0 \text{ sur } E\}$$

et

$$J_0(E) = \{f \in A(\mathbf{G}) : f \text{ est à support compact disjoint de } E\},$$

alors E est un ensemble de synthèse si et seulement si $J_0(E)$ est dense en norme dans $I(E)$.

Les ensembles de synthèse ont été abondamment étudiés, le résultat le plus célèbre à leur sujet étant bien sur le théorème de Malliavin, qui affirme que la synthèse est en défaut dans tous les groupes abéliens localement compacts non discrets (voir [GMG] ou [Ka] pour plus d'informations à ce sujet).

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ la famille des ensembles de synthèse pour $A(\mathbf{G})$.

Soient $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ l'ensemble des fermés de $\mathbf{G}$ et $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ l'ensemble des compacts de $\mathbf{G}$. On munit $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ de la structure borélienne d'Effros, engendrée par les ensembles de la forme $\{F \in \mathcal{F}(\mathbf{G}) : F \cap V \neq \emptyset\}$, où V est un ouvert de $\mathbf{G}$, et on munit $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ de la topologie de Hausdorff, engendrée par les ensembles de la forme $\{K \in \mathcal{K}(\mathbf{G}) : K \subseteq V_0, K \cap V_1 \neq \emptyset, \ldots, K \cap V_n \neq \emptyset\}$, où $V_0, V_1, \ldots, V_n$ sont des ouverts de $\mathbf{G}$. Comme $\mathbf{G}$ est un espace polonais (i.e. séparable et complètement métrisable), $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ est un espace borélien standard (c'est-à-dire boréliennement isomorphe à un espace polonais), et $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ est un espace polonais, compact si $\mathbf{G}$ est compact (voir [Ke] pour la démonstration de ces faits bien connus). Evidemment, $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ est un borélien de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$.

LEMME. *$\mathcal{S}(\mathbf{G})$ est une partie $\mathbf{\Pi}^1_1$ (coanalytique) de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$.*

Démonstration. Notons d'abord qu'un fermé $E \subseteq \mathbf{G}$ est un ensemble de synthèse si et seulement si la propriété suivante est vérifiée:

$$(*) \qquad \forall K \subseteq \mathbf{G} \text{ compact}, \quad I(E) \subseteq \overline{J_0(K \cap E)}.$$

En effet, si E est de synthèse, alors $(*)$ est évidemment vraie. Inversement, supposons $(*)$ vérifiée. Comme $A(\mathbf{G})$ possède une unité approchée formée de fonctions à support compact, il suffit, pour montrer que E est un ensemble de synthèse, de prouver que si $f \in I(E)$ est à support compact, alors $f \in \overline{J_0(E)}$. Soient donc $f \in I(E)$ à support compact, et V un voisinage de $\operatorname{supp} f$ tel que $K = \overline{V}$ est compact. Choisissons une fonction $\varphi \in A(\mathbf{G})$ à support contenu dans V, et égale à 1 au voisinage de $\operatorname{supp} f$. On a $\varphi \cdot f = f$ et $\varphi \cdot J_0(K \cap E) \subseteq J_0(E)$; il découle donc de $(*)$ que $f \in \overline{J_0(E)}$.

Choisissons maintenant une base dénombrable $(V_n)_{n\in\omega}$ pour la topologie de $\mathbf{G}$ stable par réunion finie, et, pour tout entier n, une suite $(f_{np})_{p\in\omega}$ dense dans $\{f \in A(\mathbf{G}) : \operatorname{supp} f \text{ est compact et } f \equiv 0 \text{ sur } V_n\}$. Fixons également une suite $(K_l)_{l\in\omega}$ de compacts de $\mathbf{G}$ telle que tout compact de $\mathbf{G}$ soit contenu dans l'un des K_l. D'après la remarque précédente, on peut alors écrire, pour tout fermé $E \subseteq \mathbf{G}$,

$$E \in \mathcal{S}(\mathbf{G}) \Leftrightarrow \forall f \in A(\mathbf{G})\ (f \in I(E) \Rightarrow \forall l\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n, p \quad E \cap K_l \subseteq V_n \text{ et } \|f_{np} - f\|_A < \varepsilon).$$

Comme $(A(\mathbf{G}); \| \|_A)$ est un espace polonais, et comme la relation entre parenthèses est borélienne en $(f, E) \in A \times \mathcal{F}(\mathbf{G})$, on en déduit que $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{G})$.

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *$\mathcal{S}(\mathbf{G})$ est un vrai $\mathbf{\Pi}^1_1$ de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$, c'est-à-dire un ensemble $\mathbf{\Pi}^1_1$ non borélien. En fait, $\mathcal{S}(\mathbf{G}) \cap \mathcal{K}(\mathbf{G})$ est non borélien dans $\mathcal{K}(\mathbf{G})$.*

La démonstration du théorème 1 nécessite plusieurs étapes. On montre d'abord qu'il suffit de traiter le cas du groupe de Cantor $\mathbf{2}^\omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, après avoir introduit un $\mathbf{\Pi}^1_1$-rang naturel (et bien connu) sur $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ (voir [Ke] ou [L] pour la définition d'un $\mathbf{\Pi}^1_1$-rang), on construit dans $\mathbf{2}^\omega$ des ensembles de synthèse de rang arbitrairement grand. D'après le théorème de la borne pour les $\mathbf{\Pi}^1_1$-rangs, il en résulte que $\mathcal{S}(\mathbf{2}^\omega)$ n'est pas borélien dans $\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega)$, ce qui achève la démonstration.

1. Réduction au cas du groupe $\mathbf{2}^\omega$. Dans cette section, on démontre le résultat suivant.

LEMME. *Il existe une application borélienne (et même continue) $\Phi : \mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega) \to \mathcal{K}(\mathbf{G})$ telle que $\Phi^{-1}(\mathcal{S}(\mathbf{G})) = \mathcal{S}(\mathbf{2}^\omega)$.*

La démonstration du lemme utilise de manière essentielle des résultats bien connus de Varopoulos ([Va]).

DÉFINITION 1. Posons $q = q(\mathbf{G}) = \sup\{n \in \omega : \text{tout voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbf{G} \text{ possède des éléments d'ordre} \ge n\}$, et $\mathbb{T}_q = \mathbb{T}$ si $q = \infty$, $\mathbb{T}_q = \{z \in \mathbb{T} : z^q = 1\}$ si $q < \infty$.

On dit qu'un compact $K \subseteq \mathbf{G}$ est un *ensemble de type K_q* s'il est totalement discontinu, si tous ses éléments sont d'ordre q, et si toute fonction continue de K dans $\mathbb{T}_q$ est uniformément approchable sur K par des caractères de $\mathbf{G}$.

DÉFINITION 2. Si K_1 et K_2 sont des espaces topologiques compacts, on note $V(K_1, K_2)$ l'algèbre des fonctions $f \in C(K_1 \times K_2)$ pouvant se décomposer sous la forme

$$f(x_1,x_2)=\sum_{n\in\omega} f_n^{(1)}(x_1)f_n^{(2)}(x_2),$$

où

$$f_n^{(i)}\in C(K_i)\quad \text{et}\quad \sum \|f_n^{(1)}\|_\infty\|f_n^{(2)}\|_\infty<\infty.$$

La norme d'une fonction $f\in V(K_1,K_2)$ est

$$\|f\|_{V(K_1,K_2)}=\inf\Big\{\sum \|f_n^{(1)}\|_\infty\|f_n^{(2)}\|_\infty : f=\sum f_n^{(1)}\otimes f_n^{(2)}\Big\}.$$

En termes plus concis, $V(K_1,K_2)$ est le *produit tensoriel projectif* $C(K_1)\widehat{\otimes} C(K_2)$. Si $K_1=K_2=K$, on pose $V(K)=V(K,K)$.

Les résultats qui suivent sont tous dûs à Varopoulos ([Va]).

1) *On suppose* $\mathbf{G}$ *compact. Soit* E *un fermé de* $\mathbf{G}$. *Posons* $E^*=\{(x,y)\in \mathbf{G}\times\mathbf{G} : x+y\in E\}$. *Alors* E *est un ensemble de synthèse pour* $A(\mathbf{G})$ *si et seulement si* E^* *est un ensemble de synthèse pour* $V(\mathbf{G})$.

2) *Soient* K_1,K_2 *des compacts de* $\mathbf{G}$ *homéomorphes à* $\mathbf{2}^\omega$. *On suppose que* $K_1\cap K_2=\emptyset$ *et que* $K_1\cup K_2$ *est un ensemble de type* K_q. *Notons* θ *l'homéomorphisme de* $K_1\times K_2$ *sur* $K_1+K_2\subseteq\mathbf{G}$ *défini par* $\theta(x,y)=x+y$. *Alors l'application* $f\mapsto f\circ\theta$ *est un isomorphisme de l'algèbre de restrictions* $A(K_1+K_2)$ *sur* $V(K_1,K_2)$.

3) *Si* K_1 *et* K_2 *sont des compacts de* $\mathbf{G}$ *disjoints, homéomorphes à* $\mathbf{2}^\omega$, *dont la réunion est un ensemble de type* K_q, *alors* K_1+K_2 *est un ensemble de synthèse pour* $A(\mathbf{G})$.

Démonstration du lemme. Comme $\mathbf{G}$ est non discret, on peut trouver des compacts $K_1,K_2\subseteq\mathbf{G}$ vérifiant

$$\begin{cases} K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont homéomorphes à } \mathbf{2}^\omega,\\ K_1\cap K_2=\emptyset,\\ K_1\cup K_2 \text{ est un ensemble de type } K_q.\end{cases}$$

Soient i_1,i_2 des homéomorphismes de $\mathbf{2}^\omega$ sur K_1,K_2. Pour tout compact $K\subseteq\mathbf{2}^\omega$, posons $K^*=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{2}^\omega\times\mathbf{2}^\omega : x_1+x_2\in K\}$ et $\Phi(K)=\{i_1(x_1)+i_2(x_2) : (x_1,x_2\in K^*\}$.

Comme K_1+K_2 est un ensemble de synthèse dans $\mathbf{G}$, un compact $L\subseteq K_1+K_2$ est un ensemble de synthèse pour $A(\mathbf{G})$ si et seulement si L est un ensemble de synthèse pour l'algèbre de restrictions $A(K_1+K_2)$ (la vérification est facile). Il découle donc des propriétés 1) et 2) que $K\in\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega)$ est un ensemble de synthèse pour $A(\mathbf{2}^\omega)$ si et seulement si $\Phi(K)$ est un ensemble de synthèse pour $A(\mathbf{G})$. Comme l'application $\Phi:\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega)\to\mathcal{K}(\mathbf{G})$ est manifestement continue, le lemme est démontré.

2. Le rang $[\ ]_S$. Rappelons d'abord la définition du *support* d'une pseudomesure (voir par exemple [M]): si $S\in PM(\mathbf{G})$, $\operatorname{supp} S$ est le plus petit fermé en dehors duquel S s'annule, autrement dit le plus petit fermé $F\subseteq\mathbf{G}$ vérifiant la propriété suivante : $\forall f\in J_0(F),\ \langle f,S\rangle=0$.

Pour tout fermé $E\subseteq\mathbf{G}$, posons

$$PM(E)=\{S\in PM(\mathbf{G}) : \operatorname{supp} S\subseteq E\},\qquad M(E)=M(\mathbf{G})\cap PM(E)$$

et

$$N(E)=\overline{M(E)}^{w^*}\quad (\text{adhérence préfaible de } M(E) \text{ dans } PM).$$

On a évidemment $PM(E)=J_0(E)^\perp$, et $I(E)=M(E)^\perp$. D'après le théorème de Hahn–Banach, E est donc un ensemble de synthèse si et seulement si $PM(E)=N(E)$, autrement dit si toute pseudomesure portée par E peut être obtenue comme limite préfaible de mesures portées par E. Cette reformulation permet d'associer à tout ensemble de synthèse un ordinal dénombrable, de la manière suivante.

Si Z est une partie de $PM(\mathbf{G})$, on note $Z^{(1)}$ l'ensemble des pseudomesures qui sont limites préfaibles d'une *suite* d'éléments de Z. On définit ensuite, par induction sur l'ordinal ξ, une partie $Z^{(\xi)}$ de $PM(\mathbf{G})$, en posant

$$Z^{(0)}=Z,\quad Z^{(\xi+1)}=(Z^{(\xi)})^{(1)},\quad Z^{(\xi)}=\bigcup_{\eta<\xi} Z^{(\eta)}\quad \text{si } \xi \text{ est limite.}$$

Comme $A(\mathbf{G})$ est séparable, la suite transfinie $(Z^{(\xi)})$ stationne à un ordinal *dénombrable* ξ_∞, et, si Z est convexe, il découle du théorème de Banach–Dieudonné que $Z^{(\xi_\infty)}=\overline{Z}^{w^*}$.

D'après ce qui précède, un fermé $E\subseteq\mathbf{G}$ est un ensemble de synthèse si et seulement si il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $M^{(\xi)}(E)=PM(E)$ (où on a posé $M^{(\xi)}(E)=M(E)^{(\xi)}$).

Définition. Le *rang* d'un ensemble de synthèse E est le plus petit ordinal dénombrable tel que $M^{(\xi)}(E)=PM(E)$; on le note $[E]_S$.

L'importance du rang $[\ ]_S$ provient du résultat suivant, dû à Kechris et Solovay (voir [KL1]; la démonstration est donnée pour $\mathbf{G}=\mathbb{T}$, mais l'adaptation au cas général ne pose aucune difficulté).

Théorème 2. *Le rang* $[\ ]_S$ *est un* $\mathbf{\Pi}_1^1$*-rang sur* $\mathcal{S}(\mathbf{G})$.

3. Familles indépendantes de fermés. Dans cette section, on suppose le groupe $\mathbf{G}$ compact. On démontre deux lemmes, probablement bien connus, qui seront ensuite utilisés (dans la section 4) pour traiter le cas du groupe $\mathbf{2}^\omega$.

Définition. Pour toute partie A de $\mathbf{G}$, notons $\operatorname{Gp}(A)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par A. On dira qu'une famille $\{K_i : i\in I\}$ de fermés de $\mathbf{G}$ est *indépendante* si aucun des K_i ne contient 0 et si, pour tout ensemble fini $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$, on a $\sum_{l=1}^{n} \mathrm{Gp}(K_{i_l}) = \bigoplus_l \mathrm{Gp}(K_{i_l})$.

Remarquons que si $\{K_i : i \in I\}$ est une famille indépendante de fermés, alors les K_i sont en particulier deux à deux disjoints.

Lemme 1. (a) *Si* $\mathbf{H}$ *est un sous-groupe fermé de* $\mathbf{G}$ *et* K *un fermé de* $\mathbf{G}$ *tel que* $K \cap \mathbf{H} = \emptyset$, *alors il existe une fonction* $f \in A(\mathbf{G})$ *telle que* $\|f\|_{A(\mathbf{G})} = 1$, $f \equiv 1$ *au voisinage de* $\mathbf{H}$ *et* $f \equiv 0$ *au voisinage de* K.

(b) *Si* $\{K_1, \ldots, K_n\}$ *est une famille indépendante de fermés de* $\mathbf{G}$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, *il existe une fonction* $f \in A(\mathbf{G})$ *vérifiant*

$$\|f\|_{A(\mathbf{G})} \le 6 \max\{|\alpha_j| : 1 \le j \le n\}, \quad f \equiv \alpha_j \quad \textit{au voisinage de } K_j.$$

Démonstration. (a) Si $\mathbf{H}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$ et $K \cap \mathbf{H} = \emptyset$, on peut trouver une fonction $\widetilde{f} \in A(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ telle que $\|\widetilde{f}\|_{A(\mathbf{G}/\mathbf{H})} = 1$, $\widetilde{f} \equiv 1$ au voisinage de 0 et $\widetilde{f} \equiv 0$ au voisinage de $\pi[K]$, où π est l'homomorphisme naturel de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Il est clair que $f = \widetilde{f} \circ \pi$ convient.

(b) Soit $\{K_1, \ldots, K_n\}$ une famille indépendante de fermés de $\mathbf{G}$. Posons, pour $j \le n$, $H_j = \mathrm{Gp}(K_j)$ et $H^{(j)} = \sum_{i \le j} H_i$. La partie (a) et l'indépendance de la famille $\{K_1, \ldots, K_n\}$ permettent de trouver des fonctions $f_j \in A(\mathbf{G})$ $(1 \le j \le n)$ vérifiant

$$\|f_j\|_{A(\mathbf{G})} = 1, \quad f_j \equiv 1 \text{ au voisinage de } H^{(j)},$$
$$f_j \equiv 0 \text{ au voisinage de } \bigcup_{i \ge j+1} K_i.$$

Soient maintenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Supposons d'abord que les α_j sont réels et $\alpha_1 \ge \ldots \ge \alpha_n$. Dans ce cas, la fonction $f = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) f_j + \alpha_n f_n$ vérifie

$$f \equiv \alpha_j \quad \text{au voisinage de } K_j, \quad \|f\|_{A(\mathbf{G})} \le 3 \max_j |\alpha_j|.$$

Dans le cas général, on traite séparément les parties réelles et imaginaires des α_j.

Lemme 2. *Soit* $\{K_1, \ldots, K_n\}$ *une famille indépendante de fermés de* $\mathbf{G}$. *Pour toute pseudomesure* $S \in PM(\mathbf{G})$ *portée par* $\bigcup_j K_j$, *on a*

$$\sum_{j=1}^{n} \|S \lceil K_j\|_{PM} \le 6 \|S\|_{PM}.$$

Démonstration. Soit $S \in PM(\bigcup K_j)$. Posons, pour $j \le n$, $H_j = \mathrm{Gp}(K_j)$ et $S_j = S \lceil K_j$. Fixons également $\varepsilon > 0$. Choisissons des caractères $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbf{\Gamma}$ et des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de module 1 tels que

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} \|S_j\|_{PM} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widehat{S}_j(\gamma_j) \Big| < \varepsilon.$$

L'indépendance de la famille $\{K_1, \ldots, K_n\}$ permet de trouver un caractère $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ tel que $\gamma \lceil H_j = \gamma_j \lceil H_j$ pour tout $j \le n$. Comme les sous-groupes fermés de $\mathbf{G}$ sont des ensembles de synthèse, on a alors $\widehat{S}_j(\gamma_j) = \widehat{S}_j(\gamma)$ pour tout j.

Soit $f \in A(\mathbf{G})$, donnée par le lemme 1, telle que $\|f\|_A \le 6$ et $f \equiv \alpha_j$ au voisinage de K_j $(1 \le j \le n)$. La remarque précédente montre que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widehat{S}_j(\gamma_j) = \langle S, \gamma f \rangle$. Il en résulte que $\sum_{j=1}^{n} \|S_j\|_{PM} \le 6\|S\|_{PM} + \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Fixons une distance d compatible avec la topologie de $\mathbf{G}$. Soit $\{F\} \cup \{K_n : n \in \omega\}$ une famille indépendante de fermés de $\mathbf{G}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \delta(F, K_n) = 0$, où $\delta(F, K_n) = \sup\{d(x, F) : x \in K_n\}$. Il découle des lemmes 1 et 2 que si $S \in PM(\mathbf{G})$ est portée par $F \cup (\bigcup_n K_n)$, alors

$$\sum_{n \le N} \|S \lceil K_n\|_{PM} \le 6 \Big\| S \lceil \Big(\bigcup_{n \le N} K_n \Big) \Big\|_{PM} \le 6 \|S\|_{PM} \quad \text{pour tout } N \in \omega.$$

On peut donc définir la *restriction* de S à F en posant

$$S \lceil F = S - \sum_{n \in \omega} S \lceil K_n;$$

$S \lceil F$ est portée par F, et on a $\|S \lceil F\|_{PM} \le 7 \|S\|_{PM}$.

4. Le cas du groupe $\mathbf{2}^\omega$. D'après le lemme de la section 1, il suffit, pour démontrer le théorème 1, de prouver que $\mathcal{S}(\mathbf{2}^\omega)$ n'est pas borélien dans $\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega)$; et d'après le théorème de la borne pour les $\mathbf{\Pi}_1^1$-rangs, il suffit pour cela de construire dans $\mathbf{2}^\omega$ des ensembles de synthèse de rang arbitrairement grand. En fait, pour des raisons techniques, on va construire ces ensembles dans $\mathbf{2}^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega$, en utilisant des idées de [KMG1] et [KMG2].

Dans toute la suite, la lettre $\mathbf{G}$ désigne le groupe $\mathbf{2}^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega$ (qui est évidemment isomorphe à $\mathbf{2}^\omega$). On note $\mathbf{H}$ le sous-groupe fermé $\mathbf{2}^\omega \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \subseteq \mathbf{G}$. Enfin, on fixe une distance d compatible avec la topologie de $\mathbf{G}$.

D'après le théorème de Malliavin, le groupe $\mathbf{H}$ contient des fermés qui ne sont pas de synthèse pour $A(\mathbf{G})$. Le résultat suivant entraîne donc que le rang $[\,]_S$ n'est pas borné sur $\mathcal{S}(\mathbf{G})$.

Théorème 1'. *Pour tout ordinal* $\xi < \omega_1$ *et tout fermé* F *de* $\mathbf{G}$ *contenu dans* $\mathbf{H}$ *tel que* $0 \notin F$, *il existe une suite* (K_n) *de fermés de* $\mathbf{G}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *La famille* $\{F\} \cup \{K_n : n \in \omega\}$ *est indépendante.*
(ii) $\lim_{n\to\infty} \delta(F, K_n) = 0$, *où* $\delta(F, K_n) = \inf\{d(x, F) : x \in K_n\}$.
(iii) $E = F \cup (\bigcup_{n\in\omega} K_n)$ *est un ensemble de synthèse.*
(iv)$_\xi$ *Si* $T \in M^{(\xi)}(E)$, *alors* $T\lceil F \in N(F) = \overline{M(F)}^{w^*}$.

La démonstration du théorème 1′ est assez technique, et on doit d'abord introduire quelques notations.

• Pour $\in \mathbf{2}^\omega$ et $l \in \omega$, on pose $\tau_l(\alpha) = \overline{0}^l{}^\frown\alpha^\frown\overline{0} \in (\mathbf{2}^\omega)^\omega$, où $\overline{0}^l$ est la suite $(0, \ldots, 0) \in (\mathbf{2}^\omega)^l$, et $\overline{0} = (0, 0, 0, \ldots) \in (\mathbf{2}^\omega)^\omega$.

• Pour $n, i, k \in \omega$ et $\overline{\alpha} = (\alpha, 0, 0, 0) \in \mathbf{H}$, on définit $\theta_n(\overline{\alpha})$, $\theta_{n,i,k}(\overline{\alpha}) \in \mathbf{G}$ par

$$\theta_n(\overline{\alpha}) = (\alpha, \tau_n(\alpha), 0, 0), \qquad \theta_{n,i,k}(\overline{\alpha}) = (\alpha, \tau_n(\alpha), \tau_{n+i}(\alpha), \tau_{n+i+k}(\alpha)).$$

Il est clair que les θ_n et les $\theta_{n,i,k}$ sont des homomorphismes injectifs de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$. Posons $\mathbf{H}_n = \theta_n[\mathbf{H}]$ et $\mathbf{H}_{n,i,k} = \theta_{n,i,k}[\mathbf{H}]$. Les homomorphismes θ_n et $\theta_{n,i,k}$ induisent des isomorphismes de l'algèbre de restrictions $A(\mathbf{H})$ sur les algèbres de restrictions $A(\mathbf{H}_n)$ et $A(\mathbf{H}_{n,i,k})$. Comme les sous-groupes fermés de $\mathbf{G}$ sont des ensembles de synthèse, on en déduit que si $S \in PM(\mathbf{G})$ est portée par $\mathbf{H}_n$ (resp. $\mathbf{H}_{n,i,k}$), alors S admet une "copie" portée par $\mathbf{H}$, définie, avec un léger abus de notation, par $\langle\theta_n S, f\rangle = \langle S, f\circ\theta_n^{-1}\rangle$, $f \in A(\mathbf{H})$ (resp. $\langle\theta_{n,i,k}S, f\rangle = \langle S, f\circ\theta_{n,i,k}^{-1}\rangle$). Dans la suite, on notera toujours S' cette copie de S. La notation ne fait pas référence à l'entier n (resp. au triplet (n, i, k)), mais cela ne prêtera pas à confusion.

La vérification du lemme suivant n'est pas difficile.

LEMME. 1) *Si* $S \in PM(\mathbf{H}_n)$ *ou* $S \in PM(\mathbf{H}_{n,i,k})$, *alors* $\|S'\|_{PM} = \|S\|_{PM}$.

2) *Soit* F *un fermé de* $\mathbf{G}$ *contenu dans* $\mathbf{H}$. *Posons* $F_n = \theta_n[F]$ *et* $F_{n,i,k} = \theta_{n,i,k}[F]$, $n, k, i \in \omega$. *Si* ξ *est un ordinal dénombrable et* $S \in M^{(\xi)}(F_n)$ *ou* $M^{(\xi)}(F_{n,i,k})$, *alors* $S' \in M^{(\xi)}(F)$.

3) *Pour tout ensemble fini* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\} \subseteq \mathbf{\Gamma}$, *il existe un entier* M *tel que*

• $\forall n \geq M,\ \forall S \in PM(\mathbf{H}_n),\ \widehat{S'}(\gamma_j) = \widehat{S}(\gamma_j),\ j = 1, \ldots, p;$
• $\forall n \geq M,\ \forall i, k \in \omega,\ \forall S \in PM(\mathbf{H}_{n,i,k}),\ \widehat{S'}(\gamma_j) = \widehat{S}(\gamma_j),\ j = 1, \ldots, p.$

Avant de commencer la démonstration du théorème 1′, fixons une fois pour toutes une énumération $\widetilde{V}_{n,1}, \ldots, \widetilde{V}_{n,2^n}$ des ouverts de $\mathbf{2}^\omega$ de la forme $\{\alpha \in \mathbf{2}^\omega : s \preceq \alpha\}$, où s est une suite de longueur n (et la notation $s \preceq \alpha$ signifie que s est un début de α), et notons $V_{n,1}, \ldots, V_{n,2^n}$ les images des $\widetilde{V}_{n,k}$ par un homéomorphisme quelconque (fixé) de $\mathbf{2}^\omega$ sur $\mathbf{G}$.

Démonstration du Théorème 1′. On raisonne par induction sur l'ordinal ξ.

(a) Traitons d'abord le cas où $\xi = 0$. Soit F un fermé de $\mathbf{G}$ contenu dans $\mathbf{H}$. Posons, pour $n \in \omega$,

$$\Lambda_n = \{\overline{\alpha} = (\alpha, 0, 0, 0) \in \mathbf{H} : \alpha(p) = 0\ \forall p \geq n\}$$

et

$$F_n = F \cup \{\overline{\alpha} \in \Lambda_n : \exists\overline{\beta} = (\beta, 0, 0, 0) \in F,\ \beta(i) = \alpha(i)\ \forall i < n\}.$$

Les F_n sont des fermés deux à deux disjoints, et on a $\lim_{n\to\infty}\delta(F, F_n) = 0$. De plus, d'après le critère de Herz (voir [R], p. 166), $F \cup (\bigcup_{n\in\omega} F_n)$ est un ensemble de synthèse. Il est alors facile de vérifier que la suite $(K_n) = (\theta_n[F_n])$ convient.

(b) Supposons avoir démontré la propriété voulue pour tous les ordinaux $< \xi$. Si ξ est un ordinal limite, on choisit une suite strictement croissante (η_n) d'ordinaux $< \xi$ telle que $\sup\eta_n = \xi$; si ξ est successeur, $\xi = \eta + 1$, on pose $\eta_n = \eta$ pour tout $n \in \omega$.

On distingue deux cas.

Premier cas. On suppose qu'il existe, pour tout $n \in \omega$, une suite $(L_i^{(n)})_{i\in\omega}$ de compacts de $\mathbf{G}$ *contenus dans* $\mathbf{H}$ telle que F et les $L_i^{(n)}$ vérifient les propriétés (i), …, (iv)$_{\eta_n}$.

On définit des fermés $C_n, C_{n,i,k}, K_n \subseteq \mathbf{G}$ $(i, n \in \omega,\ k \leq 2^n)$ en posant

$$C_n = \theta_{n+p_n}[F], \quad C_{n,i,k} = \theta_{n+p_n,i,k}[(F \cup L_i^{(n)}) \cap V_{n,k}],$$
$$K_n = C_n \cup \Big(\bigcup_{i,k} C_{n,i,k}\Big).$$

Les entiers p_n sont choisis inductivement de sorte que $C_{n,i,k} \subseteq V_{n,k}$ pour tout triplet (n, i, k).

Posons $E = F \cup (\bigcup_n K_n)$. Les faits suivants ne sont pas difficiles à vérifier.

FAITS. 1) *La famille* $\{F\} \cup \{C_n : n \in \omega\} \cup \{C_{n,i,k} : n, i \in \omega,\ k \leq 2^n\}$ *est indépendante.*

2) *E est un ensemble de synthèse.*

3) *Si* $n \in \omega$ *et* $S \in M^{(\eta_n)}(K_n)$, *alors* $S\lceil C_n \in N(C_n)$.

4) *Si* α *est un ordinal dénombrable et* $S \in M^{(\alpha)}(E)$, *alors* $S\lceil F \in M^{(\alpha)}(E)$.

Les faits 1) et 2) montrent que F et la famille $\{K_n : n \in \omega\}$ vérifient les propriétés (i)–(iii).

Notons ξ_0 (s'il existe) le plus petit ordinal dénombrable tel que F et les K_n ne vérifient pas la propriété (iv)$_{\xi_0}$. Il est clair que ξ_0 est nécessairement un ordinal successeur, $\xi_0 = \alpha_0 + 1$.

On va montrer par l'absurde que $\xi_0 > \xi$, et donc en particulier que la propriété (iv)$_\xi$ est vérifiée. En fait, on va voir que sous l'hypothèse $\xi_0 \leq \xi$, on a $PM(F) \cap M^{(\xi_0)}(E) \subseteq N(F)$, ce qui, compte tenu du fait 4), contredit la définition de ξ_0.

Dans la suite, on suppose que $\xi_0 \leq \xi$, et on fixe une pseudomesure $S \in PM(F) \setminus N(F)$ (s'il en existe). On fixe également une fonction $f \in I(F)$ telle que $\langle S, f\rangle = 1$.

Pour montrer que $S \notin M^{(\xi_0)}(E)$, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $g \in A(\mathbf{G})$ telle que

$$|\langle S, g\rangle| \geq 1 - \varepsilon\|S\|_{PM}, \quad |\langle T, g\rangle| \leq \varepsilon\|T\|_{PM} \quad \text{si } T \in M^{(\alpha_0)}(E).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbf{G}$ est totalement discontinu, l'algèbre $A(\mathbf{G})$ est une *algèbre de Stone–Weierstrass* (voir [KR] ou [R], ch. 9.3). On peut donc trouver un entier N et une fonction $h \in A(\mathbf{G})$ vérifiant

$$h \text{ est constante sur chaque } V_{n,k} \text{ si } n \geq N, \qquad \|h - f\|_{A(\mathbf{G})} < \varepsilon.$$

D'après le lemme, on peut choisir un entier $M \geq N$ tel que, pour $n \geq M$, $i \in \omega$ et $k \leq 2^n$, les propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall T \in PM(C_n), \qquad |\langle T', f\rangle - \langle T, f\rangle| \leq \varepsilon\|T\|_{PM};$$
$$\forall T \in PM(C_{n,i,k}), \qquad |\langle T', f\rangle - \langle T, f\rangle| \leq \varepsilon\|T\|_{PM}.$$

On peut également supposer que $|h(x)| \leq \varepsilon$ au voisinage de $F \cup (\bigcup_{n>M} K_n)$, et que $\eta_M \geq \alpha_0$ (puisque $\alpha_0 < \xi$).

Enfin, soit φ une fonction de $A(\mathbf{G})$ identiquement égale à 1 au voisinage de $F \cup (\bigcup_{n>M} K_n)$ et nulle au voisinage de $(\bigcup_{n\leq M} K_n)$. On pose $g = \varphi h$. Puisque $\operatorname{supp} S \subseteq F$, on a $\langle S, g\rangle = \langle S, h\rangle$, et donc $|\langle S, g\rangle| \geq 1 - \varepsilon\|S\|_{PM}$.

Soit maintenant $T \in M^{(\alpha_0)}(E)$. Le choix de φ et l'indépendance de la famille $\{F\} \cup \{C_n : n \in \omega\} \cup \{C_{n,i,k} : n, i \in \omega,\ k \leq 2^n\}$ permettent d'écrire

$$\langle T, g\rangle = \sum_{n>M} \langle T_n, h\rangle + \sum_{n>M,i,k} \langle T_{n,i,k}, h\rangle + \langle T\lceil F, h\rangle,$$

où $T_n = T\lceil C_n$, $T_{n,i,k} = T\lceil C_{n,i,k}$, et les deux séries sont absolument convergentes.

Par définition de ξ_0, on a $T\lceil F \in N(F)$. Il en résulte que $\langle T\lceil F, h\rangle = \langle T\lceil F, h - f\rangle$, et donc

$$|\langle T\lceil F, h\rangle| \leq \varepsilon\|T\lceil F\|_{PM} \leq 7\varepsilon\|T\|_{PM}.$$

D'autre part, si $n \geq M$, $i \in \omega$ et $k \leq 2^n$, alors h est constante au voisinage de $C_{n,i,k}$ car $C_{n,i,k} \subseteq V_{n,k}$. On en déduit

$$|\langle T_{n,i,k}, h\rangle| \leq \|T_{n,i,k}\|_{PM}\|h\lceil C_{n,i,k}\|_\infty \leq \varepsilon\|T_{n,i,k}\|_{PM}.$$

Puisque la famille $\{F\} \cup \{C_n : n \in \omega\} \cup \{C_{n,i,k} : n, i \in \omega,\ k \leq 2^n\}$ est indépendante, il s'ensuit (lemme 3.2) que $|\sum_{n,i,k}\langle T_{n,i,k}, h\rangle| \leq 6\varepsilon\|T\|_{PM}$.

Majorons maintenant $|\sum_n \langle T_n, h\rangle|$. Comme $\eta_M \geq \alpha_0$, le fait 3) montre que $T_n \in N(C_n)$ pour tout $n \geq M$. Par suite, $T'_n \in N(F)$ pour $n \geq M$.

Choisissons un entier $M' > M$ tel que $\sum_{n\geq M'} \|T_n\|_{PM} < \varepsilon\|T\|_{PM}/\|h\|_A$, et posons

$$\widetilde{T} = \sum_{n=M}^{M'} T_n, \qquad \widetilde{T}' = \sum_{n=M}^{M'} T'_n.$$

Puisque $\widetilde{T}' \in N(F)$ et $f \in I(F)$, on peut écrire $\langle \widetilde{T}, f\rangle = \langle \widetilde{T} - \widetilde{T}', f\rangle$.

D'autre part, comme la famille $\{F\} \cup \{C_n : n \in \omega\} \cup \{C_{n,i,k} : n, i \in \omega,\ k \leq 2^n\}$ est indépendante, on a

$$\sum \|T'_n\|_{PM} = \sum \|T_n\|_{PM} \leq 7 \sum \|T\lceil K_n\|_{PM} \leq 42\|T\|_{PM}$$

(donc en particulier $\|\widetilde{T}\|_{PM}, \|\widetilde{T}'\|_{PM} \leq 42\|T\|_{PM}$). D'après le choix de M, cela entraîne

$$|\langle \widetilde{T} - \widetilde{T}', f\rangle| \leq \varepsilon \sum (\|\widetilde{T}_n\|_{PM} + \|\widetilde{T}'_n\|_{PM}) \leq 84\varepsilon\|T\|_{PM},$$

autrement dit $|\langle \widetilde{T}, f\rangle| \leq 84\varepsilon\|T\|_{PM}$. Par suite,

$$|\langle \widetilde{T}, h\rangle| \leq |\langle \widetilde{T}, f\rangle| + |\langle \widetilde{T}, h - f\rangle| \leq |\langle \widetilde{T}, f\rangle| + \|\widetilde{T}\|_{PM}\|h - f\|_A \leq 126\varepsilon\|T\|_{PM},$$

d'où finalement $\sum |\langle T_n, h\rangle| \leq 127\varepsilon\|T\|_{PM}$.

En regroupant toutes les inégalités précédentes, on obtient

$$\forall T \in M^{(\alpha_0)}(E), \qquad |\langle T, g\rangle| \leq 140\varepsilon\|T\|_{PM}.$$

Comme on a déjà vu que $|\langle S, g\rangle| \geq 1 - \varepsilon\|S\|_{PM}$, ceci achève la récurrence dans ce cas particulier.

Cas général. Soit θ un isomorphisme de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega$ tel que $\theta[\mathbf{H}] = \mathbf{H} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$. Choisissons, pour tout $n \in \omega$, une suite $(L_i^{(n)})$ de compacts de $\mathbf{G} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \subseteq \mathbf{G}_1$ telle que $\theta[\mathbf{H}]$ et les $L_i^{(n)}$ vérifient les propriétés (i), …, $(\text{iv})_{\eta_n}$.

Soit maintenant τ un isomorphisme de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{2}^\omega$, et posons $\widetilde{F} = (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ \theta[F]$, $\widetilde{L}_i^{(n)} = \tau \otimes \mathrm{id}[L_i^{(n)}]$, où id est l'identité de $(\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega \times (\mathbf{2}^\omega)^\omega$. Alors $\widetilde{F}$ et les $\widetilde{L}_i^{(n)}$ sont tous contenus dans $\mathbf{H}$, et vérifient les propriétés (i), …, $(\text{iv})_{\eta_n}$. Il découle donc du premier cas qu'on peut trouver des compacts $\widetilde{K}_n \subseteq \mathbf{G}$ tels que $\widetilde{F}$ et les $\widetilde{K}_n$ vérifient les propriétés (i), …, $(\text{iv})_\xi$. Il suffit alors de poser $K_n = \theta^{-1} \circ (\tau \otimes \mathrm{id})^{-1}[\widetilde{K}_n]$ pour achever la récurrence.

Le théorème est donc entièrement démontré.

Remarques. 1) Les théorèmes 1, 2 et le théorème de la borne montrent qu'il existe, dans tout groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable, des ensembles de synthèse de rang arbitrairement grand.

2) Il découle du théorème précédent et de la démonstration du lemme de la section 1 que les ensembles de synthèse pour l'algèbre $V(\mathbf{2}^\omega)$ forment un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega)$.

3) On peut définir de manière évidente le rang d'un ensemble de synthèse pour $V(\mathbf{2}^\omega)$, et montrer que ce rang est un $\mathbf{\Pi}_1^1$-rang. Il résulte alors de 2) et du théorème de la borne qu'il existe, dans $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, des ensembles de synthèse pour $V(\mathbf{2}^\omega)$ de rang arbitrairement grand.

Références

[GMG] C. C. Graham and O. C. McGehee, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 238, Springer, New York, 1979.

[Ka] J. P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer, Berlin, 1970.

[KMG1] Y. Katznelson and O. C. McGehee, *Measures and pseudomeasures on compact subsets of the line*, Math. Scand. 23 (1968), 57–68.

[KMG2] —, —, *Some sets obeying Harmonic Synthesis*, Israel J. Math. 23 (1976), 88–93.

[KR] Y. Katznelson and W. Rudin, *The Stone–Weierstrass property in Banach algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), 253–265.

[Ke] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, New York, 1995.

[KL1] A. Kechris and A. Louveau, *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 128, Cambridge University Press, 1987.

[KL2] —, —, *Descriptive set theory and harmonic analysis*, J. Symbolic Logic 57 (1992), 413–441.

[L] A. Louveau, *The Descriptive Theory of Borel Sets*, livre en préparation.

[M] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[R] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Tract 12, Wiley, New York, 1962.

[Va] N. T. Varopoulos, *Tensor algebras and harmonic analysis*, Acta Math. 119 (1967), 51–112.

Equipe d'Analyse
Université Paris VI
Boîte 186
4, Place Jussieu
75252, Paris Cedex 05, France

Received July 7, 1995 (3512)

STUDIA MATHEMATICA 121 (2) (1996)

A Fourier analytical characterization of the Hausdorff dimension of a closed set and of related Lebesgue spaces

by

HANS TRIEBEL and HEIKE WINKELVOSS (Jena)

Abstract. Let Γ be a closed set in $\mathbb{R}^n$ with Lebesgue measure $|\Gamma| = 0$. The first aim of the paper is to give a Fourier analytical characterization of the Hausdorff dimension of Γ.

Let $0 < d < n$. If there exist a Borel measure μ with $\operatorname{supp}\mu \subset \Gamma$ and constants $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ such that $c_1 r^d \le \mu(B(x,r)) \le c_2 r^d$ for all $0 < r < 1$ and all $x \in \Gamma$, where $B(x,r)$ is a ball with centre x and radius r, then Γ is called a *d-set*. The second aim of the paper is to provide a link between the related Lebesgue spaces $L_p(\Gamma)$, $0 < p \le \infty$, with respect to that measure μ on the one hand and the Fourier analytically defined Besov spaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ($s \in \mathbb{R}$, $0 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$) on the other hand.

1. Introduction. Let $0 < \sigma < 1$. Then $\mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ stands for the usual Hölder space on $\mathbb{R}^n$, that is, the collection of all complex-valued continuous functions f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\|f \mid \mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^n)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x\ne y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\sigma} < \infty. \tag{1}$$

Let $s \in \mathbb{R}$ and $s = \varrho + \sigma$ with $0 < \sigma < 1$. Then the Zygmund spaces $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ are the lifted Hölder spaces,

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = (\mathrm{id} - \Delta)^{-\varrho/2}\mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

where Δ is the Laplacian and everything must be interpreted in the framework of tempered distributions $S'(\mathbb{R}^n)$. Of course $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ in (2) does not depend on the choice of ϱ and σ, and the Hölder spaces are included in the Zygmund scale. Assume Γ to be a closed subset of $\mathbb{R}^n$ with Lebesgue measure $|\Gamma| = 0$. Let

$$\mathcal{C}^{s,\Gamma}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) : f(\varphi) = 0 \text{ if } \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \text{ and } \varphi|\Gamma = 0\}, \tag{3}$$

where $f(\varphi)$ is the usual pairing for the Schwartz space $S(\mathbb{R}^n)$ and its dual $S'(\mathbb{R}^n)$. Furthermore, $\varphi|\Gamma$ is the restriction of $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ to Γ. In particular,

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46E35, 28A78, 28A80.

Key words and phrases: Hausdorff dimension, Hausdorff measure, function spaces.