

# LE PROBLÈME DE KADISON-SINGER

ÉTIENNE MATHERON

## SOMMAIRE

1. Introduction	2
2. Préliminaires	3
2.1. $C^*$ -algèbres	3
2.2. Calcul fonctionnel continu	4
2.3. L'algèbre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ comme algèbre d'opérateurs	5
2.4. L'algèbre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ comme espace $\mathcal{C}(K)$	5
2.5. Éléments positifs	11
2.6. Formes linéaires positives ; états	13
2.7. États purs	14
3. Le Problème de Kadison-Singer	17
3.1. Prolongement des formes linéaires positives	17
3.2. Propriété d'extension unique	18
3.3. Le cas "continu" ( $L^\infty, \mathcal{B}(L^2)$ )	22
3.4. Le cas "discret" ( $\ell^\infty, \mathcal{B}(\ell^2)$ ) : Kadison-Singer	25
3.5. Une "motivation physique" ?	28
4. Compressibilité, pavage et Propriété de Dixmier	29
4.1. Compressibilité et pavage : Anderson	29
4.2. Propriété de Dixmier	33
4.3. Pavages fini-dimensionnels	36
5. Pavage des projections de petite diagonale	38
5.1. La "Conjecture AA( $\delta$ )" de Akemann et Anderson	38
5.2. Version infini-dimensionnelle	41
5.3. Toute la vérité sur AA( $\delta$ )	43
6. Kadison-Singer et la théorie des repères	47
6.1. Suites de Bessel, repères et suites de Riesz	47
6.2. La Conjecture de Feichtinger	50
6.3. AA( $\delta$ ) à la sauce repères : Weaver	52
6.4. Inversibilité restreinte : Bourgain-Tzafriri	54
7. Résultats partiels et autres ramifications	56
7.1. Matrices à coefficients positifs	56
7.2. Bourgain-Tzafriri 2	61
7.3. Opérateurs de Laurent	62
7.4. Ultrafiltres	64
7.5. Repères	69
7.6. Rado-Horn	72
7.7. Et pourquoi pas un contre-exemple ?	74
8. Marcus-Spielman-Srivastava	74
9. Un schéma pour terminer	77

## 1. INTRODUCTION

Tout le monde a sans doute déjà entendu parler du “Problème de Kadison-Singer”... ou pas. Pour aiguïser la curiosité, on peut dire pour commencer

- (i) qu’il s’agit d’un problème célèbre issu de la théorie des  $C^*$ -algèbres, qui remonte à la fin des années 1950 ;
- (ii) qu’il admet une multitude de formulations équivalentes, parfois très éloignées en apparence de l’énoncé initial ;
- (iii) qu’il a été résolu en 2013 par... des informaticiens.

Le Problème a été posé dans [32] par Richard Kadison et Isadore Singer, sous la forme suivante : *Est-il vrai que tout état pur sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$ , l’algèbre des opérateurs diagonaux sur l’espace de Hilbert  $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$ , admet un unique prolongement en un état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$ , l’algèbre de tous les opérateurs bornés sur  $\ell^2$  ?* On voit qu’il s’agit d’une question assez “pointue”, puisque même son énoncé fait déjà appel à des notions sophistiquées. Pour qui voudrait en conséquence ne pas continuer à lire, on peut vendre la mèche dès à présent : la réponse est OUI.

Le point (ii) rend le Problème particulièrement séduisant. Cet aspect a été vigoureusement popularisé par Pete Casazza et ses co-auteurs, en particulier dans le très ambitieux [15]. Un “sous-point” remarquable est que certaines des formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer sont très élémentaires, et compréhensibles immédiatement par un étudiant de Licence.

Le point (iii) est lui aussi fascinant, en particulier pour des raisons “sociologiques” assez évidentes. Le Problème a été résolu dans [36] par Adam Marcus, Daniel Spielman et Nikhil Srivastava. Les deux derniers auteurs avaient déjà donné dans [46] une preuve étonamment courte d’un résultat difficile d’“inversibilité restreinte” dû à Bourgain et Tzafriri [12], en utilisant des méthodes tout à fait classiques en analyse numérique. Quant à Marcus, il est intéressant de se rendre sur sa page personnelle pour voir ce qu’il dit de ses domaines de recherche.

Dans les pages qui suivent, je vais me concentrer presque exclusivement sur le point (ii), *i.e.* les diverses reformulations du Problème de Kadison-Singer. En gros, le présent article est ce qui manque à [15] pour le rendre complètement auto-contenu. Dans l’esprit, il est très proche des belles “notes en ligne” de Nicholas Harvey [30], dont je me suis beaucoup inspiré. Bien entendu, j’ai aussi énormément emprunté à [15]. Enfin, certaines parties doivent beaucoup au très intéressant article [9] de Tristan Bice, et certaines autres au “blog” de Terence Tao.

On peut se demander à quoi bon écrire un tel article maintenant, puisque le Problème de Kadison-Singer n’en est plus un. Une réponse possible est que les preuves des diverses équivalences sont extrêmement intéressantes et font visiter de très belles régions des mathématiques. Il y avait donc là matière à un voyage assez palpitant.

Évidemment, la présentation n’est pas du tout optimale : il eût été bien plus économique, et certainement plus “logique”, de commencer par exposer la solution

au Problème et d'en déduire tous les autres énoncés équivalents ; de la sorte, on n'aurait eu que la moitié du travail à faire (nul besoin de démontrer des équivalences). C'est précisément l'approche superbement suivie par Alain Valette dans [51].

Pour les raisons invoquées plus haut, j'ai procédé différemment. Il est donc demandé au lecteur/à la lectrice de faire "comme si" il/elle ne savait pas que le Problème de Kadison-Singer est maintenant résolu, et d'accepter que les pages qui suivent n'aient pas d'autre but que de le/la faire voyager d'une formulation équivalente à une autre ; en espérant que la moins grande limpidité d'une telle présentation sera d'une certaine façon compensée par une plus grande "intensité dramatique".

Cet article reprend assez fidèlement (en développant certains points) le contenu d'un "mini-cours" donné à l'École de Printemps d'Analyse qui s'est tenue en Juin 2014 à Clermont-Ferrand. Je voudrais remercier Frédéric Bayart et Yanick Heurtaux pour l'invitation et la stimulante "pression" qui n'a pas manqué d'en résulter. Je remercie également tous les participants pour leur écoute attentive et bienveillante, leurs remarques et leurs questions pertinentes (dont certaines se retrouvent en filigrane dans le texte) et l'atmosphère particulièrement sympathique qu'ils ont contribué à créer. Enfin, un grand merci à de très attentifs relecteurs : Armelle, le Soldat Jourdan, le vénérable Professeur Li, Sophie Grivaux et un "rapporteur" anonyme.

## 2. PRÉLIMINAIRES

Comme on ne peut quand même pas "prendre les mathématiques à leur début", cette section et la suivante contiennent un rapide survol de ce qu'il faut savoir sur les  $C^*$ -algèbres pour comprendre ce dont il va être question. Il serait possible d'aller plus vite ; mais j'ai préféré prendre le temps de replacer le Problème de Kadison-Singer "dans son contexte". Pour en savoir plus sur les  $C^*$ -algèbres, voir par exemple [5], [22] ou [23].

**2.1.  $C^*$ -algèbres.** Une  $C^*$ -algèbre (en français : une **algèbre stellaire**) est une algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{C}$  munie d'une "conjugaison"  $a \mapsto a^*$  (la terminologie officielle est *involution*) telle que

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

La conjugaison doit vérifier les propriétés suivantes : c'est une application involutive  $((a^*)^* = a)$ , antilinéaire  $((a+b)^* = a^* + b^*$  et  $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$ ), qui "respecte les produits en changeant l'ordre"  $((ab)^* = b^*a^*)$ .

Il est important de se souvenir qu'on a  $\|a^*\| = \|a\|$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  ; autrement dit, la conjugaison est une *isométrie* de  $\mathcal{A}$ . Cela peut se voir comme suit :  $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a\| \|a^*\|$  et donc  $\|a\| \leq \|a^*\|$ , d'où l'égalité par symétrie puisque  $a = (a^*)^*$ .

On notera  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  l'ensemble des éléments **auto-adjoints** de  $\mathcal{A}$ , *i.e.* les  $x \in \mathcal{A}$  vérifiant  $x^* = x$ . C'est un sous-espace vectoriel *réel* de  $\mathcal{A}$ , visiblement fermé. Comme pour les nombres complexes, tout élément  $x$  de  $\mathcal{A}$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = a + ib,$$

avec  $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Explicitement :  $a = \frac{1}{2}(x + x^*)$  et  $b = \frac{1}{2i}(x - x^*)$ .

**Convention.** Toutes les  $C^*$ -algèbres considérées seront supposées **unitales**, et l'unité sera en général notée  $\mathbf{1}$ . On a alors  $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$  et  $\|\mathbf{1}\| = 1$ .

*Exemple 1.* L'algèbre  $\mathcal{B}(H)$  des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe  $H$ , munie de sa norme naturelle. Si  $T \in \mathcal{B}(H)$ , alors  $T^*$  est l'adjoint de  $T$ , *i.e.* l'unique opérateur sur  $H$  vérifiant  $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  pour  $x, y \in H$ . L'unité sera la plupart du temps notée  $Id$  plutôt que  $\mathbf{1}$ .

Concernant le produit scalaire (et comme on ne considère que des espaces de Hilbert complexes), il est bon de préciser tout de suite que

$$\langle x, y \rangle \text{ est antilinéaire par rapport à } y.$$

*Exemple 2.* L'algèbre  $\mathcal{C}(K)$  des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace topologique compact  $K$ , munie de la norme uniforme. L'involution est simplement la conjugaison :  $f^*(t) = \overline{f(t)}$ . L'algèbre  $\mathcal{C}(K)$  est *commutative*, ce qui n'est bien sûr pas le cas de  $\mathcal{B}(H)$  si  $\dim(H) \geq 2$ .

Les algèbres  $\mathcal{B}(H)$  et  $\mathcal{C}(K)$  jouent un rôle central dans toute la théorie en raison du **Théorème de Gelfand-Naimark**, que l'on peut énoncer brièvement comme suit :

- (1) toute  $C^*$ -algèbre commutative “est un  $\mathcal{C}(K)$ ”, *i.e.* est isomorphe à  $\mathcal{C}(K)$  pour un certain espace topologique compact  $K$ .
- (2) Toute  $C^*$ -algèbre (commutative ou non) “est une sous-algèbre d'un  $\mathcal{B}(H)$ ”.

Il n'est pas question de démontrer ici le Théorème de Gelfand-Naimark. Signalons cependant que le “cas commutatif” est assez élémentaire, et que le compact  $K$  - qui est uniquement déterminé à homéomorphisme près - peut être décrit comme l'espace des *caractères* de l'algèbre  $\mathcal{A}$  (les homomorphismes de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{C}$ ), l'isomorphisme entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}(K)$  étant simplement la transformation de Gelfand. La preuve du “cas non commutatif” est plus délicate.

*Exemple 3.* L'algèbre  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  de toutes les suites bornées de nombres complexes, munie de sa norme naturelle. C'est une  $C^*$ -algèbre commutative qui est en un sens le personnage principal de cette histoire.

Avant d'oublier, il est important de préciser qu'après mûre réflexion, il a été décidé que  $\mathbb{N}$  *commence* à 1 :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Comme me l'a rappelé le vénérable Professeur Li, certains mathématiciens pensent d'ailleurs que 0 n'est pas un entier “naturel”.

**2.2. Calcul fonctionnel continu.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $a$  un élément **normal** de  $\mathcal{A}$ , *i.e.* vérifiant  $aa^* = a^*a$ . Notons  $C^*(a)$  la sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $a$  (la plus petite sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$  contenant  $a$ ). Comme  $a$  est normal,  $C^*(a)$  est commutative (et peut être explicitement décrite comme l'adhérence de tous les polynômes en  $a$  et  $a^*$ ). Le Théorème de Gelfand-Naimark dit que  $C^*(a)$  “est un  $\mathcal{C}(K)$ ” ; mais dans ce cas on a un résultat plus précis : en notant  $\sigma(a)$  le **spectre** de  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , *il existe un unique isomorphisme*  $I_a : \mathcal{C}(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$  *tel que*  $I_a(\mathbf{z}) = a$ , *où*  $\mathbf{z}$  *est la fonction*  $\sigma(a) \ni z \mapsto z$ .

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ , on pose par définition  $f(a) := I_a(f)$ . Si  $f$  est un polynôme en  $z$  et  $\bar{z}$ , alors  $f(a)$  est obtenu en remplaçant  $z$  et  $\bar{z}$  par  $a$  et  $a^*$  dans l'expression de  $f$  ; et pour une fonction  $f$  générale,  $f(a)$  est la limite de  $P_n(a)$ , où  $(P_n)$  est n'importe quelle suite de polynômes en  $z$  et  $\bar{z}$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\sigma(a)$  (une telle suite de polynômes existe d'après le Théorème de Stone-Weierstrass).

L'intérêt du **calcul fonctionnel**  $a \mapsto f(a)$  est évident : chaque fois que l'on doit démontrer une propriété concernant un élément normal  $a$  d'une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , on peut "par calcul fonctionnel" se ramener au cas où  $a$  est une fonction continue sur un espace compact  $K$  ; et tout devient en général beaucoup plus clair.

Concernant le spectre, il faut ajouter les trois remarques suivantes.

- Si  $a \in \mathcal{A}$  est *auto-adjoint*, alors  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ . C'est évident car  $\sigma(a^*) = \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma(a)\}$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .
- Si  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  est une sous- $C^*$ -algèbre et si  $b \in \mathcal{B}$ , alors le spectre de  $b$  dans  $\mathcal{B}$  est le même que son spectre dans la "grosse" algèbre  $\mathcal{A}$ . Ceci n'est pas évident ; c'est un cas particulier de ce qu'on appelle souvent le **Théorème de permanence spectrale**.
- Si  $a \in \mathcal{A}$  est normal et si  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ , alors  $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ . C'est ce qu'on appelle d'habitude le **Théorème de l'image spectrale**. Pour le démontrer, on utilise le fait que le spectre d'un élément  $b \in C^*(a)$  est le même dans  $\mathcal{A}$  et dans  $C^*(a)$ . "Par calcul fonctionnel", on peut donc supposer que  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$  pour un certain compact  $K \subseteq \mathbb{C}$  et que  $a$  est la fonction  $\mathbf{z}$  ; on a alors  $f(a) = f$ , et l'énoncé se réduit au fait à peu près évident suivant :  $\sigma(f) = f(K)$  pour toute  $f \in \mathcal{C}(K)$ .

**2.3. L'algèbre  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  comme algèbre d'opérateurs.** Il est très facile de "réaliser"  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  comme sous-algèbre fermée de  $\mathcal{B}(H)$ , où  $H$  est l'espace de Hilbert  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  constitué par toutes les suites de nombres complexes de carré sommable : en notant  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base canonique de  $\ell^2(\mathbb{N})$ , il suffit d'identifier une suite  $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  à l'opérateur  $M_\theta = \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  défini par  $M_\theta e_n = \theta_n e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit,  $M_\theta$  est l'opérateur **diagonal** dont la matrice relativement à  $(e_n)$  est

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \theta_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

*Remarque.* La notation  $M_\theta$  n'est pas choisie au hasard : en considérant  $\ell^2(\mathbb{N})$  et  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  comme des espaces de *fonctions* sur  $\mathbb{N}$ , l'opérateur  $M_\theta$  n'est en effet rien d'autre que l'opérateur de *multiplication* par la fonction bornée  $\theta$ .

Plus généralement, si  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$  est un espace mesuré, la  $C^*$ -algèbre  $L^\infty(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$  se représente canoniquement comme une algèbre d'opérateurs sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$  en identifiant une "fonction"  $\theta \in L^\infty$  avec l'opérateur de multiplication  $M_\theta$  agissant sur  $L^2$  :

$$M_\theta f = \theta f.$$

On considérera donc sans vergogne que  $L^\infty$  est "contenu" dans  $\mathcal{B}(L^2)$ .

**2.4. L'algèbre  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  comme espace  $\mathcal{C}(K)$ .** Comme toute  $C^*$ -algèbre commutative,  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  "est un  $\mathcal{C}(K)$ " pour un certain espace topologique compact  $K$ . Le but de cette sous-section est de donner une description "concrète" de l'espace  $K$ . Le qualificatif peut certainement prêter à discussion : on va voir que  $K$  est l'espace des *ultrafiltres* de parties de  $\mathbb{N}$ , donc un objet tout de même assez... abstrait.

2.4.1. *Filtres et Ultrafiltres.*

**Définition 2.1.** Un **filtre sur**  $\mathbb{N}$  est une famille non vide  $\mathcal{F}$  de parties de  $\mathbb{N}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) tous les éléments de  $\mathcal{F}$  sont non vides ;
- (ii)  $\mathcal{F}$  est stable par intersections finies : si  $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$ , alors  $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{F}$  ;
- (iii)  $\mathcal{F}$  est clos par au dessus pour l'inclusion : si  $I \in \mathcal{F}$  et  $I' \supset I$ , alors  $I' \in \mathcal{F}$ .

Un **ultrafiltre sur**  $\mathbb{N}$  est un filtre  $\mathcal{U}$  maximal pour l'inclusion (le seul filtre contenant  $\mathcal{U}$  est  $\mathcal{U}$  lui-même).

Il est important de garder à l'esprit qu'un filtre est intuitivement une famille de "gros" ensembles : c'est ce que dit la propriété (iii). En particulier, un filtre sur  $\mathbb{N}$  contient toujours  $\mathbb{N}$ .

Il est tout aussi important de remarquer dès à présent qu'un filtre  $\mathcal{F}$  ne peut pas contenir deux ensembles disjoints, d'après (i) et (ii).

*Exemple 1.* L'ensemble des parties *cofinies* de  $\mathbb{N}$  est un filtre, qu'on appelle le **filtre de Fréchet** et qu'on notera  $\mathcal{F}_\infty$  :

$$\mathcal{F}_\infty = \{I \subseteq \mathbb{N}; \mathbb{N} \setminus I \text{ est fini}\}.$$

*Exemple 2.* Si on se donne un entier  $n \in \mathbb{N}$ , on vérifie sans difficulté que la famille de toutes les parties de  $\mathbb{N}$  contenant  $n$  est un ultrafiltre, qu'on notera  $\mathcal{U}_n$  :

$$\mathcal{U}_n = \{I \subseteq \mathbb{N}; I \ni n\}.$$

Les ultrafiltres de la forme  $\mathcal{U}_n$  sont qualifiés de **triviaux**.

*Remarque.* Une application immédiate du Lemme de Zorn montre que tout filtre  $\mathcal{F}$  est contenu dans un ultrafiltre. Il y a donc en particulier des ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet. En termes de cardinalité, il y en a même énormément, à savoir  $2^c$  (où  $c$  est la cardinalité du continu). Pourtant, les seuls ultrafiltres que l'on peut "exhiber" sans recours à une zornification sont les ultrafiltres triviaux, qui forment visiblement un ensemble dénombrable.

La plupart du temps, on utilise la maximalité via la

**Propriété caractéristique.** Un filtre  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{N}$  est un ultrafiltre si et seulement si il vérifie la propriété suivante : pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on a ou bien  $I \in \mathcal{U}$  ou bien  $\mathbb{N} \setminus I \in \mathcal{U}$ .

*Démonstration.* Pour démontrer l'implication "seulement si", supposons que  $\mathcal{U}$  soit un ultrafiltre et que  $I \subseteq \mathbb{N}$  vérifie  $I \notin \mathcal{U}$ . Il s'agit de voir que  $\mathbb{N} \setminus I \in \mathcal{U}$ , et il suffit pour cela de prouver que  $\mathbb{N} \setminus I$  contient un élément de  $\mathcal{U}$  puisque  $\mathcal{U}$  est un filtre. Autrement dit, on veut montrer qu'il doit exister  $I'_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $I \cap I'_0 = \emptyset$ . Si tel n'était pas le cas, on pourrait construire un filtre contenant à la fois  $I$  et  $\mathcal{U}$ , à savoir la famille de tous les ensembles  $J \subseteq \mathbb{N}$  contenant un ensemble de la forme  $I \cap I'$  où  $I' \in \mathcal{U}$ ; mais par maximalité de  $\mathcal{U}$ , un tel filtre n'existe pas.

Inversement, supposons que  $\mathcal{U}$  ne soit pas un ultrafiltre. Soit  $\mathcal{F}$  un filtre strictement plus gros que  $\mathcal{U}$ , et soit  $I \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est un filtre contenant  $I$ , il ne peut pas contenir  $\mathbb{N} \setminus I$ ; *a fortiori*  $\mathbb{N} \setminus I \notin \mathcal{U}$ , et donc  $\mathcal{U}$  ne contient ni  $I$  ni  $\mathbb{N} \setminus I$ .  $\square$

En utilisant la définition d'un filtre, on peut reformuler la propriété caractéristique d'au moins deux façons différentes :

$$\begin{aligned} \forall I_1, \dots, I_r \subseteq \mathbb{N} : (I_1 \cup \dots \cup I_r \in \mathcal{U}) &\implies (\exists j : I_j \in \mathcal{U}). \\ \forall I_1, \dots, I_r \subseteq \mathbb{N} : (I_1 \cup \dots \cup I_r = \mathbb{N}) &\implies (\exists j : I_j \in \mathcal{U}). \end{aligned}$$

La vérification du fait que chacune de ces deux propriétés caractérise les ultrafiltres est laissée en exercice. On pourra commencer par observer que la première propriété entraîne la seconde, qui entraîne la propriété caractéristique ; puis démontrer la dernière implication en raisonnant "par contraposée".

*Exercice 1.* Montrer que le filtre de Fréchet  $\mathcal{F}_\infty$  n'est pas un ultrafiltre.

*Exercice 2.* Montrer qu'un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  est non trivial si et seulement si il contient  $\mathcal{F}_\infty$ .

2.4.2. *Les filtres vus comme quantificateurs.* Si  $P(n)$  est une propriété dépendant de  $n \in \mathbb{N}$  et si  $\mathcal{F}$  est un filtre sur  $\mathbb{N}$ , on écrira " $\mathcal{F}n : P(n)$ " pour signifier que l'ensemble des  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant  $P(n)$  appartient à  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}n : P(n) \iff \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ est vraie}\} \in \mathcal{F}.$$

De cette façon, un filtre peut être considéré comme un *quantificateur*. On peut dire de façon pédante que  $\mathcal{F}$  est un quantificateur "de type universel", pour la raison suivante : si  $P(n)$  et  $Q(n)$  sont deux propriétés dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ , alors on a l'équivalence

$$\mathcal{F}n : (P(n) \text{ et } Q(n)) \iff (\mathcal{F}n : P(n)) \text{ et } (\mathcal{F}n : Q(n)).$$

C'est immédiat d'après les propriétés (ii) et (iii) de la définition d'un filtre.

Le quantificateur universel  $\forall$  correspond à  $\mathcal{F} = \{\mathbb{N}\}$ . Pour un filtre quelconque, on peut traduire " $\mathcal{F}n : P(n)$ " en français par : "pour ce que le filtre  $\mathcal{F}$  en sait, tous les  $n$  vérifient  $P(n)$ "; ou encore, en analogie avec la théorie de la mesure : "presque tous les  $n$  au sens de  $\mathcal{F}$  vérifient  $P(n)$ ". (L'analogie n'est pas délirante : il est facile de voir que si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, alors la "fonction d'ensembles"  $\mu$  définie par  $\mu(I) = 1$  si  $I \in \mathcal{U}$  et  $\mu(I) = 0$  si  $I \notin \mathcal{U}$  est effectivement une mesure sur  $\mathbb{N}$ ; mesure très particulière car elle ne prend que les valeurs 0 et 1.)

Par (iii), on a également l'implication

$$(\mathcal{F}n : P(n)) \text{ ou } (\mathcal{F}n : Q(n)) \implies \mathcal{F}n : (P(n) \text{ ou } Q(n)).$$

L'implication réciproque est fautive en générale : il n'est bien sûr pas vrai que l'énoncé " $\forall n : (P(n) \text{ ou } Q(n))$ " soit équivalent à " $(\forall n : P(n)) \text{ ou } (\forall n : Q(n))$ ". Cependant, la propriété caractéristique dit que pour les *ultrafiltres*, la symétrie entre le "et" et le "ou" est parfaite : si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, on a bien l'équivalence

$$\mathcal{U}n : (P(n) \text{ ou } Q(n)) \iff (\mathcal{U}n : P(n)) \text{ ou } (\mathcal{U}n : Q(n)).$$

Ainsi, les ultrafiltres peuvent être vus comme des quantificateurs qui sont à la fois "de type universel" et "de type existentiel".

Pour en finir avec ces considérations, on peut aussi noter que la propriété caractéristique dit que les ultrafiltres "commutent avec la négation" : si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, on a l'équivalence

$$\neg(\mathcal{U}n : P(n)) \iff (\mathcal{U}n : \neg P(n))$$

pour toute propriété  $P(n)$ , où  $\neg$  est le symbole usuel de négation.

### 2.4.3. Convergence le long d'un filtre.

**Définition 2.2.** Soit  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $\mathbb{N}$ . On dit qu'une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge le long de  $\mathcal{F}$**  s'il existe  $l \in \mathbb{C}$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \left( \mathcal{F}n : |a_n - l| < \varepsilon \right).$$

On peut en fait donner un sens à cette définition pour des suites vivant dans un espace topologique  $X$  quelconque au lieu de  $\mathbb{C}$  : cela s'écrit

$$\text{pour tout voisinage } V \text{ de } l \quad (\mathcal{F}n : a_n \in V).$$

*Remarque.* Il n'est pas difficile de vérifier qu'une suite de nombres complexes (ou plus généralement dans un espace topologique séparé) ne peut pas converger le long d'un filtre donné vers deux "limites" différentes (exercice). Si  $(a_n)$  converge vers  $l$  le long de  $\mathcal{F}$ , il est donc légitime d'écrire  $l = \mathcal{F}\text{-lim } a_n$ .

*Exercice.* Montrer que si une suite  $a = (a_n) \subseteq \mathbb{C}$  converge le long d'un filtre  $\mathcal{F}$ , alors  $|\mathcal{F}\text{-lim } a_n| \leq \|a\|_\infty$ .

*Exemple 1.* Une suite  $(a_n)$  converge le long du filtre de Fréchet  $\mathcal{F}_\infty$  si et seulement si elle converge au sens usuel, et on a alors  $\mathcal{F}_\infty\text{-lim } a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Exemple 2.* Si  $n_0 \in \mathbb{N}$ , alors toute suite  $(a_n)$  converge le long de l'ultrafiltre trivial  $\mathcal{U}_{n_0}$ , et on a  $\mathcal{U}_{n_0}\text{-lim } a_n = a_{n_0}$ .

Le lemme suivant montre à quoi servent les ultrafiltres : ils sont là pour faire converger les suites vivant dans un compact.

**Lemme 2.3.** Si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, alors toute suite  $(a_n)$  dans un espace topologique compact  $X$  converge le long de  $\mathcal{U}$ . En particulier, toute suite bornée  $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$  converge le long de  $\mathcal{U}$ .

*Démonstration.* Je vais commencer par donner une preuve un peu non-classique du cas particulier (suites de nombres complexes). Cette preuve me paraît très naturelle ; mais elle est plus longue que la preuve classique du cas général, et masque peut-être "la vraie nature des choses".

Notons  $E_{\mathcal{U}}$  l'ensemble de toutes les suites  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  admettant une limite le long de  $\mathcal{U}$ . Il s'agit de montrer que  $E_{\mathcal{U}} = \ell^\infty(\mathbb{N})$ .

On observe d'abord que  $E_{\mathcal{U}}$  contient toutes les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ; et que par conséquent  $E_{\mathcal{U}}$  est *dense* dans  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ . En effet, si  $a = (a_n)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , alors on a certainement

$$\mathcal{U}n : (a_n = \lambda_1 \text{ ou } \dots \text{ ou } a_n = \lambda_r).$$

Comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, il existe donc au moins un  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\mathcal{U}n : a_n = \lambda_j$  ; et par définition de la convergence le long d'un filtre, cela entraîne que  $(a_n)$  converge vers  $\lambda_j$  le long de  $\mathcal{U}$ .

Il est à peu près évident que  $E_{\mathcal{U}}$  est un sous-espace vectoriel de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  et que l'application  $a \mapsto \mathcal{U}\text{-lim } a_n$  est une forme linéaire sur  $E_{\mathcal{U}}$ . De plus, cette forme linéaire est *continue* car  $|\mathcal{U}\text{-lim } a_n| \leq \|a\|_\infty$ . Comme  $E_{\mathcal{U}}$  est dense, la forme linéaire  $a \mapsto \mathcal{U}\text{-lim } a_n$  se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  ; autrement dit, il existe une unique forme linéaire continue  $l_{\mathcal{U}} : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $l_{\mathcal{U}}(a) = \mathcal{U}\text{-lim } a_n$  pour  $a \in E_{\mathcal{U}}$ .

En utilisant la densité de  $E_{\mathcal{U}}$ , il n'est maintenant pas difficile de montrer que  $E_{\mathcal{U}} = \ell^\infty(\mathbb{N})$ ; plus précisément, que toute suite  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  converge vers  $l_{\mathcal{U}}(a)$  le long de  $\mathcal{U}$ . Les détails sont laissés en exercice.

Voici maintenant la preuve classique du cas général. Soit  $(a_n)$  une suite dans un espace topologique compact  $X$ , et supposons que  $(a_n)$  ne converge pas le long de  $\mathcal{U}$ . Alors, tout point  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $V_x$  tel qu'on n'ait pas  $\mathcal{U}n : (a_n \in V_x)$ . Par compacité, on peut donc trouver des ouverts  $V_1, \dots, V_r \subseteq X$  tels que  $V_1 \cup \dots \cup V_r = X$  et qu'aucun des énoncés  $\mathcal{U}n : (a_n \in V_i)$  ne soit vrai. Cependant, comme les  $V_i$  recouvrent  $X$ , on a certainement

$$\mathcal{U}n : \left( (a_n \in V_1) \text{ ou } \dots \text{ ou } (a_n \in V_r) \right),$$

et donc, comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre :

$$(\mathcal{U}n : (a_n \in V_1)) \text{ ou } \dots \text{ ou } (\mathcal{U}n : (a_n \in V_r));$$

ce qui contredit le choix des  $V_i$ . □

*Exercice 1.* Essayer d'adapter la preuve du cas particulier lorsque  $X$  est un compact métrisable.

*Exercice 2.* Montrer qu'une suite bornée  $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$  converge au sens usuel si et seulement si  $\mathcal{U}\text{-lim } a_n$  est la même pour tous les ultrafiltres non triviaux.

Il est temps de donner un nom à l'ensemble de tous les ultrafiltres sur  $\mathbb{N}$ . La notation officielle est  $\beta\mathbb{N}$  :

$$\beta\mathbb{N} = \{\text{ultrafiltres sur } \mathbb{N}\}.$$

Par le lemme précédent, on peut associer à toute suite  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  une fonction  $f_a : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , définie comme suit :

$$\forall \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : f_a(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-lim } a_n.$$

Si on se souvient que l'objectif de cette sous-section est d'arriver à une description "concrète" de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  comme espace  $\mathcal{C}(K)$ , on voit que l'on s'en rapproche : il reste juste à munir  $K := \beta\mathbb{N}$  d'une topologie convenable (*i.e.* telle que  $\beta\mathbb{N}$  soit compact et que toutes les  $f_a$  soient continues), et à vérifier que l'application  $a \mapsto f_a$  est un isomorphisme de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  sur  $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ .

2.4.4. *Topologie de  $\beta\mathbb{N}$ .* Pour tout ensemble  $I \subseteq \mathbb{N}$ , posons

$$\beta_I = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}; \mathcal{U} \ni I\}.$$

Par exemple, si  $I = \mathbb{N}$ , alors  $\beta_{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$ ; si  $I = \emptyset$ , alors  $\beta_{\emptyset} = \emptyset$ ; et si  $I$  est un singleton  $\{n\}$ , alors  $\beta_{\{n\}} = \{\mathcal{U}_n\}$ .

Comme tout filtre (donc *a fortiori* tout ultrafiltre) est stable par intersections finies, il est évident que si  $I, I' \subseteq \mathbb{N}$ , alors  $\beta_{I \cap I'} = \beta_I \cap \beta_{I'}$ . Par conséquent, les  $\beta_I$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$  forment une base pour une topologie sur  $\beta\mathbb{N}$ . Dans toute la suite, on munit  $\beta\mathbb{N}$  de cette topologie.

*Remarque 1.* Par la propriété caractéristique des ultrafiltres, on a  $\beta\mathbb{N} \setminus \beta_I = \beta_{\mathbb{N} \setminus I}$  pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$ , et  $\beta_{I \cup J} = \beta_I \cup \beta_J$  pour tous  $I, J \subseteq \mathbb{N}$ . En particulier, les  $\beta_I$  sont à la fois ouverts et fermés dans  $\beta\mathbb{N}$ .

*Remarque 2.* Soit  $\mathbf{i} : \mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$  l'application  $n \mapsto \mathcal{U}_n$ . L'application  $\mathbf{i}$  est visiblement injective, et elle est continue car la topologie de  $\mathbb{N}$  est discrète. De plus, comme  $\{\mathcal{U}_n\} = \beta_{\{n\}}$  est un ouvert de  $\beta\mathbb{N}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on voit que  $\mathbf{i}(\mathbb{N}) = \{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$  est un ouvert de  $\beta\mathbb{N}$  et que sa topologie est également discrète. Par conséquent, l'application  $\mathbf{i}^{-1} : \mathbf{i}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  est continue et  $\mathbf{i}$  est donc un homéomorphisme de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbf{i}(\mathbb{N})$ . Enfin,  $\mathbf{i}(\mathbb{N}) = \{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\beta\mathbb{N}$  : en effet, tout ouvert non vide de  $\beta\mathbb{N}$  contient un  $\beta_I$  avec  $I \neq \emptyset$ , et si on choisit n'importe quel  $n \in I$ , alors  $\mathcal{U}_n \in \beta_I$ . En résumé :  $\mathbb{N}$  s'identifie "canoniquement" à un ouvert dense de  $\beta\mathbb{N}$ . Dans toute la suite, on considérera  $\mathbb{N}$  comme une partie de  $\beta\mathbb{N}$  via l'identification  $n \leftrightarrow \mathcal{U}_n$ .

**Lemme 2.4.** *L'espace  $\beta\mathbb{N}$  est compact.*

*Démonstration.* Il faut d'abord vérifier que  $\beta\mathbb{N}$  est *séparé*, mais c'est facile : si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  sont deux points distincts de  $\beta\mathbb{N}$ , on peut trouver  $I \subseteq \mathbb{N}$  tel que  $I \in \mathcal{U}$  et  $I \notin \mathcal{U}'$ . Alors  $\beta_I$  et  $\beta\mathbb{N} \setminus \beta_I = \beta_{\mathbb{N} \setminus I}$  sont deux ouverts disjoints séparant  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$ .

Soit maintenant  $(\beta_{I_s})_{s \in S}$  un recouvrement de  $\beta\mathbb{N}$  par des ouverts de base : on veut en extraire un sous-recouvrement fini.

En posant  $J_s = \mathbb{N} \setminus I_s$ , on a  $\bigcap_{s \in S} \beta_{J_s} = \emptyset$  puisque  $\beta_{J_s} = \beta\mathbb{N} \setminus \beta_{I_s}$  pour tout  $s$ ; et il s'agit de montrer qu'il existe une partie finie  $F \subseteq S$  telle que  $\bigcap_{s \in F} \beta_{J_s} = \emptyset$ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors on a  $\bigcap_{s \in F} J_s \neq \emptyset$  pour tout ensemble fini  $F \subseteq S$ , car  $\beta_{\bigcap_{s \in F} J_s} = \bigcap_{s \in F} \beta_{J_s} \neq \emptyset$ . On en déduit qu'il existe un filtre  $\mathcal{F}$  contenant tous les  $J_s$ , à savoir la famille de tous les ensembles  $J \subseteq \mathbb{N}$  contenant un ensemble de la forme  $\bigcap_{s \in F} J_s$ . Soit alors  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  un ultrafiltre contenant  $\mathcal{F}$ . Par définition,  $\mathcal{U}$  contient tous les  $J_s$ , autrement dit  $\mathcal{U} \in \bigcap_{s \in S} \beta_{J_s}$ ; ce qui est peu compatible avec l'hypothèse  $\bigcap_{s \in S} \beta_{J_s} = \emptyset$ .  $\square$

*Remarque.* L'espace  $\beta\mathbb{N}$  s'appelle le **compactifié de Stone-Čech** de  $\mathbb{N}$ .

*Exercice 1.* Montrer que  $\beta\mathbb{N}$  est totalement discontinu, *i.e.* les seules parties connexes de  $\beta\mathbb{N}$  sont  $\emptyset$  et les singletons.

*Exercice 2.* Montrer que si  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ , alors  $\mathcal{U} = \mathcal{U}\text{-lim } n$  dans  $\beta\mathbb{N}$ .

*Exercice 3.* Montrer que dans  $\beta\mathbb{N}$ , toute suite convergente est constante à partir d'un certain rang. (En particulier, bien que  $\mathbb{N}$  soit dense dans  $\beta\mathbb{N}$ , aucun point de  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  n'est limite d'une *suite* de points de  $\mathbb{N}$ ; donc  $\beta\mathbb{N}$  est hautement *non métrisable*.)

**2.4.5. Conclusion.** On peut maintenant montrer que  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  s'identifie canoniquement à l'espace  $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ .

Rappelons que si  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ , on note  $f_a : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$f_a(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-lim } a_n.$$

Pour  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  fixé, la fonction  $f_a$  est *continue* sur  $\beta\mathbb{N}$ . Soit en effet  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  quelconque. Pour montrer que  $f_a$  est continue au point  $\mathcal{U}$ , il suffit de montrer que pour tout voisinage *fermé*  $W$  de  $f_a(\mathcal{U})$  dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble  $f_a^{-1}(W)$  est un voisinage de  $\mathcal{U}$  dans  $\beta\mathbb{N}$ ; autrement dit, qu'il existe un ensemble  $I \subseteq \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{U} \in \beta_I$  et  $f_a(\beta_I) \subseteq W$ . Assez naturellement, on pose  $I := \{n \in \mathbb{N}; a_n \in W\}$ . Comme  $f_a(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-lim } a_n$ , on a  $I \in \mathcal{U}$  par définition de la limite selon un filtre, *i.e.*  $\mathcal{U} \in \beta_I$ . Soit  $\mathcal{U}' \in \beta_I$  quelconque, et supposons que  $f_a(\mathcal{U}') \notin W$ . Alors  $\mathbb{C} \setminus W$  est un voisinage (ouvert!) de  $f_a(\mathcal{U}')$ , donc  $J := \{n \in \mathbb{N}; a_n \notin W\} \in \mathcal{U}'$ . Comme on a aussi  $I \in \mathcal{U}'$ , on obtient donc une contradiction puisque  $J = \mathbb{N} \setminus I$  et qu'un filtre ne peut pas contenir deux ensembles disjoints.

Si  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ , alors, par définition de  $f_a$ , on a  $f(\mathcal{U}_n) = a_n$  pour tout ultrafiltre trivial  $\mathcal{U}_n$ . Autrement dit (en considérant  $\mathbb{N}$  comme une partie de  $\beta\mathbb{N}$ ), la fonction  $f_a$  est un prolongement de  $a$  (considérée comme fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$ ). Comme  $\mathbb{N}$  est dense dans  $\beta\mathbb{N}$ , on peut donc reformuler la définition de  $f_a$  comme suit :  $f_a$  est l'unique prolongement continu de  $a$  à  $\beta\mathbb{N}$ .

Il est à peu près évident que l'application  $a \mapsto f_a$  est un  $*$ -homomorphisme de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  dans  $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ . De plus, on a  $\|f_a\|_\infty = \|a\|_\infty$  pour tout  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ , car  $(f_a)|_{\mathbb{N}} = a$  et  $\mathbb{N}$  est dense dans  $\beta\mathbb{N}$ . Ainsi, l'application  $a \mapsto f_a$  est un isomorphisme isométrique de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  dans  $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ .

Pour conclure, il reste simplement à montrer que l'isomorphisme qu'on vient de définir est surjectif, *i.e.* que toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$  est une  $f_a$ . Mais ceci est évident : il suffit de poser  $a = f|_{\mathbb{N}}$  et d'observer que ...  $f$  est l'unique prolongement continu de  $f|_{\mathbb{N}}$  à  $\beta\mathbb{N}$ .

*Exercice 1.* Montrer que  $\beta\mathbb{N}$  vérifie la “propriété universelle” suivante : toute application  $\theta : \mathbb{N} \rightarrow X$  de  $\mathbb{N}$  dans un espace topologique compact  $X$  se prolonge de manière unique en une application continue  $\Theta : \beta\mathbb{N} \rightarrow X$ .

*Exercice 2.* Montrer que la propriété de l'Exercice 1 caractérise (à homéomorphisme près)  $\beta\mathbb{N}$  parmi les espaces topologiques compacts contenant  $\mathbb{N}$ .

**2.5. Éléments positifs.** On rappelle que si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre, on note  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  le sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{A}$  constitué par les éléments auto-adjoints :

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{a \in \mathcal{A}; a^* = a\}.$$

On sait que si  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , alors  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Définition 2.5.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre. Un élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  est dit **positif** si  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  et  $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ . On note  $\mathcal{A}^+$  l'ensemble des éléments positifs de  $\mathcal{A}$ .

La proposition suivante donne deux reformulations utiles de la positivité.

**Proposition 2.6.** Pour  $a \in \mathcal{A}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $a$  est positif;
- (ii) il existe  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  tel que  $a = b^2$ ;
- (iii) il existe  $b \in \mathcal{A}$  tel que  $a = b^*b$ .

L'équivalence de (i) et (ii) est claire “par calcul fonctionnel” : pour (i)  $\implies$  (ii), il suffit de poser  $b = \sqrt{a}$ ; et pour (ii)  $\implies$  (i), d'appliquer le Théorème de l'image spectrale. Il est également évident que (ii) entraîne (iii). En revanche, il n'est *pas du tout* évident que (iii) entraîne (ii); voir [5] ou [23]. On pourrait invoquer le Théorème de Gelfand-Naimark (il est facile de voir que (iii) entraîne (i) dans  $\mathcal{B}(H)$ , *cf.* l'Exemple 2 ci-dessous), mais ce serait un cercle vicieux : le fait que tout élément de la forme  $b^*b$  soit positif est justement un des points clés dans la preuve de Gelfand-Naimark.

*Exemple 1.* Dans le cas où  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$  pour un espace compact  $K$ , une fonction  $f \in \mathcal{C}(K)$  est un élément positif de  $\mathcal{C}(K)$  si et seulement ... elle est positive, *i.e.* elle ne prend que des valeurs réelles positives. C'est évident puisque les éléments auto-adjoints de  $\mathcal{C}(K)$  sont par définition les fonctions à valeurs réelles et que  $\sigma(f) = f(K)$  pour toute  $f \in \mathcal{C}(K)$ .

*Exemple 2.* Dans le cas où  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$  pour un certain espace de Hilbert  $H$ , un opérateur  $A \in \mathcal{B}(H)$  est positif si et seulement si  $\langle Au, u \rangle \geq 0$  pour tout  $u \in H$ . La partie “seulement si” est claire en écrivant  $A = B^*B$  (ce qui est possible par (iii)); et la réciproque est un bon exercice (il faut commencer par observer qu’un opérateur  $A$  vérifiant  $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$  pour tout  $u \in H$  est nécessairement auto-adjoint, car  $H$  est un espace de Hilbert *complexe*).

Le lemme suivant est très simple mais aussi très important.

**Lemme 2.7.** *Pour tout  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  vérifiant  $\|a\| \leq 1$ , on a l’équivalence suivante :  $a$  est positif si et seulement si  $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$ .*

*Démonstration.* On sait que le spectre de  $a$  est le même dans  $\mathcal{A}$  et dans  $C^*(a)$ . Par calcul fonctionnel, on peut donc supposer que  $\mathcal{A}$  est de la forme  $\mathcal{C}(K)$ . Il s’agit alors de montrer qu’une fonction  $f \in \mathcal{C}(K)$  à valeurs réelles et vérifiant  $\|f\|_{\infty} \leq 1$  est positive si et seulement si  $\|\mathbf{1} - f\|_{\infty} \leq 1$ ; ce qui est évident : un nombre réel  $\lambda \in [-1, 1]$  est effectivement positif si et seulement si  $|1 - \lambda| \leq 1$ .  $\square$

**Corollaire 2.8.** *L’ensemble des éléments positifs de  $\mathcal{A}$  est un **cône convexe**. Autrement dit,  $\mathcal{A}^+$  est stable par addition et multiplication par les scalaires positifs. De plus, on a  $\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que si  $a \in \mathcal{A}^+$ , alors  $\lambda a \in \mathcal{A}^+$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . Sachant cela, il suffit, pour montrer la stabilité par addition, de prouver que si  $a, b \in \mathcal{A}^+$  vérifient  $\|a\|, \|b\| \leq 1$ , alors  $\frac{a+b}{2} \in \mathcal{A}^+$ . Mais ceci est évident par le lemme puisque  $\|\frac{a+b}{2}\| \leq 1$  et  $\|\mathbf{1} - \frac{a+b}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|\mathbf{1} - a\| + \|\mathbf{1} - b\|) \leq 1$ . Enfin, si  $a \in \mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+)$ , alors  $\sigma(a) = \{0\}$ , et donc  $a = 0$  par calcul fonctionnel car  $a$  est auto-adjoint.  $\square$

Le Corollaire 2.8 permet de munir  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  d’une structure d’**espace vectoriel ordonné**, c’est-à-dire d’une relation d’ordre  $\leq$  compatible avec la structure d’espace vectoriel au sens où  $a + b \geq 0$  si  $a, b \geq 0$  et  $\lambda a \geq 0$  si  $a \geq 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  : il suffit de déclarer que

$$a \leq b \quad \text{signifie que} \quad b - a \in \mathcal{A}^+.$$

La transitivité de la relation  $\leq$  provient de la stabilité de  $\mathcal{A}^+$  par addition, et l’antisymétrie ( $(a \geq b \text{ et } b \geq a) \implies (a = b)$ ) vient du fait que  $\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}$ . Bien entendu, l’ordre n’est pas total!

Il y a également une propriété supplémentaire : tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$a = a^+ - a^-,$$

où  $a^+$  et  $a^-$  sont positifs et  $a^+a^- = 0 = a^-a^+$ . Pour l’existence, on se ramène par calcul fonctionnel au cas où  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$ ; et il suffit alors de poser  $a^+ = \max(a, 0)$  et  $a^- = -\min(a, 0)$ . Pour l’unicité, supposons que  $a = a_1 - a_2$  avec  $a_1, a_2$  positifs et  $a_1a_2 = 0 = a_2a_1$ . En développant  $(a_1 - a_2)^2$  et  $(a_1 + a_2)^2$ , on constate que  $(a_1 + a_2)^2 = a^2$ . Comme  $a_1 + a_2$  est positif, on en déduit par calcul fonctionnel que  $a_1 + a_2 = \sqrt{a^2} = |a|$ . Par conséquent,  $a_1 = \frac{a+|a|}{2} = a^+$  et  $a_2 = \frac{a-|a|}{2} = a^-$ .

Un autre fait dont on fera très souvent usage est le suivant, dont la preuve est laissée en exercice (calcul fonctionnel...) : si  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  et  $M \in \mathbb{R}^+$ , alors

$$\|a\| \leq M \quad \text{si et seulement si} \quad -M\mathbf{1} \leq a \leq M\mathbf{1}.$$

Il faut également se souvenir que si  $a \in \mathcal{A}^+$ , alors  $b^*ab \geq 0$  pour tout  $b \in \mathcal{A}$  : en écrivant  $a = x^*x$ , on a en effet  $b^*ab = b^*x^*xb = (xb)^*(xb)$ . On en déduit que pour  $x, y \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  et  $b \in \mathcal{A}$  :

$$x \leq y \implies b^*xb \leq b^*yb.$$

**2.5.1. Projections.** Si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre, une **projection** de  $\mathcal{A}$  est un élément auto-adjoint  $p$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $p^2 = p$ . Une projection  $p$  est toujours un élément positif de  $\mathcal{A}$  puisque  $p = p^2 = p^*p$ . Dans  $\mathcal{B}(H)$ , on voit que les “projections” sont les projections *orthogonales*.

On manipulera très souvent les projection **diagonales** de  $\mathcal{B}(\ell^2)$  : si  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , la projection diagonale  $P_I$  associée à  $I$  est la projection orthogonale de  $\ell^2$  sur  $E_I := [e_n; n \in I]$ , où  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la base canonique de  $\ell^2$ .

Toutes les propriétés “ensemblistes” relatives aux parties de  $\mathbb{N}$  peuvent se lire sur les projections diagonales associées. Par exemple, on a  $P_I P_J = P_{I \cap J}$  pour tous  $I, J \subseteq \mathbb{N}$ ; donc  $I \subseteq J$  si et seulement si  $P_I P_J = P_I = P_J P_I$ , et  $I \cap J = \emptyset$  si et seulement si  $P_I P_J = 0 = P_J P_I$ .

Les opérateurs de la forme  $P_I T P_I$ , où  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , joueront un rôle très important dans la suite. Il est bon de dire deux mots sur leur signification géométrique.

Si  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , alors l’opérateur  $T_I := P_I T|_{E_I} \in \mathcal{B}(E_I)$  est “la partie de  $T$  habitant sur  $E_I$ ” ; dans le jargon de la théorie des opérateurs, on dit : la **compression** de  $T$  au sous-espace  $E_I$ . Si on note  $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  la matrice de  $T$  relativement à la base canonique  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors la matrice de  $T_I$  dans la base  $(e_n)_{n \in I}$  est la matrice “extraite” de  $(a_{ij})$  obtenue en ne considérant que des indices  $i, j \in I$ .

Cela étant précisé, on voit que  $P_I T P_I$  est simplement l’opérateur  $T_I$  “considéré comme opérateur sur  $\ell^2$ ” (et non sur  $E_I$ ).

On utilisera très souvent le fait suivant : si  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , alors  $\|P_I T P_I\|$  est une fonction *croissante* de  $I$ . Autrement dit :

$$J \subseteq I \implies \|P_J T P_J\| \leq \|P_I T P_I\|.$$

C’est évident car  $P_J T P_J = P_J (P_I T P_I) P_J$  et  $\|P_J\| = 1$ .

**2.6. Formes linéaires positives ; états.** Dans tout ce qui suit, la lettre  $\mathcal{A}$  désigne une  $C^*$ -algèbre.

**Définition 2.9.** (1) Soit  $E$  un espace vectoriel réel ordonné. Une forme linéaire  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **positive** si on a  $l(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ .

(2) Une forme linéaire  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *positive* si sa restriction à  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  est positive au sens de (1).

(3) Un **état** sur  $\mathcal{A}$  est une forme linéaire positive  $\varphi$  telle que  $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ .

*Remarque.* Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{A}$ , alors  $\varphi(a) = \varphi(a^+) - \varphi(a^-)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , donc  $\varphi(a)$  est réel si  $\varphi(a^+)$  et  $\varphi(a^-)$  le sont. Par conséquent,  $\varphi$  est positive si et seulement si  $\varphi(a) \in \mathbb{R}^+$  pour tout  $a \in \mathcal{A}^+$  : il est inutile de supposer *a priori* que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  est à valeurs réelles (ce qui était implicite dans la définition précédente). De manière équivalente,  $\varphi$  est positive si et seulement si

$$\varphi(b^*b) \geq 0 \quad \text{pour tout } b \in \mathcal{A}.$$

Le lemme suivant sera constamment utilisé.

**Lemme 2.10.** *Si  $\varphi$  est une forme linéaire positive sur  $\mathcal{A}$ , alors  $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ , et  $\varphi$  vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si  $x, y \in \mathcal{A}$ , alors*

$$|\varphi(y^*x)| \leq \varphi(x^*x)^{1/2} \varphi(y^*y)^{1/2}.$$

*Démonstration.* Le premier point est clair en écrivant  $x = a + ib$  avec  $a, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Pour Cauchy-Schwarz, il suffit de remarquer que, par définition, la formule  $B(x, y) := \varphi(y^*x)$  définit une forme hermitienne positive sur  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ .  $\square$

**Corollaire 2.11.** *Si  $\varphi$  est une forme linéaire positive sur  $\mathcal{A}$ , alors  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1})$ .*

*Démonstration.* Si  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , alors  $-\|a\| \mathbf{1} \leq a \leq \|a\| \mathbf{1}$ , donc  $-\|a\| \varphi(\mathbf{1}) \leq \varphi(a) \leq \|a\| \varphi(\mathbf{1})$  par positivité, autrement dit  $|\varphi(a)| \leq \varphi(\mathbf{1}) \|a\|$ . Pour  $x \in \mathcal{A}$  quelconque, on a donc

$$|\varphi(x^*x)| \leq \varphi(\mathbf{1}) \|x^*x\| = \varphi(\mathbf{1}) \|x\|^2.$$

Comme  $|\varphi(x)| \leq \varphi(x^*x)^{1/2} \varphi(\mathbf{1})^{1/2}$  par Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|\varphi(x)| \leq \varphi(\mathbf{1}) \|x\|$$

pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . Donc  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| \leq \varphi(\mathbf{1})$ . Enfin,  $\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1}) \|\mathbf{1}\|$ , donc  $\|\varphi\| \geq \varphi(\mathbf{1})$  et au total  $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1})$ .  $\square$

*Exercice.* Montrer à l'aide du Lemme 2.7 qu'une forme linéaire continue  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$  est positive si et seulement si  $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1})$ .

**2.7. États purs.** Dans toute la suite, on notera  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  l'ensemble des états sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . (La lettre “S” est un anglicisme.) Par le Corollaire 2.11,  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est une partie de  $\mathcal{A}^*$  (le dual de l'espace de Banach  $\mathcal{A}$ ), plus précisément de la boule unité  $B_{\mathcal{A}^*}$  de  $\mathcal{A}^*$ . Il est clair par définition que  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est une partie convexe de  $\mathcal{A}^*$ , et que  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est également préfaiblement fermée, i.e. fermée pour la topologie  $*$ -faible de  $\mathcal{A}^*$ . Comme  $\mathbf{S}(\mathcal{A}) \subseteq B_{\mathcal{A}^*}$ , on peut donc conclure que

$\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est une partie convexe et préfaiblement compacte de  $B_{\mathcal{A}^*}$ .

D'une façon générale, étant donné un convexe  $C$  (vivant dans un certain espace vectoriel), il est toujours naturel de s'intéresser à ses **points extrémaux**. On rappelle qu'un point  $c \in C$  est un point extrémal de  $C$  s'il ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe non triviale de deux points de  $C$ . Autrement dit : si  $c_1, c_2 \in C$  et si  $c = (1-s)c_1 + sc_2$  avec  $0 < s < 1$ , alors  $c_1 = c = c_2$ ; ou de manière plus géométrique : si le “segment ouvert”  $]c_1, c_2[ := \{(1-s)c_1 + sc_2; 0 < s < 1\}$  contient  $c$ , alors  $c_1 = c = c_2$ . Il revient au même de dire que si  $c_1, c_2 \in C$  et si le segment fermé  $[c_1, c_2]$  contient  $c$ , alors  $c_1 = c$  ou  $c_2 = c$ .

**Définition 2.12.** *On dit qu'un état  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$  est **pur** si c'est un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ . On note  $\mathbf{S}_p(\mathcal{A})$  l'ensemble des états purs sur  $\mathcal{A}$ .*

*Remarque.* A ce stade, rien ne dit que  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est non vide (on le démontrera plus tard, cf. le Corollaire 3.4). Cela découle a posteriori du Théorème de Gelfand-Naimark car il y a profusion d'états sur  $\mathcal{B}(H)$  (cf. plus bas); mais bien entendu, la preuve de Gelfand-Naimark utilise de manière essentielle le fait qu'il y a toujours “beaucoup” d'états sur une  $C^*$ -algèbre arbitraire. Quoi qu'il en soit, le Théorème de Krein-Milman permet d'affirmer dès maintenant que  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est l'enveloppe convexe préfaiblement fermée de  $\mathbf{S}_p(\mathcal{A})$ .

*Exemple 1.* Si  $K$  est un espace topologique compact, le Théorème de représentation de Riesz permet d'identifier les formes linéaires positives sur  $\mathcal{C}(K)$  avec les *mesures positives* sur  $K$ . (Petite subtilité : comme  $K$  n'est *a priori* pas métrisable, les mesures sont des “mesures de Baire”, *i.e.* définies sur la tribu engendrée par les fonctions continues.) Un état sur  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$  “est” donc une mesure positive  $\mu$  sur  $K$  telle que  $\mu(K) = 1$ , c'est-à-dire une **mesure de probabilité** sur  $K$ . Il n'est pas difficile de vérifier que les points extrémaux de l'ensemble des mesures de probabilité sur  $K$  sont exactement les **masses de Dirac**  $\delta_t$ ,  $t \in K$ . Ainsi, les états purs de  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$  sont les masses de Dirac, ou si on préfère, les évaluations  $f \mapsto f(t)$ .

*Exemple 1'.* L'exemple précédent peut se reformuler “abstraitement” comme suit : si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre *commutative*, alors les états purs de  $\mathcal{A}$  sont exactement les caractères de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . C'est “évident” puisque la transformation de Gelfand identifie  $\mathcal{A}$  avec  $\mathcal{C}(K)$ , où  $K$  est l'espace des caractères de  $\mathcal{A}$ .

*Exemple 2.* Soit  $H$  un espace de Hilbert. Si  $v \in H$  est un vecteur unitaire ( $\|v\| = 1$ ), alors la formule

$$\Phi_v(T) = \langle Tv, v \rangle$$

définit un état pur sur  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ . On dit que  $\Phi_v$  est l'**état vectoriel** associé à  $v$ .

*Démonstration.* La forme linéaire  $\Phi_v$  est positive car

$$\Phi_v(B^*B) = \langle B^*Bv, v \rangle = \|Bv\|^2$$

pour tout  $B \in \mathcal{B}(H)$ ; et on a  $\Phi_v(Id) = \|v\|^2 = 1$ . Donc  $\Phi_v$  est un état sur  $\mathcal{B}(H)$ .

Le fait que  $\Phi_v$  soit pur est nettement moins évident. La “bonne” démonstration utilise le langage de la théorie des **représentations**. On commence par montrer qu'à tout état  $\varphi$  sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , on peut associer canoniquement une représentation cyclique  $\pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$  de  $\mathcal{A}$  comme algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\varphi$ , avec vecteur cyclique  $v_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ , de sorte que  $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)v_\varphi, v_\varphi \rangle$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  (c'est la “construction GNS”). On montre ensuite que l'état  $\varphi$  est pur si et seulement si la représentation  $\pi_\varphi$  est **irréductible**, ce qui signifie qu'il n'existe pas de sous-espace fermé non trivial  $E \subseteq \mathcal{H}_\varphi$  invariant par tous les  $\pi_\varphi(a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Dans le cas qui nous occupe, la représentation associée à  $\Phi_v$  est simplement la représentation “identique”  $id : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  et  $v_{\Phi_v} = v$ . Cette représentation est visiblement irréductible (il n'y a pas de sous-espace non trivial  $E \subseteq H$  invariant par tous les opérateurs sur  $H$ ), donc  $\Phi_v$  est pur.

Comme on n'a pas du tout parlé de représentations, on va maintenant démontrer “directement” que  $\Phi_v$  est un état pur. Les guillemets sont de rigueur : on va en gros recopier la preuve générale dans ce cas particulier, mais en prenant soin de masquer toute référence à la notion de représentation. Une troisième (!) démonstration est indiquée juste après le Lemme 3.12.

Supposons qu'on puisse écrire  $\Phi_v = (1 - s)\varphi_1 + s\varphi_2$ , où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des états sur  $\mathcal{B}(H)$  et  $0 < s < 1$ . Il s'agit de montrer que  $\varphi_1 = \Phi_v = \varphi_2$ ; et il suffit bien entendu de se concentrer sur  $\varphi_1$ . On va en fait montrer que les formes hermitiennes associées à  $\varphi_1$  et  $\Phi_v$  sont égales, *i.e.* qu'on a

$$\varphi_1(T^*S) = \Phi_v(T^*S)$$

pour tous  $S, T \in \mathcal{B}(H)$ . Pour conclure que  $\varphi_1 = \Phi_v$ , il suffira alors de prendre  $T = Id$ .

**Fait 1.** On a  $H = \{Rv; R \in \mathcal{B}(H)\}$ .

*Démonstration.* C'est clair puisque  $v \neq 0$  (exercice).  $\square$

**Fait 2.** Soit  $\varphi$  une forme linéaire positive sur  $\mathcal{B}(H)$  "absolument continue par rapport à  $\Phi_v$ ", i.e. vérifiant la propriété suivante : pour tout  $A \in \mathcal{B}(H)^+$  tel que  $\Phi_v(A) = 0$ , on a  $\varphi(A) = 0$ . Si  $S, T \in \mathcal{B}(H)$ , alors  $\varphi(T^*S)$  ne dépend que du couple de vecteurs  $(Sv, Tv)$ .

*Démonstration.* Si  $S, T, S', T' \in \mathcal{B}(H)$ , alors

$$\varphi(T^*S) - \varphi(T'^*S') = \varphi((T - T')^*S) + \varphi(T'^*(S - S')).$$

Si on veut établir que  $\varphi(T^*S) = \varphi(T'^*S')$ , il suffit donc de montrer que  $\varphi((T - T')^*S) = 0 = \varphi(T'^*(S - S'))$ ; et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut se contenter de vérifier que

$$\varphi((T - T')^*(T - T')) = 0 = \varphi((S - S')^*(S - S')).$$

Comme l'opérateur  $(T - T')^*(T - T')$  est positif et que  $\varphi$  est absolument continue par rapport à  $\Phi_v$ , tout revient donc à montrer que si  $S, S', T, T' \in \mathcal{B}(H)$  vérifient  $Sv = S'v$  et  $Tv = T'v$ , alors

$$\Phi_v((T - T')^*(T - T')) = 0 = \Phi_v((S - S')^*(S - S')).$$

Mais ceci est évident car  $\Phi_v((T - T')^*(T - T')) = \|Tv - T'v\|^2$  et  $\Phi_v((S - S')^*(S - S')) = \|Sv - S'v\|^2$ .  $\square$

Comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des formes linéaires positives et  $0 < s < 1$ , il est clair que l'état  $\varphi_1$  est absolument continu par rapport à  $\Phi_v = (1 - s)\varphi_1 + s\varphi_2$  : on a même

$$\varphi_1(A) \leq \frac{1}{1 - s} \Phi_v(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(H)^+.$$

D'après les Faits 1 et 2, on peut donc définir sans ambiguïté une forme hermitienne positive  $B$  sur  $H \times H$  en posant

$$B(x, y) = \varphi_1(T^*S) \quad \text{pour } (x, y) = (Sv, Tv) \in H \times H.$$

La forme  $B$  est *continue* car on a

$$\begin{aligned} |B(Sv, Tv)| &\leq \varphi_1(S^*S)^{1/2} \varphi_1(T^*T)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{1 - s} \Phi_v(S^*S)^{1/2} \Phi_v(T^*T)^{1/2} \\ &= \frac{1}{1 - s} \|Sv\| \|Tv\|. \end{aligned}$$

Il existe donc un opérateur  $A \in \mathcal{B}(H)$  tel que  $B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$  pour tous  $x, y \in H$ , autrement dit

$$\forall S, T \in \mathcal{B}(H) : \varphi_1(T^*S) = \langle Sv, ATv \rangle.$$

**Fait 3.** L'opérateur  $A$  commute avec  $\mathcal{B}(H)$ .

*Démonstration.* Soit  $R \in \mathcal{B}(H)$  quelconque. Si  $S, T \in \mathcal{B}(H)$ , on a d'une part

$$\langle Sv, (AR)Tv \rangle = \langle Sv, A(RT)v \rangle = \varphi_1((RT)^*S),$$

et d'autre part

$$\langle Sv, (RA)Tv \rangle = \langle R^*Sv, ATv \rangle = \varphi_1(T^*(R^*S)).$$

Donc  $\langle Sv, (AR)Tv \rangle = \langle Sv, (RA)Tv \rangle$  pour tous  $S, T \in \mathcal{B}(H)$ , et donc  $AR = RA$  d'après le Fait 1.  $\square$

D'après le Fait 3,  $A$  est un opérateur *scalaire* :  $A = \lambda Id$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Par définition de  $A$ , on a ainsi

$$\forall S, T \in \mathcal{B}(H) : \varphi_1(T^*S) = \bar{\lambda} \langle Sv, Tv \rangle.$$

En prenant  $S = Id = T$ , on voit que  $\lambda = 1$  (car  $\varphi_1(Id) = 1$  et  $\|v\| = 1$ ). On obtient donc

$$\varphi_1(T^*S) = \langle Sv, Tv \rangle = \langle T^*Sv, v \rangle = \Phi_v(T^*S)$$

pour tous  $S, T \in \mathcal{B}(H)$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

### 3. LE PROBLÈME DE KADISON-SINGER

Dans cette section, on continue d'avancer calmement. L'objectif est d'énoncer le Problème de Kadison-Singer seulement à la fin, après avoir expliqué le cadre général dans lequel il se situe. Le lecteur/la lectrice pressé(e) peut sans dommage se contenter de lire la Sous-section 3.1 et la Définition 3.5, puis passer directement à la Sous-section 3.4.

**3.1. Prolongement des formes linéaires positives.** Le résultat suivant est une version du Théorème de Hahn-Banach pour les espaces vectoriels ordonnés (on peut d'ailleurs en déduire le Théorème de Hahn-Banach "classique", cf. [11]). Ce "Théorème de Hahn-Banach positif" sera très important pour nous.

**Théorème 3.1.** *Soit  $E$  un espace vectoriel (réel) ordonné, et soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose que  $V$  est "dominant", au sens où tout élément de  $E$  est majoré par un élément de  $V$ ; en symboles :  $\forall x \in E \exists v \in V : x \leq v$ . Soit également  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire positive. Pour  $a \in E$ , on pose*

$$\bar{l}(a) := \inf \{l(v); v \in V, v \geq a\} \quad \text{et} \quad \underline{l}(a) := \sup \{l(v); v \in V, v \leq a\}.$$

*Alors, si  $a \in E$  est donné et si  $\lambda \in [\underline{l}(a), \bar{l}(a)]$ , il existe une forme linéaire positive  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $L|_V = l$  et  $L(a) = \lambda$ .*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $\bar{l}(a)$  et  $\underline{l}(a)$  sont des nombres réels bien définis car le sous-espace  $V$  est dominant.

Fixons  $a \in E$  et  $\lambda \in [\underline{l}(a), \bar{l}(a)]$ . On peut évidemment supposer que  $a \notin V$ . La preuve est essentiellement la même que celle du Théorème de Hahn-Banach "classique", donc on va aller assez vite.

Supposons d'abord que  $E = V \oplus \mathbb{R}a$ . Dans ce cas, il existe une unique forme linéaire  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  prolongeant  $l$  et vérifiant  $L(a) = \lambda$  : elle est donnée par la formule

$$L(v + ta) = l(v) + \lambda t \quad , \quad (v, t) \in V \times \mathbb{R}.$$

Il s'agit de voir que  $L$  est positive, *i.e.* qu'on a

$$l(v) + \lambda t \geq 0 \quad \text{si} \quad v + ta \geq 0.$$

Par homogénéité, il suffit de considérer les cas  $t = 0$  et  $t = \pm 1$ . Le cas  $t = 0$  est clair puisque  $l$  est supposée positive; et les cas  $t = \pm 1$  se traitent en utilisant l'hypothèse faite sur  $\lambda$ . Les détails sont laissés en exercice.

Quand on ne suppose plus  $E = V \oplus \mathbb{R}a$ , on obtient le résultat souhaité par zornification.  $\square$

**Corollaire 3.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\mathcal{B}$  une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$ . Si  $\varphi$  est un état sur  $\mathcal{B}$ , alors  $\varphi$  peut se prolonger en un état sur  $\mathcal{A}$ . Si  $\varphi$  est pur, il peut se prolonger en un état pur.*

*Démonstration.* On applique le théorème avec  $E = \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ,  $V = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  et  $l = \varphi|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ . Le sous-espace  $V$  est bien dominant car il contient  $\mathbb{R} \mathbf{1}$  et  $x \leq \|x\| \mathbf{1}$  pour tout  $x \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . On peut donc trouver une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $L$  sur  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  qui coïncide avec  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . On obtient alors une forme  $\mathbb{C}$ -linéaire positive  $\Phi$  sur  $\mathcal{A}$  en posant  $\Phi(x) = L(a) + iL(b)$  pour  $x = a + ib \in \mathcal{A}$ ; et  $\Phi$  est un état car  $\Phi(\mathbf{1}) = L(\mathbf{1}) = l(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1}) = 1$ .

Pour tout état  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}$ , notons  $\mathbf{S}_{\varphi}$  l'ensemble de tous les états  $\Phi$  sur  $\mathcal{A}$  prolongeant  $\varphi$  :

$$\mathbf{S}_{\varphi} = \{\Phi \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) : \Phi|_{\mathcal{B}} = \varphi\}.$$

Il est évident que  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est une partie convexe et préfaiblement compacte de  $\mathcal{A}^*$ . De plus, on vient de voir que  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est *non vide*. Par le Théorème de Krein-Milman,  $\mathbf{S}_{\varphi}$  possède donc au moins un point extrémal. Pour conclure, il suffit maintenant de démontrer le fait suivant :

**Fait.** Si  $\varphi$  est un état pur de  $\mathcal{B}$ , alors tout point extrémal de  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est un état pur de  $\mathcal{A}$ .

*Preuve du Fait.* Il s'agit de voir que tout point extrémal du “petit” compact convexe  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est en fait un point extrémal du “gros” compact convexe  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ . Les arguments sont les suivants : en utilisant le fait que  $\varphi$  est un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ , on vérifie que  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est une **partie extrémale** de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ , ce qui signifie que si  $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$  sont tels que le segment ouvert  $] \Phi_1, \Phi_2 [ = \{(1-s)\Phi_1 + s\Phi_2; 0 < s < 1\}$  rencontre  $\mathbf{S}_{\varphi}$ , alors  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  appartiennent à  $\mathbf{S}_{\varphi}$ ; ensuite, on montre grâce à l'extrémalité de  $\mathbf{S}_{\varphi}$  que tout point extrémal de  $\mathbf{S}_{\varphi}$  est un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ . Les détails sont laissés en exercice.  $\square$

La preuve du corollaire est maintenant terminée.  $\square$

**Corollaire 3.3.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre. Pour tout élément normal  $a$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un état pur  $\Phi$  sur  $\mathcal{A}$  tel que  $|\Phi(a)| = \|a\|$ .

*Démonstration.* Le résultat est évident lorsque  $\mathcal{A}$  est une algèbre  $\mathcal{C}(K)$  : si  $a \in \mathcal{C}(K)$ , il existe un point  $t \in K$  tel que  $|a(t)| = \|a\|_{\infty}$ , autrement dit un état pur  $\Phi = \delta_t$  qui fait le travail.

Dans le cas général, on applique ce qui précède à  $\mathcal{B} = C^*(a)$ , la sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$  engendrée par  $a$ , qui est commutative et donc “est” un  $\mathcal{C}(K)$ . Il existe ainsi un état pur  $\varphi$  sur  $C^*(a)$  tel que  $|\varphi(a)| = \|a\|$ ; et cet état se prolonge en un état pur  $\Phi$  de  $\mathcal{A}$  par le Corollaire 3.2.  $\square$

**Corollaire 3.4.** Si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre, alors les états purs de  $\mathcal{A}$  séparent les points de  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , on peut trouver un état pur  $\Phi$  tel que  $\Phi(x) \neq 0$ . En écrivant  $x = a + ib$ , on a par exemple  $a \neq 0$ . Par le corollaire précédent, il existe un état pur  $\Phi$  tel que  $\Phi(a) \neq 0$ ; et comme  $\Phi(a) = \operatorname{Re}(\Phi(x))$ , on a *a fortiori*  $\Phi(x) \neq 0$ .  $\square$

*Exercice.* Démontrer le Corollaire 3.2 sans passer par le Théorème 3.1, en utilisant le fait qu'une forme linéaire continue  $\Phi$  sur  $\mathcal{A}$  est positive si et seulement si  $\|\Phi\| = \Phi(\mathbf{1})$ .

**3.2. Propriété d'extension unique.** Dans ce qui suit,  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre et  $\mathcal{B}$  est une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$ . Pour éviter des formulations trop pesantes, on conviendra que si  $\varphi$  est un état sur  $\mathcal{B}$ , l'expression **prolongement de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}$**  signifie “état sur  $\mathcal{A}$  prolongeant  $\varphi$ ”.

Le Théorème 3.1 ne dit absolument rien sur l'éventuelle *unicité* du prolongement d'un état  $\varphi \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$  à  $\mathcal{A}$ . Cela “justifie” la définition suivante.

**Définition 3.5.** *On dit que la paire  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  possède la **propriété d'extension unique** si tout état pur  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{A}$ .*

Il est naturel de se demander pourquoi on impose à l'état  $\varphi$  d'être *pur* dans cette définition : il existe après tout des cas où n'importe quel état sur  $\mathcal{B}$  (pur ou non) admet un unique prolongement ; par exemple si  $\mathcal{B} = \mathcal{A}$  (!). Je n'ai pas vraiment de réponse définitive à cette question... mais l'exemple suivant est assez instructif.

**Exemple 3.6.** Soit  $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) = M_2(\mathbb{C})$  et soit  $\mathcal{B} := \mathcal{D}_2(\mathbb{C})$ , la sous-algèbre de  $M_2(\mathbb{C})$  constituée par les matrices diagonales. Si  $\varphi$  est un état *non pur* sur  $\mathcal{D}_2(\mathbb{C})$ , alors  $\varphi$  admet plus d'un prolongement à  $M_2(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur  $\{0, 1\}$ , il y a exactement deux états purs sur  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  : ce sont les états  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  définis par

$$\varphi_j(D) = \langle De_j, e_j \rangle,$$

où  $(e_0, e_1)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^2$ . Par le théorème de Krein-Milman (!), un état quelconque sur  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  est donc de la forme

$$\varphi_s(D) := (1 - s)\varphi_0 + s\varphi_1,$$

où  $s \in [0, 1]$  ; et  $\varphi$  n'est *pas pur* si et seulement si  $0 < s < 1$ .

Dans la suite, on fixe un tel état non pur  $\varphi = \varphi_s$ . Par ailleurs, on note  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  les prolongements "canoniques" de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  :

$$\Phi_j(M) = \langle Me_j, e_j \rangle \quad \text{pour } M \in M_2(\mathbb{C}).$$

Pour toute matrice  $B \in M_2(\mathbb{C})$ , on notera  $\Phi_B$  la forme linéaire sur  $M_2(\mathbb{C})$  définie par

$$\Phi_B(M) := (1 - s)\Phi_0(B^*MB) + s\Phi_1(B^*MB).$$

**Fait.** Soit  $B \in M_2(\mathbb{C})$ ,

$$B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Alors  $\Phi_B$  est un état prolongeant  $\varphi = \varphi_s$  si et seulement si

$$s|c|^2 = (1 - s)(1 - |a|^2) \quad \text{et} \quad (1 - s)|b|^2 = s(1 - |d|^2).$$

*Preuve du Fait.* La forme linéaire  $\Phi_B$  étant visiblement positive (car  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  le sont), il s'agit seulement de voir à quelles conditions elle prolonge  $\varphi$ .

Si  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale quelconque, on a d'une part

$$\begin{aligned} \Phi_B(D) &= (1 - s)\langle DBe_0, Be_0 \rangle + s\langle DBe_1, Be_1 \rangle \\ &= (1 - s)(\alpha|a|^2 + \beta|b|^2) + s(\alpha|c|^2 + \beta|d|^2), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\varphi(D) = (1 - s)\alpha + s\beta.$$

On en déduit immédiatement le Fait, en identifiant les coefficients devant  $\alpha$  et  $\beta$  dans les deux expressions.  $\square$

Pour achever la preuve, il suffit maintenant de montrer qu'on peut trouver deux matrices  $B$  et  $B'$  vérifiant les conditions du Fait et telles que  $\Phi_B \neq \Phi_{B'}$ .

On va prendre  $B := Id$ , de sorte que  $\Phi_B = (1 - s)\Phi_0 + s\Phi_1$ , et par exemple

$$B' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d > 0;$$

ce qui est visiblement possible.

Si  $M$  est la matrice "antidiagonale"  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors un calcul direct donne

$$\Phi_B(M) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{B'}(M) = 2[(1 - s)ab + s cd] > 0.$$

Donc  $\Phi_B \neq \Phi_{B'}$ , comme attendu. □

*Remarque.* On a un résultat analogue en toute dimension : si  $\varphi$  est un état non pur sur  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 1$ , alors  $\varphi$  admet plus d'un prolongement à  $M_d(\mathbb{C})$ . La preuve est essentiellement la même.

*Exercice.* Soit  $\mathcal{A} := \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \subseteq M_3(\mathbb{C})$ , et soit  $\mathcal{B} := \mathbb{C} \oplus \mathcal{D}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \subseteq \mathcal{A}$ . Montrer que l'état (non pur)  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}$  défini par  $\varphi(b_1 \oplus b_2 \oplus b_3) := \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{A}$ . (Merci à Andreas Thom pour cet exercice.)

Revenons maintenant à la situation générale, *i.e.* une paire de  $C^*$ -algèbres  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  avec  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

En notant  $\mathbf{S}_\varphi$  l'ensemble de tous les prolongements à  $\mathcal{A}$  d'un état  $\varphi \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$ , on a vu dans la preuve du Corollaire 3.2 que si l'état  $\varphi$  est pur, alors tout point extrémal de  $\mathbf{S}_\varphi$  est un état pur de  $\mathcal{A}$ . D'après le Théorème de Krein-Milman, on en déduit

- que si un état pur  $\varphi$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{A}$ , alors ce prolongement est nécessairement pur ;
- que dans la définition de la propriété d'extension unique, on peut remplacer "unique prolongement" par "unique prolongement *pur*".

On ne dira pas grand chose sur la propriété d'extension unique en général ; mais les deux remarques qui suivent méritent cependant d'être faites.

**Remarque 3.7.** Supposons que la paire  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  possède la propriété d'extension unique, et que la sous-algèbre  $\mathcal{B}$  soit commutative. Alors il existe une et une seule *projection positive* de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{B}$  ; autrement dit, un unique opérateur  $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $\mathbb{E}(b) = b$  pour tout  $b \in \mathcal{B}$  et  $\mathbb{E}(a) \geq 0$  pour tout  $a \geq 0$ . De plus,  $\mathbb{E}$  est une **espérance conditionnelle**, ce qui signifie qu'en plus d'être une projection positive,  $\mathbb{E}$  est de norme 1 et vérifie

$$\forall a \in \mathcal{A} \forall b \in \mathcal{B} : \mathbb{E}(ab) = \mathbb{E}(a)b \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(ba) = b\mathbb{E}(a).$$

Si  $\varphi$  est un état pur sur  $\mathcal{B}$ , son unique prolongement à  $\mathcal{A}$  est

$$\Phi = \varphi \circ \mathbb{E}.$$

*Démonstration.* (i) Démontrons d'abord l'unicité, qui n'utilise pas la commutativité de  $\mathcal{B}$ . Il est très facile de voir que si  $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est une projection positive et si  $\varphi$  est un état sur  $\mathcal{B}$ , alors  $\Phi := \varphi \circ \mathbb{E}$  est un prolongement de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}$ . Donc, si  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  sont deux projections positives de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{B}$ , alors  $\varphi \circ \mathbb{E}_1 = \varphi \circ \mathbb{E}_2$  pour tout état pur  $\varphi$  sur  $\mathcal{B}$  ; et comme les états purs séparent les points de  $\mathcal{B}$ , on en déduit  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$ .

(ii) Démontrons maintenant l'existence d'une projection positive de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{B}$ . Comme  $\mathcal{B}$  est commutative, c'est un  $\mathcal{C}(K)$ . Pour  $t \in K$ , notons  $\Phi_t$  l'unique prolongement à  $\mathcal{A}$  de la masse de Dirac  $\delta_t$ . Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on définit alors une fonction  $\mathbb{E}a : K \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\mathbb{E}a(t) = \Phi_t(a).$$

**Fait 1.**  $\mathbb{E}a$  est une fonction *continue*, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

*Preuve du Fait 1.* Pour montrer que  $\mathbb{E}a$  est continue il suffit (exercice) de montrer que *son graphe  $G$  est compact*. Mais c'est à peu près clair : en écrivant

$$\begin{aligned} G &= \{(t, \lambda) \in K \times \mathbb{C}; \Phi_t(a) = \lambda\} \\ &= \{(t, \lambda) \in K \times \overline{D}(0, \|a\|); \exists \Phi \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) : \Phi|_{\mathcal{B}} = \delta_t \text{ et } \Phi(a) = \lambda\}, \end{aligned}$$

on voit que  $G$  est la projection sur  $K \times \mathbb{C}$  de l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{(\Phi, t, \lambda) \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \times K \times \overline{D}(0, \|a\|); \Phi|_{\mathcal{B}} = \delta_t \text{ et } \Phi(a) = \lambda\},$$

qui est visiblement compact.  $\square$

On a donc maintenant sous la main une application  $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(K)$ . Il est clair que  $\mathbb{E}$  est linéaire et qu'on a  $\mathbb{E}(b) = b$  pour tout  $b \in \mathcal{C}(K) = \mathcal{B}$ ; donc  $\mathbb{E}$  est une projection. Il est également évident que  $\mathbb{E}$  est positive. De plus, on a  $\|\mathbb{E}a\| = \sup_{t \in K} |\Phi_t(a)| \leq \|a\|$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , donc  $\mathbb{E}$  est continue avec  $\|\mathbb{E}\| \leq 1$ ; et en fait  $\|\mathbb{E}\| = 1$  car toute projection est de norme au moins 1.

(iii) Montrons pour finir que  $\mathbb{E}$  est une espérance conditionnelle. La preuve repose sur le fait suivant, qui n'utilise pas la commutativité de  $\mathcal{B}$ .

**Fait 2.** Soit  $\Phi$  un état sur  $\mathcal{A}$ . Si  $\Phi|_{\mathcal{B}}$  est **multiplicatif** (i.e.  $\Phi(bb') = \Phi(b)\Phi(b')$  pour tous  $b, b' \in \mathcal{B}$ ), alors

$$\forall a \in \mathcal{A} \forall b \in \mathcal{B} : \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ba).$$

*Preuve du Fait 2.* Si  $b \in \mathcal{B}$ , alors

$$\Phi\left((b - \Phi(b)\mathbf{1})^*(b - \Phi(b)\mathbf{1})\right) = \Phi(b^*b) - \overline{\Phi(b)}\Phi(b) - \Phi(b^*)\Phi(b) + |\Phi(b)|^2 = 0,$$

car  $\Phi|_{\mathcal{B}}$  est multiplicatif et  $\Phi(b^*) = \overline{\Phi(b)}$ . Par Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\Phi\left(a(b - \Phi(b)\mathbf{1})\right) = 0$$

pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , autrement dit  $\Phi(ab) = \Phi(b)\Phi(a)$ . On montre de même que  $\Phi(ba) = \Phi(a)\Phi(b)$ .  $\square$

En appliquant le Fait 2 à  $\Phi_t$ ,  $t \in K$  (dont la restriction  $\delta_t$  à  $\mathcal{B} = \mathcal{C}(K)$  est bien multiplicative) on voit que si  $a \in \mathcal{A}$  et  $b \in \mathcal{B} = \mathcal{C}(K)$ , alors

$$\mathbb{E}(ab)(t) = \Phi_t(ab) = \Phi_t(a)\Phi_t(b) = \Phi_t(a)b(t) = ((\mathbb{E}a)b)(t)$$

pour tout  $t \in K$ ; et de même  $\mathbb{E}(ba)(t) = (b\mathbb{E}a)(t)$ . Donc  $\mathbb{E}$  est une espérance conditionnelle.

La dernière partie de la remarque est évidente car on a déjà observé que  $\varphi \circ \mathbb{E}$  est un prolongement de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Remarque 3.8.** Supposons que la paire  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  possède la propriété d'extension unique, et que la "petite" algèbre  $\mathcal{B}$  soit *commutative*. Alors  $\mathcal{B}$  est une sous- $C^*$ -algèbre **maximale abélienne** de  $\mathcal{A}$  : il n'existe pas de sous- $C^*$ -algèbre commutative  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  contenant strictement  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* Cela revient à montrer que si  $\mathcal{A}$  est commutative, alors  $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ . Par Gelfand-Naimark, on peut supposer que  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$  pour un certain espace topologique  $K$ .

Supposons que  $\mathcal{B} \neq \mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$ . Alors  $\mathcal{B}$  ne sépare pas les points de  $K$ , d'après le Théorème de Stone-Weierstrass ; soient donc  $t_1 \neq t_2$  dans  $K$  tels que  $b(t_1) = b(t_2)$  pour toute fonction  $b \in \mathcal{B}$ .

Soit  $\varphi$  l'état sur  $\mathcal{B}$  défini par

$$\varphi(b) = b(t_1) = b(t_2).$$

Par définition, l'état  $\varphi$  est multiplicatif ; autrement dit,  $\varphi$  est un caractère de la  $C^*$ -algèbre commutative  $\mathcal{B}$ , et donc un état pur de  $\mathcal{B}$ . Ainsi, on a trouvé un état pur de  $\mathcal{B}$  qui admet deux prolongements distincts à  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$ , à savoir les masses de Dirac  $\delta_{t_1}$  et  $\delta_{t_2}$  ; ce qui contredit la propriété d'extension unique.  $\square$

Un exemple “très important” de sous-algèbre maximale abélienne est le suivant :

**Exemple 3.9.** Si  $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$  est un espace mesuré  $\sigma$ -fini, alors l'algèbre  $L^\infty(\mu) \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mu))$  est une sous-algèbre maximale abélienne de  $\mathcal{B}(L^2)$ .

*Démonstration.* La preuve est plus transparente si on suppose que la mesure  $\mu$  est finie, ce qui revient à dire que  $\mathbf{1} \in L^2(\mu)$ .

Soit  $\mathcal{A}'$  une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{B}(L^2)$  contenant  $L^\infty$  (pas forcément une  $C^*$ -algèbre), et soit  $T \in \mathcal{A}'$  quelconque. On a

$$\forall \theta \in L^\infty : TM_\theta = M_\theta T.$$

Soit  $\theta_0 := T(\mathbf{1}) \in L^2$ . Alors

$$T(\theta) = TM_\theta(\mathbf{1}) = M_\theta T(\mathbf{1}) = \theta_0 \theta$$

pour toute  $\theta \in L^\infty$ . Comme  $L^\infty$  est dense dans  $L^2$ , on en déduit facilement qu'on a en fait  $T(f) = \theta_0 f$  pour toute  $f \in L^2$  (utiliser le fait qu'une suite convergeant dans  $L^2$  a une sous-suite qui converge presque partout). Comme  $T$  est un opérateur borné, cela entraîne que  $\theta_0 \in L^\infty$  et  $T = M_{\theta_0}$ . Ainsi, “ $T \in L^\infty$ ”.

Si la mesure  $\mu$  est seulement  $\sigma$ -finie, on imite la preuve précédente en choisissant une fonction  $f_0 \in L^2(\mu)$  strictement positive en tout point de  $\Omega$ , et en posant  $\theta_0 := \frac{T(f_0)}{f_0}$ . On trouve alors  $T(u) = \theta_0 u$  pour toute  $u \in L^2$  de la forme  $u = \theta f_0$  avec  $\theta \in L^\infty$ , ce qui suffit pour conclure.  $\square$

*Remarque.* On a en fait montré que si un opérateur  $T \in \mathcal{B}(L^2)$  commute avec tous les  $M_\theta$  pour  $\theta$  appartenant à une partie de  $L^\infty$  dense dans  $L^2$ , alors  $T \in L^\infty$ .

**3.3. Le cas “continu”** ( $L^\infty, \mathcal{B}(L^2)$ ). Dans cette sous-section, on considère le cas de la paire  $(L^\infty, \mathcal{B}(L^2))$ , où  $L^2$  est l'espace  $L^2(0, 1)$ . Ce cas est qualifié de “continu” car la mesure de Lebesgue sur  $(0, 1)$  est continue, *i.e.* ne charge pas les points. Le résultat suivant est dû à Kadison et Singer [32].

**Proposition 3.10.** *Il existe plus d'une projection positive de  $\mathcal{B}(L^2)$  sur  $L^\infty$ . Par conséquent, la paire  $(L^\infty, \mathcal{B}(L^2))$  ne possède pas la propriété d'extension unique.*

*Démonstration.* Il est “bien connu” qu'en tant qu'espace mesuré,  $(0, 1)$  muni de la mesure de Lebesgue est isomorphe à

$$G = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$$

muni de sa mesure de probabilité produit canonique  $m$  (voir par exemple [33, 15.B et 17.F]). Il suffit donc de montrer qu'il existe plus d'une projection positive de  $\mathcal{B}(L^2(G, m))$  sur  $L^\infty(G, m)$ .

L'avantage de considérer  $G$  plutôt que  $(0, 1)$  vient du fait que  $G$  est un *groupe abélien compact* (le produit étant la multiplication terme à terme), et que  $m$  est sa mesure de Haar. On va donc pouvoir faire un peu d'analyse harmonique, avec des calculs assez limpides du fait de la structure très particulière de  $G$ . (Dans [32], les mêmes calculs sont menés sur le cercle  $\mathbb{T}$ , ce qui rend les choses moins "nettes" car  $\mathbb{T}$  est en réalité un groupe plus compliqué que  $G$ .)

Dans ce qui suit, on notera  $\{-1, 1\}^{<\mathbb{N}}$  l'ensemble de toutes les suites finies de  $\pm 1$ , la suite vide  $\emptyset$  étant autorisée. La *longueur* d'une suite  $t \in \{-1, 1\}^{<\mathbb{N}}$  sera notée  $|t|$ . Ainsi  $|\emptyset| = 0$ , et  $|t| = N$  si  $t = (t_1, \dots, t_N)$  avec  $N \geq 1$ .

Pour  $t = (t_1, \dots, t_N) \in \{-1, 1\}^{<\mathbb{N}}$ , on pose

$$V_t = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in G; x_i = t_i \text{ pour } i = 1, \dots, N\}.$$

Si  $t \in \{-1, 1\}^{<\mathbb{N}}$ , on note  $M_t \in \mathcal{B}(L^2(G))$  l'opérateur de multiplication par la fonction  $\mathbf{1}_{V_t}$  :

$$M_t = M_{\mathbf{1}_{V_t}}.$$

En tant qu'opérateur de multiplication par une indicatrice,  $M_t$  est une projection orthogonale. De plus, si on fixe  $N \in \mathbb{N}$  alors, comme les  $V_t$ ,  $|t| = N$  forment une partition de  $G$ , les  $M_t$ ,  $|t| = N$  forment ce qu'on appelle une **décomposition orthogonale de l'identité** :  $M_t M_{t'} = 0 = M_{t'} M_t$  si  $t \neq t'$  et  $\sum_t M_t = \mathbf{1}$ .

Pour  $N \in \mathbb{N}$  on définit un opérateur  $\mathbb{E}_N : \mathcal{B}(L^2) \rightarrow \mathcal{B}(L^2)$  par

$$\mathbb{E}_N T = \sum_{|t|=N} M_t T M_t.$$

Si  $T \in \mathcal{B}(L^2)$ , les opérateurs  $M_t T M_t$ ,  $|t| = N$  vivent sur des sous-espaces de  $L^2$  deux à deux orthogonaux. On a donc

$$\|\mathbb{E}_N(T)\| = \left\| \sum_{|t|=N} M_t T M_t \right\| = \max_{|t|=N} \|M_t T M_t\|;$$

et en particulier :  $\|\mathbb{E}_N T\| \leq \|T\|$ .

De plus,  $\mathbb{E}_N$  est un opérateur positif, i.e  $\mathbb{E}_N T \geq 0$  si  $T \geq 0$ . En effet, si  $T = A^* A$  alors

$$\mathbb{E}_N T = \sum_{|t|=N} M_t A^* A M_t = \sum_{|t|=N} (A M_t)^* (A M_t) \geq 0.$$

Enfin, on voit que

$$\mathbb{E}_N T = T \quad \text{pour tout } T = M_\theta \in L^\infty.$$

En effet, on a  $M_t M_\theta M_t = M_t M_\theta$  pour tout  $t$  car  $M_t$  est une projection qui commute avec  $M_\theta$ , donc  $\mathbb{E}_N M_\theta = \sum_{|t|=N} M_t M_\theta = M_\theta$  car  $\sum_{|t|=N} M_t = \mathbf{1}$ .

**Fait 1.** Si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , alors, pour tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(L^2)$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{U}} T := \mathcal{U}\text{-lim } \mathbb{E}_N T$$

existe pour la **topologie faible des opérateurs** sur  $\mathcal{B}(L^2)$ . Si de plus  $\mathcal{U}$  est non trivial, alors  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T \in L^\infty$  pour tout  $T \in \mathcal{B}(L^2)$ , et l'application  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}} : \mathcal{B}(L^2) \rightarrow L^\infty$  est une projection positive de norme 1 de  $\mathcal{B}(L^2)$  sur  $L^\infty$ .

*Preuve du Fait 1.* Fixons l'ultrafiltre  $\mathcal{U}$ , que l'on peut évidemment supposer d'emblée non trivial. Rappelons aussi la définition de la topologie faible des opérateurs : une "suite généralisée"  $(A_i)$  converge vers  $A \in \mathcal{B}(L^2)$  pour cette topologie si et seulement si  $A_i u \rightarrow Au$  faiblement pour tout  $u \in L^2$ .

On a vu que si  $T \in \mathcal{B}(L^2)$ , alors  $\|\mathbb{E}_N T\| \leq \|T\|$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . Comme la boule  $\overline{B}(0, \|T\|) \subseteq \mathcal{B}(L^2)$  est compacte pour la topologie faible des opérateurs, la première partie du Fait est donc claire. De plus, ce qui a été dit sur les  $\mathbb{E}_N$  montre que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}$  est un opérateur positif et qu'on a  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T = T$  pour tout  $T = M_\theta \in L^\infty$ .

Pour conclure, il reste à montrer que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}$  envoie  $\mathcal{B}(L^2)$  dans  $L^\infty$  ; on fixe donc  $T \in \mathcal{B}(L^2)$  quelconque, et on cherche à montrer que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T \in L^\infty$ .

Soit  $\Gamma$  le **groupe dual** de  $G = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ , autrement dit le groupe des homomorphismes continus  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{T}$  (on dit encore : les **caractères** du groupe  $G$ ). Pour montrer que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T$  est de la forme  $M_\theta$ , il suffit de vérifier que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T$  commute avec tous les opérateurs  $M_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . En effet,  $T$  commutera alors avec  $M_p$  pour tout polynôme trigonométrique  $p$ , d'où le résultat par densité des polynômes trigonométriques dans  $L^2(G)$  (cf. la remarque juste après l'exemple 3.9).

Le groupe  $\Gamma$  s'identifie "canoniquement" à FIN, l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$  : à tout  $I \in \text{FIN}$ , on associe le caractère  $\gamma_I \in \Gamma$  défini par

$$\gamma_I(x) = \prod_{i \in I} x_i \quad \text{pour } x = (x_i) \in G = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}};$$

et inversement, tout caractère  $\gamma \in \Gamma$  est de ce type, pour un unique  $I \in \text{FIN}$ . Par convention, un "produit vide" est déclaré égal à 1, de sorte que  $\gamma_\emptyset = \mathbf{1}$ .

Fixons un caractère  $\gamma = \gamma_I \in \Gamma$ , et montrons que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T$  commute avec  $M_\gamma$ .

Si  $N \geq \max(I)$ , alors  $I \subseteq [1, N]$  et donc  $\gamma(x) = \prod_{i \in I} x_i$  est *constant* sur chaque ensemble  $V_t$ ,  $|t| = N$  :

$$\gamma(x) = c_t \quad \text{pour tout } x \in V_t .$$

Écrit différemment : on a  $\gamma \mathbf{1}_{V_t} = c_t \mathbf{1}_{V_t}$ . Par conséquent, si  $|t| = N \geq \max(I)$ , alors

$$M_\gamma M_t = c_t M_t = M_t M_\gamma .$$

Pour tout entier  $N \geq \max(I)$ , on a donc

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}_N T) M_\gamma &= \sum_{|t|=N} M_t T M_t M_\gamma \\ &= \sum_{|t|=N} c_t M_t T M_t \\ &= \sum_{|t|=N} M_\gamma M_t T M_t = M_\gamma (\mathbb{E}_N T) . \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre *non trivial*, on en déduit en "faisant tendre  $N$  vers l'infini le long de  $\mathcal{U}$ " qu'on a bien  $(\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T) M_\gamma = M_\gamma (\mathbb{E}_{\mathcal{U}}T)$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .  $\square$

Pour achever la preuve de la proposition, il suffit maintenant de montrer qu'on peut trouver deux ultrafiltres non triviaux  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  tels que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}_1} \neq \mathbb{E}_{\mathcal{U}_2}$ . Cela va découler du Fait 2 ci-dessous.

Pour tout sous-ensemble  $\Lambda$  de  $\Gamma$ , notons  $P_\Lambda$  la projection orthogonale sur  $[e_\gamma; \gamma \in \Lambda]$ , où  $e_\gamma$  désigne le caractère  $\gamma$  considéré comme élément de  $L^2(G)$ .

**Fait 2.** On peut trouver  $\Lambda \subseteq \Gamma$  tel que  $\langle \mathbb{E}_N P_\Lambda(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{L^2}$  n'a pas de limite quand  $N \rightarrow \infty$ .

*Preuve du Fait 2.* Pour tout  $\Lambda \subseteq \Gamma$  et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\langle \mathbb{E}_N P_\Lambda(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{L^2} = \sum_{|t|=N} \langle P_\Lambda(\mathbf{1}_{V_t}), \mathbf{1}_{V_t} \rangle_{L^2} = \sum_{|t|=N} \|P_\Lambda(\mathbf{1}_{V_t})\|^2;$$

et donc, d'après la formule de Parseval :

$$(3.1) \quad \langle \mathbb{E}_N P_\Lambda(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{L^2} = \sum_{|t|=N} \sum_{\gamma \in \Lambda} |\widehat{\mathbf{1}_{V_t}}(\gamma)|^2.$$

De plus, pour tout  $I \in \text{FIN}$  et pour  $t = (t_1, \dots, t_N) \in \{-1, 1\}^N$  donné, on a

$$\widehat{\mathbf{1}_{V_t}}(\gamma_I) = \int_{V_t} \prod_{i \in I} x_i dx = \prod_{i \in I \cap [1, N]} t_i \times \int_{V_t} \prod_{i \in I \setminus [1, N]} x_i dx,$$

en convenant toujours qu'un produit vide est égal à 1.

Comme  $|t| = N$ , le deuxième facteur du produit apparaissant dans le membre de droite est égal à  $\prod_{i \in I \setminus [1, N]} \int_{V_t} x_i dx$ , qui vaut 0 si  $I \setminus [1, N] \neq \emptyset$ , et  $m(V_t) = 2^{-N}$  si  $I \setminus [1, N] = \emptyset$ . On en déduit

$$|\widehat{\mathbf{1}_{V_t}}(\gamma_I)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } I \setminus [1, N] \neq \emptyset, \\ 2^{-2N} & \text{si } I \subseteq [1, N]. \end{cases}$$

Si on revient maintenant à (3.1) et si on écrit  $\Lambda = \{\gamma_{I_j}; j \in \mathbb{N}\}$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E}_N P_\Lambda(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{L^2} &= \sum_{|t|=N} \sum_{\{j; I_j \subseteq [1, N]\}} 2^{-2N} \\ &= 2^{-N} \times \#\{j; I_j \subseteq [1, N]\}; \end{aligned}$$

et il est clair qu'on peut choisir la suite  $(I_j) \subseteq \text{FIN}$  de sorte que cette expression n'ait pas de limite quand  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

La démonstration est maintenant terminée, car si  $\Lambda$  est choisi comme dans le Fait 2, on peut trouver deux ultrafiltres non triviaux  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  tels que  $\mathbb{E}_{\mathcal{U}_1} P_\Lambda(\mathbf{1}) \neq \mathbb{E}_{\mathcal{U}_2} P_\Lambda(\mathbf{1})$  (cf. l'Exercice 2 juste après la Définition 2.2).  $\square$

**3.4. Le cas "discret"  $(\ell^\infty, \mathcal{B}(\ell^2))$  : Kadison-Singer.** On considère maintenant le cas de la paire  $(\ell^\infty, \mathcal{B}(\ell^2))$ , où  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  et  $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ . Ce cas est qualifié de "discret" car la mesure sous-jacente (la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ ) est purement discrète.

Dans toute la suite, on notera  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base canonique de  $\ell^2$ .

Si  $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ , l'opérateur de multiplication  $M_\theta \in \mathcal{B}(\ell^2)$  se notera plutôt  $D_\theta$ . C'est l'opérateur **diagonal** tel que

$$D_\theta e_n = \theta_n e_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L'ensemble de tous les opérateurs diagonaux sur  $\ell^2$  se notera  $\mathcal{D}(\ell^2)$ . Ainsi,

$$\mathcal{D}(\ell^2) = \ell^\infty \quad \text{vue comme sous-algèbre de } \mathcal{B}(\ell^2).$$

Pour tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , on notera  $\mathbb{D}(T)$  l'opérateur diagonal de même diagonale que  $T$  :

$$\mathbb{D}(T)e_n = \langle T e_n, e_n \rangle e_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il est à peu près évident que  $\mathbb{D} : \mathcal{B}(\ell^2) \rightarrow \mathcal{D}(\ell^2)$  est une espérance conditionnelle, *i.e.* une projection positive de norme 1 telle que  $\mathbb{D}(AD) = \mathbb{D}(A)D = D\mathbb{D}(A) = \mathbb{D}(DA)$  si  $D$  est diagonal, pour tout  $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ .

On rappelle que pour tout ensemble  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on note  $[e_n; n \in I]$  ou  $E_I$  le sous-espace fermé de  $\ell^2$  engendré par les  $e_n$  pour  $n \in I$ , et  $P_I$  la “projection diagonale” associée, *i.e.* la projection orthogonale de  $\ell^2$  sur  $[e_n; n \in I]$ .

Par définition de  $\mathbb{D}$ , on voit que

$$\mathbb{D}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\{n\}} T P_{\{n\}}$$

pour tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , où la série converge pour la **topologie forte des opérateurs**. Cela signifie que si on note  $S_n$  les sommes partielles de la série, alors  $S_n x$  tend vers  $\mathbb{D}(T)x$  en norme pour tout  $x \in \ell^2$ .

Le résultat suivant, dû à Kadison et Singer [32], montre que la situation dans le cas “discret” est très différente de celle du cas “continu”.

**Proposition 3.11.** *La “projection canonique”  $\mathbb{D} : \mathcal{B}(\ell^2) \rightarrow \mathcal{D}(\ell^2)$  est la seule projection positive de  $\mathcal{B}(\ell^2)$  sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$ .*

*Démonstration.* On utilise le fait suivant, qui re-servira ultérieurement.

**Fait.** Soit  $\Phi$  un état sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . Si  $p \in \mathcal{A}$  vérifie  $\Phi(p) = 1 = \|p\|$ , alors

$$\Phi(ap) = \Phi(a) = \Phi(pa) \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

*Preuve du Fait.* Comme  $\|p^*p\| = \|p\|^2 = 1$  et  $\Phi(p) = 1 = \Phi(p^*)$ , on a

$$\Phi((\mathbf{1} - p)^*(\mathbf{1} - p)) = \Phi(\mathbf{1}) - \Phi(p) - \Phi(p^*) + \Phi(p^*p) \leq -1 + \|p^*p\| \leq 0,$$

donc  $\Phi((\mathbf{1} - p)^*(\mathbf{1} - p)) = 0$  car on a aussi  $\Phi((\mathbf{1} - p)^*(\mathbf{1} - p)) \geq 0$  par positivité de  $\Phi$ . Par Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\Phi(a(\mathbf{1} - p)) = 0$$

pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , *i.e.*  $\Phi(ap) = \Phi(a)$ . On montre de même que  $\Phi(pa) = \Phi(a)$ .  $\square$

Soit maintenant  $\mathbb{E} : \mathcal{B}(\ell^2) \rightarrow \mathcal{D}(\ell^2)$  une projection positive. Pour montrer que  $\mathbb{E} = \mathbb{D}$ , il faut vérifier que si  $T \in \mathcal{B}(H)$ , alors  $\langle (\mathbb{E}T)e_n, e_n \rangle = \langle Te_n, e_n \rangle$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\mathbb{E}$  est un opérateur positif et  $\mathbb{E}(Id) = Id$ , on définit un état  $\Phi$  sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$  en posant

$$\Phi(T) = \langle (\mathbb{E}T)e_n, e_n \rangle.$$

Comme  $\mathbb{E}P_{\{n\}} = P_{\{n\}}$  on a  $\Phi(P_{\{n\}}) = \langle P_{\{n\}}e_n, e_n \rangle = 1 = \|P_{\{n\}}\|$ . Par le Fait, on peut donc écrire

$$(3.2) \quad \Phi(T) = \Phi(P_{\{n\}} T P_{\{n\}}).$$

Mais  $P_{\{n\}} T P_{\{n\}} = \langle Te_n, e_n \rangle P_{\{n\}}$  est un opérateur *diagonal*; donc  $\mathbb{E}(P_{\{n\}} T P_{\{n\}}) = P_{\{n\}} T P_{\{n\}}$ , et on obtient finalement

$$\Phi(T) = \langle P_{\{n\}} T P_{\{n\}} e_n, e_n \rangle = \langle Te_n, e_n \rangle$$

pour tout  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , comme attendu.  $\square$

*Remarque.* Une autre façon d’obtenir l’identité (3.2) est de remarquer que la restriction de  $\Phi$  à  $\mathcal{D}(\ell^2)$  est l’état  $D \mapsto \langle De_n, e_n \rangle$ , qui est visiblement *multiplicatif* (si on voit  $\mathcal{D}(\ell^2)$  comme  $\ell^\infty = \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ , c’est la masse de Dirac au point  $\mathcal{U}_n$ ), et d’utiliser le Fait 2 démontré dans la preuve de la Remarque 3.7.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas “continu” on voit ainsi qu’il n’est *a priori* pas exclu que la paire  $(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2))$  possède la propriété d’extension unique. C’est précisément le

**Problème de Kadison-Singer.** *La paire  $(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2))$  possède-t-elle la propriété d’extension unique ?*

Ce problème peut se reformuler en termes d’ultrafiltres. En effet, comme  $\mathcal{D}(\ell^2) = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ , les états purs sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  correspondent aux évaluations  $\delta_{\mathcal{U}}$ ,  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ . Explicitement, tout état pur  $\varphi$  sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  est donné par la formule

$$\varphi(D) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle De_n, e_n \rangle := \varphi_{\mathcal{U}}(D),$$

pour un certain ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{N}$ ; et inversement, tout état sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  de la forme  $\varphi_{\mathcal{U}}$  est pur.

Si  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ , l’état pur  $\varphi_{\mathcal{U}}$  sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  a un prolongement évident à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ , à savoir  $\Phi_{\mathcal{U}} := \varphi_{\mathcal{U}} \circ \mathbb{D}$  :

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle Te_n, e_n \rangle \quad , \quad T \in \mathcal{B}(\ell^2).$$

Le Problème de Kadison-Singer revient donc à la question suivante :

**Kadison-Singer reformulé.** *Est-il vrai que si  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ , alors  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est le seul prolongement de  $\varphi_{\mathcal{U}}$  à  $\mathcal{B}(\ell^2)$  ? Autrement dit, si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$  et si  $\Phi$  est un état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$  tel que  $\Phi(D) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle De_n, e_n \rangle$  pour tout opérateur diagonal  $D$ , a-t-on  $\Phi(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle Te_n, e_n \rangle$  pour tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  ?*

Si on n’accepte aucun avatar du Lemme de Zorn, alors la réponse est positive en vertu du lemme suivant, qui se trouve déjà dans [32].

**Lemme 3.12.** *Si  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_n$  est un ultrafiltre trivial, alors  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est le seul prolongement de  $\varphi_{\mathcal{U}}$  à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ .*

*Démonstration.* Si  $\Phi$  est un état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$  prolongeant  $\varphi_{\mathcal{U}_n}$ , i.e. vérifiant  $\Phi(D) = \langle De_n, e_n \rangle$  pour tout opérateur diagonal  $D$ , alors  $\Phi(P_{\{n\}}) = 1 = \|P_{\{n\}}\|$ . Comme dans la preuve de la proposition précédente, on en déduit que pour tout  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , on a  $\Phi(T) = \Phi(P_{\{n\}}TP_{\{n\}}) = \langle P_{\{n\}}TP_{\{n\}}e_n, e_n \rangle = \langle Te_n, e_n \rangle = \Phi_{\mathcal{U}_n}(T)$ .  $\square$

*Remarque.* Cette observation donne une autre preuve du fait que les états vectoriels  $\Phi_v(T) = \langle Tv, v \rangle$  sont purs. En effet, le vecteur unitaire  $v$  peut se “compléter” en une base orthonormée de l’espace de Hilbert  $H$  sous-jacent; autrement dit, on peut supposer que  $H = \ell^2$  et  $v = e_1$ , auquel cas  $\Phi_v = \Phi_{\mathcal{U}_1}$ . Comme  $\Phi_{\mathcal{U}_1}$  est le *seul* prolongement de l’état pur  $\varphi_{\mathcal{U}_1}$ , il est nécessairement pur, d’où le résultat.

*Exercice.* Dédurre la Proposition 3.11 du Lemme 3.12.

En dépit de ce résultat et de la Proposition 3.11, il est intéressant de noter que Kadison et Singer pensaient que la réponse à leur problème était en fait négative; mais ils se sont bien gardés d’énoncer cela comme une conjecture :

*We incline to the view that such extension is not unique.*

Un examen de la littérature révèle que d'autres ont été moins prudents. À titre d'exemple, on trouve la phrase suivante dans un article par ailleurs très intéressant : *It is generally expected that the Kadison-Singer Problem will turn out to be false.*

Le reste de cet article a pour but d'expliquer en détail un certain nombre de reformulations du Problème de Kadison-Singer. Comme indiqué dans l'introduction, il faudra faire "comme si" on ne savait pas que le Problème est maintenant résolu. Dans toute la suite, on désignera par (KS) ou bien le Problème de Kadison-Singer, ou bien l'énoncé "la réponse au Problème de Kadison-Singer est *positive*".

**3.5. Une "motivation physique" ?** Dans [15], on explique que le Problème de Kadison-Singer a été initialement motivé par des questions de mécanique quantique, et en particulier par un passage "problématique" du livre classique de Paul Dirac [21]. Je ne suis pas certain que l'explication soit pleinement convaincante ; mais voici cependant ce que j'en ai retenu.

Dans le formalisme de la mécanique quantique, l'espace des "configurations possibles" d'un système quantique est un espace de Hilbert  $H$  ; plus précisément, c'est l'ensemble de tous les vecteurs *unitaires* de  $H$  qui modélise les configurations possibles du système.

Ce n'est pas trop difficile à expliquer. Par exemple, "tout le monde sait bien" que l'évolution au cours du temps d'une particule vivant dans un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  peut être entièrement décrite à l'aide de la *fonction d'onde*  $\psi(x, t)$ . Pour chaque temps  $t$ , la fonction  $\psi_t(x) = \psi(x, t)$  appartient à l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega)$  et vérifie  $\|\psi_t\|_{L^2} = 1$ , *i.e.*  $\int_{\Omega} |\psi_t(x)|^2 dx = 1$ . La fonction  $\psi_t$  s'interprète comme une *distribution de probabilité* : à l'instant  $t$ , la probabilité que la particule se trouve dans une certaine région  $A \subseteq \Omega$  est égale à  $\int_A |\psi_t(x)|^2 dx$ .

Cela étant dit, le comportement du système quantique considéré est analysé à partir de la mesure de certaines *quantités observables*. Dans le formalisme adopté, une quantité observable est modélisée par un *opérateur auto-adjoint*  $T \in \mathcal{B}(H)$ , où  $H$  est l'espace des configurations. Je suis incapable d'expliquer pourquoi ; mais il est "clair" que  $T$  doit être auto-adjoint parce que les mesures donnent des nombres réels...

Comme rien n'est complètement déterminé, mais que les choses sont connues seulement avec une certaine probabilité, c'est maintenant que les *états* interviennent. Un état  $\Phi$  sur  $\mathcal{B}(H)$  s'interprète comme une "distribution de probabilité sur l'espace des quantités observables". De façon précise, si un opérateur  $T$  représente une certaine quantité observable, alors la probabilité "sous l'état  $\Phi$ " que (le résultat de la mesure de) la quantité représentée par  $T$  appartienne à un certain intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$  est égale à  $\mu_{\Phi}(T, I) := \Phi(\mathbf{1}_I(T))$ . Ceci a un sens pour tout borélien  $I \subseteq \mathbb{R}$ , et comme  $\Phi$  est un état, on définit bien ainsi une mesure de probabilité  $\mu_{\Phi}(T, \cdot)$  sur  $\mathbb{R}$  ... à ceci près que cette mesure n'est que *finiment* additive. C'est seulement pour certains états  $\Phi$  particuliers que la mesure  $\mu_{\Phi}(T, \cdot)$  est dénombrablement additive, typiquement les combinaisons convexes (finies ou infinies) d'états vectoriels. Un détail qu'on s'empresse aussitôt d'oublier.

Si on fixe une base orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'espace de Hilbert  $H$ , alors certaines quantités observables deviennent plus observables que les autres : ce sont celles qui correspondent à des opérateurs *diagonaux* sur la base  $(e_n)$ . Dirac dit explicitement que ces opérateurs diagonaux forment un ensemble maximal d'observables commutant deux à deux (une sous-algèbre maximale abélienne de  $\mathcal{B}(H)$ ...). Ensuite, il semble dire

que si, sous un certain état  $\Phi$ , on sait déterminer la distribution de probabilité des observables diagonaux  $D$ , alors on sait aussi déterminer la distribution de probabilité de *tous* les observables  $T$ . On voit donc apparaître “naturellement” quelque chose qui ressemble au Problème de Kadison-Singer.

En réalité, dans [21] les choses ne sont pas très claires ; mais il semble tout de même que les seuls “états” considérés par Dirac soient des états vectoriels associés à des vecteurs de la base  $(e_n)$ , ou en tous cas des états  $\Phi$  qui coïncident sur les opérateurs diagonaux avec des états vectoriels du type  $\Phi_{e_n}$ .

On voit ainsi que la question soulevée par le passage incriminé du livre de Dirac semble être le cas “trivial” du Problème de Kadison-Singer, *i.e.* celui correspondant aux ultrafiltres triviaux  $\mathcal{U}_n$  ; lequel est réglé dès les premières pages de [32] (voir le Lemme 3.12).

Il semble donc un peu abusif de prétendre que le Problème de Kadison-Singer soit réellement motivé par des questions de mécanique quantique. On aurait plutôt envie de dire que (KS) est une sorte d’extrapolation purement mathématique d’un passage un peu obscur de [21].

#### 4. COMPRESSIBILITÉ, PAVAGE ET PROPRIÉTÉ DE DIXMIER

Dans cette section, on entre vraiment dans le vif du sujet en donnant quatre reformulations non triviales du Problème de Kadison-Singer. En particulier, on va voir que (KS) est équivalent à la “pavabilité” de tous les opérateurs bornés sur  $\ell^2$ , ou encore à la “pavabilité uniforme” de tous les opérateurs sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$ .

**4.1. Compressibilité et pavage : Anderson.** Dans cette section et tout le reste de l’article, on utilise les notations suivantes : si  $\mathcal{B}$  est une  $C^*$ -algèbre et si  $\varphi$  est un état sur  $\mathcal{B}$ , on pose

$$\mathcal{F}_\varphi := \{b \in \mathcal{B}; \varphi(b) = 1 = \|b\|\},$$

et

$$\mathcal{F}_\varphi^+ := \mathcal{F}_\varphi \cap \mathcal{B}^+ = \{b \in \mathcal{B}; 0 \leq b \leq \mathbf{1} \text{ et } \varphi(b) = 1\}.$$

Le cas qui va nous intéresser en priorité est celui où  $\varphi = \varphi_{\mathcal{U}}$ , l’état pur sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  associé à un ultrafiltre  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ .

Si  $I$  est une partie quelconque de  $\mathbb{N}$  et si  $P_I \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est la projection diagonale associée, alors  $\langle P_I e_n, e_n \rangle$  vaut 1 ou 0 selon que l’entier  $n$  appartient à  $I$  ou non. Par conséquent,  $\varphi_{\mathcal{U}}(P_I)$  vaut 1 si  $I \in \mathcal{U}$  et 0 si  $I \notin \mathcal{U}$ . En particulier,

$$(4.1) \quad P_I \in \mathcal{F}_{\varphi_{\mathcal{U}}} \iff I \in \mathcal{U}.$$

On rappelle un fait très utile, qui a déjà servi dans la preuve de la Proposition 3.11. Le changement de notation est intentionnel.

**Fait 4.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\Phi$  un état sur  $\mathcal{A}$ . Si  $b \in \mathcal{F}_\Phi$ , alors*

$$\forall a \in \mathcal{A} : \Phi(ab) = \Phi(a) = \Phi(ba).$$

Le théorème suivant, dû à Anderson [3], est plus général que ce dont on aura besoin. On donnera seulement la preuve de la partie “facile” ; mais en revanche, on va démontrer entièrement le corollaire qui suit... sans utiliser le théorème.

**Théorème 4.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\mathcal{B}$  une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$ . Soit également  $\varphi$  un état pur sur  $\mathcal{B}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $\varphi$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{A}$  ;  
 (2)  $\mathcal{A}$  est  **$\mathcal{B}$ -compressible modulo  $\varphi$**  : pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $b \in \mathcal{F}_\varphi$  et  $b' \in \mathcal{B}$  tels que  $\|bab - b'\| \leq \varepsilon$ .

Dans ce cas, une propriété formellement plus forte que (2) a lieu : si  $\Phi$  est l'unique prolongement de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}$ , alors, pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $b \in \mathcal{F}_\varphi^+$  tel que  $\|b(a - \Phi(a)\mathbf{1})b\| \leq \varepsilon$ .

*Preuve de (2)  $\implies$  (1).* Fixons  $a \in \mathcal{A}$ . Par (2), on peut trouver deux suites  $(b_k) \subseteq \mathcal{F}_\varphi$  et  $(b'_k) \subseteq \mathcal{B}$  telles que  $\|b_k a b_k - b'_k\| \rightarrow 0$ . Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux prolongements de  $\varphi$  à  $\mathcal{A}$ , alors  $\Phi_1(b'_k) = \varphi(b'_k) = \Phi_2(b'_k)$  pour tout  $k$  et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\Phi_1(b_k a b_k) - \Phi_2(b_k a b_k)] = 0.$$

De plus, comme  $\mathcal{F}_\varphi \subseteq \mathcal{F}_{\Phi_1} \cap \mathcal{F}_{\Phi_2}$ , on a  $\Phi_i(b_k a b_k) = \Phi_i(a)$  pour tout  $k$ , d'après le Fait 4.1. Donc  $\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$ , pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .  $\square$

On utilisera le Théorème 4.2 uniquement via la conséquence suivante, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un état pur donné sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  admette un unique prolongement à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ . Il est important de noter qu'il s'agit d'un résultat "individuel" : l'état pur  $\varphi = \varphi_{\mathcal{U}}$  est fixé.

**Corollaire 4.3.** *Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , et soit  $\varphi_{\mathcal{U}}$  l'état pur associé sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a)  $\varphi_{\mathcal{U}}$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{B}(\ell^2)$  ;  
 (b) Tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est **compressible modulo  $\mathcal{U}$**  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que  $\|P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I\| \leq \varepsilon$ .

*Exercice.* Dédurre effectivement le Corollaire 4.3 du Théorème 4.2. Ce n'est pas tout à fait immédiat. Il faut d'abord montrer que si la propriété (2) "renforcée" est vérifiée par  $\varphi = \varphi_{\mathcal{U}}$ , alors elle est en fait vérifiée avec des *projections*  $b \in \mathcal{F}_{\varphi_{\mathcal{U}}}^+$  ; ce qui se fait à l'aide du Théorème spectral. On en déduit facilement que si (a) est vérifiée alors (b) l'est, en appliquant cette version "ultra-renforcée" de (2) à  $a := T - \mathbb{D}(T)$ .

*Preuve directe du Corollaire 4.3.* Le fait que (b) entraîne (a) est une conséquence de l'implication "triviale" (2)  $\implies$  (1) dans le théorème, car  $P_I \in \mathcal{F}_{\varphi_{\mathcal{U}}}$  pour tout  $I \in \mathcal{U}$  (cf. (4.1)) : si (b) est vérifiée, alors (2) l'est avec  $b := P_I$  et  $b' := P_I \mathbb{D}(T) P_I$ .

Supposons maintenant (a) vérifiée. Alors l'unique prolongement de  $\varphi_{\mathcal{U}}$  à  $\mathcal{B}(\ell^2)$  est  $\Phi_{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{U}} \circ \mathbb{D}$ ,

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle T e_n, e_n \rangle.$$

Pour alléger les notations, on écrira  $\varphi$  au lieu de  $\varphi_{\mathcal{U}}$  et  $\Phi$  au lieu de  $\Phi_{\mathcal{U}}$ .

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer (b) pour tout opérateur  $T$  *auto-adjoint* : le cas d'un opérateur  $T$  quelconque s'en déduira en écrivant  $T = A + iB$  et en appliquant le résultat aux opérateurs auto-adjoints  $A$  et  $B$ . (Si on peut trouver  $I_A, I_B \in \mathcal{U}$  tels que  $\|P_{I_A}(A - \mathbb{D}(A))P_{I_A}\| + \|P_{I_B}(B - \mathbb{D}(B))P_{I_B}\| \leq \varepsilon$ , alors  $I := I_A \cap I_B$  appartient à  $\mathcal{U}$  et  $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$ .) De plus, en remplaçant  $T$  par  $T - \mathbb{D}(T)$ , on peut également supposer qu'on a  $\mathbb{D}(T) = 0$ .

On fixe donc un opérateur  $T$  auto-adjoint vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$ , et  $\varepsilon > 0$ . Il s'agit de trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que  $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$ .

Comme  $\Phi$  est l'unique prolongement de  $\varphi$  à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ , le ‘‘Théorème de Hahn-Banach positif’’ (Théorème 3.1) nous dit qu'on a

$$\inf \{\varphi(D); D \in \mathcal{D}(\ell^2)_{\mathbb{R}}, D \geq T\} = \Phi(T) = \sup \{\varphi(D'); D' \in \mathcal{D}(\ell^2)_{\mathbb{R}}, D' \leq T\}.$$

Comme de plus  $\Phi(T) = \varphi(\mathbb{D}(T)) = 0$ , on peut donc trouver deux opérateurs auto-adjoints diagonaux  $D$  et  $D'$  tels que

$$D \leq T \leq D' \quad \text{et} \quad -\varepsilon < \varphi(D) \leq \varphi(D') < \varepsilon.$$

Par définition de  $\varphi$ , on a ainsi

$$-\varepsilon < \mathcal{U}\text{-lim} \langle De_n, e_n \rangle \leq \mathcal{U}\text{-lim} \langle D'e_n, e_n \rangle < \varepsilon;$$

et par conséquent, l'ensemble

$$I := \{n \in \mathbb{N}; -\varepsilon < \langle De_n, e_n \rangle \text{ et } \langle D'e_n, e_n \rangle < \varepsilon\}$$

appartient à  $\mathcal{U}$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\langle P_I D P_I e_n, e_n \rangle = \langle D P_I e_n, P_I e_n \rangle = \begin{cases} \langle De_n, e_n \rangle & \text{si } n \in I \\ 0 & \text{si } n \notin I \end{cases}$$

et de même pour  $\langle P_I D' P_I e_n, e_n \rangle$ . Par définition de  $I$ , on en déduit qu'on a

$$-\varepsilon < \langle P_I D P_I e_n, e_n \rangle \text{ et } \langle P_I D' P_I e_n, e_n \rangle < \varepsilon \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

Mais les opérateurs  $P_I D P_I$  et  $P_I D' P_I$  sont *diagonaux* et auto-adjoints car  $D$  et  $D'$  le sont ; donc les inégalités précédentes entraînent les inégalités ‘‘opératorielles’’

$$-\varepsilon \mathbf{1} \leq P_I D P_I \text{ et } P_I D' P_I \leq \varepsilon \mathbf{1}.$$

Enfin, comme  $D \leq T \leq D'$  et  $P_I = P_I^*$ , on a  $P_I D P_I \leq P_I T P_I \leq P_I D' P_I$ . On obtient donc  $-\varepsilon \mathbf{1} \leq P_I T P_I \leq \varepsilon \mathbf{1}$ , d'où  $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$ .  $\square$

Comme indiqué plus haut, le Corollaire 4.3 est un résultat ‘‘individuel’’. Si on l'applique à *tous* les ultrafiltres  $\mathcal{U}$ , on obtient avec un peu de travail supplémentaire une première reformulation du Problème de Kadison-Singer. Ce résultat se trouve en fait déjà dans [32].

**Corollaire 4.4.** *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (i) *La paire  $(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2))$  possède la propriété d'extension unique, i.e. (KS) est vrai.*
- (ii) *Pour tout ultrafiltre  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ , tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que  $\|P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I\| \leq \varepsilon$ .*
- (iii) *Tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est **pavable** : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partition finie  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon$  pour  $k = 1, \dots, r$ .*

*Remarque.* Contrairement à l'usage, l'expression ‘‘partition de  $\mathbb{N}$ ’’ signifiera pour nous ‘‘famille de parties deux à deux disjointes recouvrant  $\mathbb{N}$ ’’ ; autrement dit, certains éléments de la partition sont autorisés à être *vides*. Cette pédanterie sera parfois comode pour alléger la rédaction.

*Preuve du Corollaire 4.4.* L'équivalence de (i) et (ii) découle du Corollaire 4.3. D'autre part, il est clair que (iii) entraîne (ii) car si  $(I_1, \dots, I_r)$  est une partition de  $\mathbb{N}$  et si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, alors l'un des  $I_k$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

Il reste à montrer que (ii) entraîne (iii). Supposons donc (ii) vérifiée, et fixons un opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  et  $\varepsilon > 0$ . Si on pose

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{N}; \|P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I\| \leq \varepsilon\},$$

alors (ii) signifie qu'on a

$$\beta\mathbb{N} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \beta_I,$$

où  $\beta_I = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}; \mathcal{U} \ni I\}$ . Comme les  $\beta_I$  sont des *ouverts* de  $\beta\mathbb{N}$  et que  $\beta\mathbb{N}$  est compact, on peut donc trouver  $J_1, \dots, J_r \in \mathcal{I}$  tels que

$$\begin{aligned} \beta\mathbb{N} &= \beta_{J_1} \cup \dots \cup \beta_{J_r} \\ &= \beta_{J_1 \cup \dots \cup J_r}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble  $J_1 \cup \dots \cup J_r$  appartient à tous les ultrafiltres, donc en particulier à tous les ultrafiltres triviaux, et par conséquent  $J_1 \cup \dots \cup J_r = \mathbb{N}$ .

Les  $J_k$  ne forment *a priori* pas une partition de  $\mathbb{N}$ , mais on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  telle que  $I_k \subseteq J_k$  pour tout  $k$  (certains  $I_k$  pouvant être vides...). Pour  $k = 1, \dots, r$ , on a alors

$$\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \|P_{J_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{J_k}\| \leq \varepsilon.$$

□

*Remarque 1.* Il n'est sans doute pas inutile de donner une interprétation “géométrique” de la propriété de pavage introduite dans (iii). À toute partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  correspond la décomposition orthogonale  $\ell^2 = E_{I_1} \oplus \dots \oplus E_{I_r}$ . Un opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  admet alors une décomposition “matricielle” de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & T_r \end{pmatrix},$$

où  $T_k \in \mathcal{B}(E_{I_k})$  est “la partie de  $T$  vivant sur  $E_{I_k}$ ”, *i.e.*  $T_k = P_{I_k} T|_{E_{I_k}}$  (la compression de  $T$  à  $E_{I_k}$ ). L'opérateur  $P_{I_k} T P_{I_k}$  étant simplement  $T_k$  “considéré comme opérateur sur  $\ell^2$ ”, on a  $\|T_k\| = \|P_{I_k} T P_{I_k}\|$  pour tout  $k$ , et donc l'opérateur  $T_1 \oplus \dots \oplus T_r = \sum_k P_{I_k} T P_{I_k}$  a pour norme  $\max(\|P_{I_1} T P_{I_1}\|, \dots, \|P_{I_r} T P_{I_r}\|)$ . Par conséquent, dire qu'un opérateur  $T$  est pavable signifie qu'il est possible de trouver des décompositions matricielles du type précédent pour lesquelles l'opérateur  $T_1 \oplus \dots \oplus T_r$  est “presque diagonal”.

Évidemment, ceci n'est intéressant que pour des partitions *finies* de  $\mathbb{N}$  : si on autorise des partitions infinies, il suffit de prendre  $I_k = \{k\}$  pour obtenir un opérateur  $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots$  exactement diagonal (c'est l'opérateur  $\mathbb{D}(T)$ ).

*Remarque 2.* L'équivalence de (ii) et (iii) est en un sens “formelle”. De façon très générale, si  $\mathcal{I}$  est une famille de parties de  $\mathbb{N}$  **héréditaire pour l'inclusion** (tout sous-ensemble d'un élément de  $\mathcal{I}$  appartient encore à  $\mathcal{I}$ ), alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- tout ultrafiltre  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  contient au moins un  $I \in \mathcal{I}$ ;
- Il existe une partition  $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r = \mathbb{N}$  avec  $I_k \in \mathcal{I}$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

Le cas qu'on a considéré est celui de la famille  $\mathcal{I} = \{I \subseteq \mathbb{N}; \|P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I\| \leq \varepsilon\}$ , pour  $\varepsilon > 0$  donné; mais on voit de suite que la seule propriété de  $\mathcal{I}$  qu'on a utilisée est son caractère héréditaire.

*Remarque 3.* Dans la suite, on désignera par (A) l'énoncé (iii), *i.e.* "tout opérateur est pavable". Ainsi, on vient de voir que

$$(KS) \iff (A).$$

Une particularité très remarquable de (A) est qu'il ne fait intervenir *ni ultrafiltres ni états*. C'est donc une formulation de (KS) bien plus "élémentaire" que l'énoncé original.

*Remarque 4.* Pour démontrer (A), il n'est pas nécessaire d'établir la propriété de pavage pour *tous* les opérateurs  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  : il suffit de le faire pour les opérateurs  $T$  *auto-adjoints et vérifiant*  $\mathbb{D}(T) = 0$ . En effet, soit  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  quelconque, et écrivons  $T = A + iB$  avec  $A$  et  $B$  auto-adjoints. Pour montrer que  $T$  est pavable, on peut supposer que  $\mathbb{D}(T) = 0$  en remplaçant  $T$  par  $T - \mathbb{D}(T)$ . Alors  $\mathbb{D}(A) = 0 = \mathbb{D}(B)$ . Si on suppose que  $A$  et  $B$  sont pavables, alors pour  $\varepsilon > 0$  donné, on peut trouver des partitions  $J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s = \mathbb{N}$  et  $J'_1 \sqcup \dots \sqcup J'_s = \mathbb{N}$  telles que  $\|P_{J_l}AP_{J_l}\| + \|P_{J'_l}BP_{J'_l}\| \leq \varepsilon$  pour  $l = 1, \dots, s$ . En énumérant les ensembles  $J_l \cap J'_l$ , on obtient une partition  $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r = \mathbb{N}$  avec  $r = s^2$  telle que  $\|P_{I_k}AP_{I_k}\| + \|P_{I_k}BP_{I_k}\| \leq \varepsilon$  pour  $k = 1, \dots, r$ . On a alors  $\|P_{I_k}TP_{I_k}\| \leq \varepsilon$  pour tout  $k$ , ce qui prouve que  $T$  est pavable.

En résumé :

$$(A) \iff \text{tout opérateur auto-adjoint } T \text{ tel que } \mathbb{D}(T) = 0 \text{ est pavable.}$$

*Remarque 5.* Se donner une partition finie  $(I_k)$  de  $\mathbb{N}$  revient à se donner ce qu'on a appelé plus haut une **décomposition diagonale de l'identité**, c'est-à-dire une famille finie  $(p_k)$  de projections diagonales deux à deux orthogonales et vérifiant  $\sum_k p_k = Id$ . (Il suffit de poser  $p_k := P_{I_k}$ ).

Si  $(p_k)$  est une telle décomposition, alors  $\|\sum_k p_k B p_k\| = \max_k \|p_k B p_k\|$  pour tout opérateur  $B \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , car les opérateurs  $p_k B p_k$  vivent sur des sous-espaces de  $\ell^2$  deux à deux orthogonaux. De plus, si  $D$  est un opérateur diagonal, alors  $D = \sum_k p_k D p_k$  car  $p_k D p_k = p_k^2 D = p_k D$  pour tout  $k$ .

On en déduit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est pavable si et seulement si on peut, pour tout  $\varepsilon > 0$ , trouver une décomposition orthogonale de l'identité  $(p_k)$  telle que

$$\left\| \sum_k p_k T p_k - \mathbb{D}(T) \right\| \leq \varepsilon.$$

**4.2. Propriété de Dixmier.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  une sous- $C^*$ -algèbre maximale abélienne, pour laquelle il existe de plus une espérance conditionnelle  $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . On dit qu'un élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  possède la **Propriété de Dixmier relativement à  $\mathcal{B}$**  si

$$\mathbb{E}(a) \in \overline{\text{conv}} \{uau^*; u \in \mathcal{B} \text{ unitaire}\}.$$

(Un élément  $u$  d'une  $C^*$ -algèbre est dit **unitaire** s'il est inversible avec  $u^{-1} = u^*$ .) On dit que la paire  $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$  possède la **Propriété de Dixmier** si tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  possède la Propriété de Dixmier relativement à  $\mathcal{B}$ .

On n'a pas donné la définition sous la forme la plus générale possible; voir par exemple [29]. Quoi qu'il en soit, la Propriété de Dixmier a un lien direct avec la propriété de pavage :

**Proposition 4.5.** *Pour  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  possède la Propriété de Dixmier relativement à  $\mathcal{D}(H)$ ;
- (2)  $T$  est pavable.

*Démonstration.* La preuve qui suit est tirée de [41].

Pour abrégé, on va utiliser le sigle **ddi** pour désigner une décomposition diagonale de l'identité  $(p_k)$  sur  $\ell^2$ . L'opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  étant fixé, on notera  $\mathbf{dd}(T)$  la famille de tous les opérateurs de la forme  $\sum_k p_k T p_k$ , où  $(p_k)$  est une ddi. D'autre part, on notera  $\mathcal{U}(\ell^2)$  l'ensemble des opérateurs unitaires sur  $\ell^2$ . Avec ces notations, (1) et (2) se réécrivent comme suit :

$$(1) \iff \mathbb{D}(T) \in \overline{\text{conv}} \{UTU^*; U \in \mathcal{D}(\ell^2) \cap \mathcal{U}(\ell^2)\};$$

$$(2) \iff \mathbb{D}(T) \in \overline{\mathbf{dd}(T)}.$$

(Pour (2), c'est le contenu de la Remarque 5 à la fin de la section précédente.)

(1)  $\implies$  (2). Supposons (1) vérifiée; il s'agit de montrer que  $\mathbb{D}(T) \in \overline{\mathbf{dd}(T)}$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par (1), on peut trouver des opérateurs unitaires diagonaux  $U_1, \dots, U_N$  et des réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  vérifiant  $\sum_1^N \lambda_i = 1$  tels que

$$\left\| \mathbb{D}(T) - \sum_{i=1}^N \lambda_i U_i T U_i^* \right\| \leq \varepsilon.$$

**Fait.** Il existe une ddi  $(p_k)$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , des nombres complexes  $\omega_{i,k}$  de module 1 tels que

$$\left\| U_i - \sum_k \omega_{i,k} p_k \right\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

*Preuve du Fait.* C'est essentiellement clair. Les  $U_i$  sont unitaires diagonaux, donc (en identifiant  $\mathcal{D}(\ell^2)$  et  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ) on peut considérer que  $U_i \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ . Pour  $i = 1, \dots, N$ , on peut trouver  $V_i \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$  "  $\mathcal{D}(\ell^2) \cap \mathcal{U}(\ell^2)$  " ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, tel que  $\|V_i - U_i\| = \|V_i - U_i\|_\infty \leq \varepsilon$ . Soit alors  $(I_k)$  une partition finie de  $\mathbb{N}$  telle que tous les  $V_i$  soient constants sur chaque  $I_k$ , et soit  $(p_k) = (P_{I_k})$  la ddi associée. Par définition, on peut écrire  $V_i = \sum_k \omega_{i,k} p_k$  avec  $\omega_{i,k} \in \mathbb{T}$ , et donc  $\|U_i - \sum_k \omega_{i,k} p_k\| \leq \varepsilon$  pour  $i = 1, \dots, N$ .  $\square$

On va maintenant montrer que si  $(p_k)$  est choisie comme dans le Fait, alors

$$\left\| \mathbb{D}(T) - \sum_k p_k T p_k \right\| \leq C \varepsilon,$$

où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $\|T\|$ ; ce qui donnera le résultat souhaité.

En posant (comme dans la preuve du Fait)  $V_i := \sum_k \omega_{i,k} p_k$ , on a

$$\|U_i T U_i^* - V_i T V_i^*\| \leq \|(U_i - V_i) T U_i^*\| + \|V_i T (U_i^* - V_i^*)\| \leq 2\varepsilon \|T\|$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Par conséquent, si on pose

$$A := \sum_{i=1}^N \lambda_i V_i T V_i^*,$$

alors

$$\|A - \mathbb{D}(T)\| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i \|U_i T U_i^* - V_i T V_i^*\| + \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i U_i T U_i^* - \mathbb{D}(T) \right\| \leq C \varepsilon,$$

où  $C = 2\|T\| + 1$ .

Comme  $\mathbb{D}(T) = \sum_k p_k \mathbb{D}(T) p_k$  et comme  $\|\sum_k p_k B p_k\| \leq \|B\|$  pour tout opérateur  $B$ , on en déduit

$$\left\| \mathbb{D}(T) - \sum_k p_k A p_k \right\| = \left\| \sum_k p_k (\mathbb{D}(T) - A) p_k \right\| \leq C \varepsilon.$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'observer que  $\sum p_k A p_k = \sum p_k T p_k$ . C'est un calcul "qui se fait tout seul" :

$$\begin{aligned} \sum p_k A p_k &= \sum_k p_k \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_l \omega_{i,k} p_l \right) T \left( \sum_{l'} \omega_{i,l'} p_{l'} \right)^* \right] p_k \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_k \omega_{i,k} p_k T \bar{\omega}_{i,k} p_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_k p_k T p_k \right) = \sum_k p_k T p_k. \end{aligned}$$

(2)  $\implies$  (1). Supposons (2) vérifiée, *i.e.*  $\mathbb{D}(T) \in \overline{\mathbf{dd}(T)}$ . Pour montrer (1) il suffit de prouver qu'on a

$$(4.2) \quad \mathbf{dd}(T) \subseteq \text{conv} \left\{ UTU^*; U \in \mathcal{D}(\ell^2) \cap \mathcal{U}(\ell^2) \right\}.$$

Fixons donc une ddi  $(p_1, \dots, p_N)$ , et cherchons à écrire  $\sum_k p_k T p_k$  comme combinaison convexe d'opérateurs de la forme  $UTU^*$  avec  $U \in \mathcal{U}(\ell^2) \cap \mathcal{D}(\ell^2)$ .

Posons

$$\omega := e^{\frac{2i\pi}{N}} \quad \text{et} \quad V := \sum_{k=1}^N \omega^k p_k.$$

Alors  $V$  est un opérateur unitaire diagonal qui se décompose "par blocs" de la façon suivante :

$$V = \begin{pmatrix} \omega p_1 & & & \\ & \omega^2 p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^N p_N \end{pmatrix}$$

On a  $V^j = \sum_{k=1}^N \omega^{kj} p_k$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , d'où le calcul suivant (qui devrait être familier) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V^j T (V^j)^* &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k,k'} \omega^{j(k-k')} p_k T p_{k'} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k,k'} \left( \sum_{j=1}^N \omega^{(k-k')j} \right) p_k T p_{k'} \\ &= \sum_k p_k T p_k. \end{aligned}$$

On voit donc que l'opérateur  $\sum_k p_k T p_k$  est bien dans l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{UTU^*; U \in \mathcal{D}(\ell^2) \cap \mathcal{U}(\ell^2)\}$ , ce qui termine la preuve de (4.2) et donc celle de la Proposition 4.5.  $\square$

**4.3. Pavages fini-dimensionnels.** Après cet interlude sur la Propriété de Dixmier, on va maintenant donner une formulation “fini-dimensionnelle” de la propriété de pavage. Tout repose sur un résultat “de compacité” très utile, qu'on appelle souvent le **Lemme de sélection de Rado**.

**Lemme 4.6.** *Soit  $\Lambda$  un ensemble non vide, et soit (P) une propriété relative aux parties de  $\Lambda$ , supposée **héréditaire** – si  $I \subseteq \Lambda$  a (P) et si  $I' \subseteq I$ , alors  $I'$  a (P) – et **finiment déterminée** – un ensemble  $I \subseteq \Lambda$  a (P) si toutes ses parties finies ont (P). Soit également  $r \in \mathbb{N}$ . On suppose que tout ensemble fini  $J \subseteq \Lambda$  est **(P)-partitionnable en  $r$  morceaux**, ce qui signifie qu'on peut partitionner  $J$  en  $r$  ensembles ayant la propriété (P). Alors  $\Lambda$  lui-même est (P)-partitionnable en  $r$  morceaux.*

*Démonstration.* Comme on autorise les éléments d'une partition à être vides, une partition d'un ensemble  $J$  en  $r$  morceaux s'identifie à un  **$r$ -coloriage** de  $J$ , c'est-à-dire une application  $f : J \rightarrow \{1, \dots, r\}$ . À une telle application  $f$  est associée la partition  $(J_1, \dots, J_r)$  définie par  $J_k = \{f = k\}$ .

On notera  $[r]$  l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ , et  $[r]^J$  l'ensemble de tous les  $r$ -coloriages d'un ensemble  $J$  :

$$[r]^J = \{f : J \rightarrow [r]\} = \dots \{1, \dots, r\}^J.$$

Appelons *bon coloriage* d'un ensemble  $J \subseteq \Lambda$  tout  $r$ -coloriage  $f$  de  $J$  tel que les ensembles  $\{f = k\}$  ont la propriété (P); et pour tout ensemble fini  $J \subseteq I$ , posons

$$\mathcal{F}_J := \{f \in [r]^I; f|_J \text{ est un bon coloriage de } J\}.$$

Par hypothèse, on a  $\mathcal{F}_J \neq \emptyset$  pour tout ensemble fini  $J \subseteq \Lambda$ . De plus, si  $J_1, \dots, J_N$  sont des parties finies de  $\Lambda$ , alors

$$\mathcal{F}_{J_1 \cup \dots \cup J_N} \subseteq \mathcal{F}_{J_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{J_N}$$

car la propriété (P) est héréditaire. En particulier, les  $\mathcal{F}_J$  possèdent la *propriété d'intersection finie* : toute intersection finie d'ensembles  $\mathcal{F}_J$  est non vide. Enfin, les  $\mathcal{F}_J$  sont des *fermés* de l'espace  $[r]^\Lambda = \{1, \dots, r\}^\Lambda$  muni de la topologie produit, car l'appartenance à  $\mathcal{F}_J$  ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées.

Comme l'espace produit  $[r]^\Lambda$  est *compact*, on en déduit, en notant  $[\Lambda]^{<\infty}$  la famille de toutes les parties finies de  $\Lambda$ , qu'on a

$$\bigcap_{J \in [\Lambda]^{<\infty}} \mathcal{F}_J \neq \emptyset.$$

Il existe ainsi un  $r$ -coloriage  $f$  de  $\Lambda$  tel que  $f|_J$  est un bon coloriage de  $J$  pour tout ensemble fini  $J \subseteq \Lambda$ . Autrement dit, il existe une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\Lambda$  telle que

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \forall J \subseteq I_k \text{ fini} : I_k \cap J \text{ a (P)}.$$

Comme (P) est finiment déterminée, cela signifie que tous les  $I_k$  ont (P); et donc  $\Lambda$  est (P)-partitionnable en  $r$ -morceaux.  $\square$

Le Lemme de sélection de Rado sera utilisé plusieurs fois dans la suite. Pour le moment, on va en déduire la reformulation annoncée de la propriété de pavage.

Dans tout ce qui suit, si  $d \in \mathbb{N}$  on note  $[d]$  l'ensemble  $\{1, \dots, d\}$ . Si  $T$  est un opérateur sur  $\mathbb{C}^d$ , on note comme il se doit  $\mathbb{D}(T)$  sa diagonale; et pour tout ensemble  $I \subseteq [d]$ ,

on note  $P_I \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  la projection diagonale associée. En bref : on utilise les mêmes notations pour les opérateurs agissant sur  $\mathbb{C}^d$  que pour les opérateurs sur  $\ell^2$ .

Si  $\varepsilon > 0$  et  $r \in \mathbb{N}$  sont donnés, on dira qu'un opérateur  $T$  sur  $\ell^2$  ou sur  $\mathbb{C}^d$  est  $\varepsilon$ -pavable en  $r$  morceaux s'il existe une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  ou de  $[d]$  telle que

$$\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

**Proposition 4.7.** *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (1) *Tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est pavable, i.e. (A) ;*
- (2) *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  vérifiant  $\|T\| \leq 1$  et  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\varepsilon$ -pavable en  $r$  morceaux ;*
- (3) *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|T\| \leq 1$  et  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\varepsilon$ -pavable en  $r$  morceaux.*

*Remarque.* Il va sans dire (mais “ça va mieux en le disant”) que dans (2), le point crucial est que l'entier  $r$  est *indépendant de la dimension  $d$* . Si on autorisait  $r$  à dépendre de  $d$ , alors (2) serait trivial : en considérant la partition  $(\{1\}, \dots, \{d\})$  de  $[d]$ , on voit que tout opérateur sur  $\mathbb{C}^d$  est 0-pavable en  $d$  morceaux.

*Preuve de la Proposition 4.7.* (1)  $\implies$  (2). Supposons que (2) ne soit pas vérifiée. Alors on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que : pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $d_r$  et un opérateur  $T_r \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_r})$  vérifiant  $\|T_r\| \leq 1$  et  $\mathbb{D}(T_r) = 0$  qui n'est pas  $\varepsilon$ -pavable en  $r$  morceaux. On considère alors l'opérateur

$$T := \bigoplus_{r \geq 1} T_r \in \mathcal{B}\left(\bigoplus_{r \geq 1} \mathbb{C}^{d_r}\right),$$

où la somme directe hilbertienne  $\bigoplus_{r \geq 1} \mathbb{C}^{d_r}$  est identifiée de manière évidente à  $\ell^2$ . On a  $\|T\| = \sup_r \|T_r\| \leq 1$  et  $\mathbb{D}(T) = 0$ , mais par construction  $T$  n'est pas  $\varepsilon$ -pavable en un nombre fini de morceaux. Donc (1) n'est pas vérifiée.

L'implication (3)  $\implies$  (1) étant évidente, il reste à vérifier que (2) entraîne (3).

Supposons (2) vérifiée et fixons  $\varepsilon > 0$ . On va montrer que (3) est vérifiée avec  $r = r(\varepsilon)$  donné par (2).

Fixons  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  et  $\|T\| \leq 1$ . En vue d'appliquer le Lemme de sélection de Rado, notons (P) la propriété relative aux parties de  $\mathbb{N}$  qui saute aux yeux :

$$I \subseteq \mathbb{N} \text{ a (P) si et seulement si } \|P_I T P_I\| \leq \varepsilon.$$

La propriété (P) est héréditaire car  $\|P_{I'} T P_{I'}\| \leq \|P_I T P_I\|$  si  $I' \subseteq I$ . De plus (P) est finiment déterminée. En effet, soit  $I \subseteq \mathbb{N}$  et supposons que toutes les parties finies de  $I$  aient (P). Soit  $(J_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante de parties finies de  $I$  telle que  $\bigcup_{n \geq 1} J_n = I$ . Alors  $P_{J_n} T P_{J_n} x \rightarrow P_I T P_I x$  pour tout  $x \in \ell^2$ , et donc  $\|P_I T P_I\| \leq \sup_n \|P_{J_n} T P_{J_n}\| \leq \varepsilon$ , i.e.  $I$  a (P).

Si  $J \subseteq \mathbb{N}$  est fini, on peut trouver  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $J \subseteq [d]$ . En identifiant  $\mathbb{C}^d$  au sous-espace  $[e_1, \dots, e_d] \subseteq \ell^2$  et en appliquant (2) à l'opérateur  $T_d := P_{[d]} T|_{\mathbb{C}^d}$ , on obtient une partition  $(J_1, \dots, J_r)$  de  $[d]$  telle que  $\|P_{J_k} T P_{J_k}\| \leq \varepsilon$  pour  $k = 1, \dots, r$ ; autrement dit, une (P)-partition de  $[d]$  en  $r$  morceaux. Comme (P) est héréditaire, on en déduit que  $J$  est (P)-partitionnable en  $r$  morceaux.

Les hypothèses du Lemme de sélection de Rado sont donc satisfaites. Quant à la conclusion, c'est exactement la propriété (3) pour  $T$ .  $\square$

*Remarque 1.* Dans la suite, on notera  $(A)_{<\infty}$  l'énoncé (2) de la Proposition 4.7, que l'on peut retenir sous la forme suivante : *les opérateurs sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$  sont "uniformément pavables"*. Cet énoncé est souvent appelé la **Conjecture de pavage d'Anderson**. A ce stade, on dispose maintenant de 3 formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer :

$$(KS) \iff (A) \iff (A)_{<\infty}.$$

*Remarque 2.* Par homogénéité, la Proposition 4.7 fournit une précision supplémentaire par rapport à la formulation initiale de l'énoncé (A) : si (A) est vrai alors, pour  $\varepsilon > 0$  donné, tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\varepsilon \|T\|$ -pavable en  $r(\varepsilon)$  morceaux ; et par conséquent, tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est  $\varepsilon$ -pavable en un nombre  $r$  de morceaux *dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et de  $\|T - \mathbb{D}(T)\|$* .

## 5. PAVAGE DES PROJECTIONS DE PETITE DIAGONALE

Dans cette section, on va essentiellement montrer que la propriété de pavage pour tous les opérateurs  $T$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  est équivalente à une propriété de pavage moins forte pour toutes les projections  $P$  telles que  $\|\mathbb{D}(P)\|$  est "petite". Tous les résultats qu'on va énoncer sont dûs à Akemann et Anderson et se trouvent dans [1].

**5.1. La "Conjecture AA( $\delta$ )" de Akemann et Anderson.** Étant donné un nombre réel  $\delta \in (0, 1)$ , on va s'intéresser à l'énoncé suivant, qu'on notera AA( $\delta$ ) : *Il existe un entier  $r \in \mathbb{N}$  et une constante  $\eta > 0$  tels que : pour tout  $d \in \mathbb{N}$  et pour toute projection  $P$  sur  $\mathbb{C}^d$  vérifiant  $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $[d]$  telle que  $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \leq 1 - \eta$  pour  $k = 1, \dots, r$ .*

Cela ressemble fort à du pavage, et en première lecture on aurait envie d'abrégier la fin de l'énoncé en "toute projection sur  $\mathbb{C}^d$  vérifiant  $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$  est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r$  morceaux".

Cependant, ce n'est pas tout à fait correct car on demande des conditions sur les  $\|P_{I_k} P P_{I_k}\|$  et pas sur les  $\|P_{I_k}(P - \mathbb{D}(P))P_{I_k}\|$ , alors qu'on ne suppose pas que  $\mathbb{D}(P) = 0$ . On pourrait si on veut parler de "pseudo-pavabilité".

Par ailleurs, un point essentiel est qu'on ne demande pas la  $\varepsilon$ -pseudo-pavabilité pour tout  $\varepsilon > 0$ , mais pour *un*  $\varepsilon < 1$ , à savoir  $\varepsilon = 1 - \eta$ , qui est éventuellement très proche de 1. Comme de plus on ne considère que des projections, cela donne à AA( $\delta$ ) l'air d'être un énoncé beaucoup moins fort que  $(A)_{<\infty}$ . La proposition suivante montre que cette première impression est quelque peu trompeuse.

**Proposition 5.1.** *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (1) *Les opérateurs sur  $\mathbb{C}^d$  sont uniformément pavables, i.e.  $(A)_{<\infty}$  ;*
- (2) *AA( $\delta$ ) est vrai pour tout  $\delta \in (0, 1)$  ;*
- (3) *AA( $\frac{1}{2}$ ) est vrai.*

*Démonstration.* (1)  $\implies$  (2). Supposons (1) vérifiée. Soit  $\delta \in (0, 1)$  quelconque, et soit  $T$  un opérateur sur  $\mathbb{C}^d$  vérifiant  $\|T\| \leq 1$  et  $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$ . On ne suppose *pas* que  $T$  est une projection.

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta + \varepsilon < 1$ , et soit  $\eta := 1 - (\varepsilon + \delta)$ . Par (1), on peut trouver  $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  et une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $[d]$  tels que  $\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon$  pour  $k = 1, \dots, r$ . On a alors  $\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \|P_{I_k} \mathbb{D}(T) P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \delta = 1 - \eta$  pour tout  $k$ , ce qui prouve (2).

L'implication (2)  $\implies$  (3) est immédiate.

(3)  $\implies$  (1). Supposons que (3) est vérifiée, *i.e.* que  $\text{AA}(\frac{1}{2})$  est satisfait avec “témoins”  $r \in \mathbb{N}$  et  $\eta > 0$ .

**Fait 1.** Si  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  est auto-adjoint et vérifie  $\mathbb{D}(T) = 0$ , alors  $T$  est  $(1 - \eta)\|T\|$ -pavable en  $r^2$  morceaux.

*Preuve du Fait 1.* Par homogénéité, on peut supposer que  $\|T\| \leq 1$ . Soit  $S$  l’opérateur sur  $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{2d}$  défini comme suit :

$$S := \begin{pmatrix} T & \sqrt{1 - T^2} \\ \sqrt{1 - T^2} & -T \end{pmatrix}.$$

Cette définition a bien un sens car  $T$  est auto-adjoint et  $\|T\| \leq 1$ .

Un calcul immédiat montre que  $S$  est auto-adjoint et qu’on a  $S^2 = Id$ ; autrement dit,  $S$  est une *symétrie orthogonale*. Par suite, les opérateurs

$$P^\pm := \frac{1}{2}(Id \pm S)$$

sont des projections orthogonales. De plus, on a  $\mathbb{D}(P^\pm) = \frac{1}{2}Id$  car  $\mathbb{D}(S) = 0$ , et donc  $\|\mathbb{D}(P^\pm)\| = \frac{1}{2}$ . Par  $\text{AA}(\frac{1}{2})$ , on peut donc trouver des partitions  $(J_1^\pm, \dots, J_r^\pm)$  de  $[2d]$  telles que

$$\|P_{J_l^\pm}^\pm P_{J_l^\pm}^\pm\| \leq 1 - \eta \quad \text{pour } l = 1, \dots, r.$$

D’autre part, on a

$$P^\pm = \frac{1}{2}(Id \pm S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Id \pm T) & * \\ * & * \end{pmatrix};$$

donc  $P_{[d]} P^\pm P_{[d]} = \frac{1}{2}(Id \pm T)$ , et par conséquent

$$\left\| P_{J_l^\pm \cap [d]} \frac{Id \pm T}{2} P_{J_l^\pm \cap [d]} \right\| = \left\| P_{J_l^\pm} P_{[d]} P^\pm P_{[d]} P_{J_l^\pm} \right\| \leq 1 - \eta$$

pour tout  $l \in \{1, \dots, r\}$ .

En énumérant les  $r^2$  ensembles  $J_l^+ \cap J_{l'}^- \cap [d]$  sous la forme  $(I_1, \dots, I_{r^2})$ , on obtient ainsi une partition de  $[d]$  en  $r^2$  morceaux telle que

$$\left\| P_{I_k} \frac{T \pm Id}{2} P_{I_k} \right\| \leq 1 - \eta \quad \text{pour } k = 1, \dots, r^2.$$

Maintenant, on a  $-Id \leq T \leq Id$  car  $T$  est auto-adjoint et  $\|T\| \leq 1$ . On en déduit  $\frac{T - Id}{2} \leq T \leq \frac{T + Id}{2}$ , et par suite

$$P_{I_k} \frac{T - Id}{2} P_{I_k} \leq P_{I_k} T P_{I_k} \leq P_{I_k} \frac{T + Id}{2} P_{I_k}.$$

Comme on a affaire à des opérateurs auto-adjoints, on obtient donc

$$\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \max \left( \left\| P_{I_k} \frac{T - Id}{2} P_{I_k} \right\|, \left\| P_{I_k} \frac{T + Id}{2} P_{I_k} \right\| \right) \leq 1 - \eta$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, r^2\}$ . Ainsi,  $T$  est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r^2$  morceaux.  $\square$

**Fait 2.** S’il existe  $s \in \mathbb{N}$  et une constante  $\alpha < 1$  tels que tout opérateur auto-adjoint  $T$  sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\alpha\|T\|$ -pavable en  $s$  morceaux, alors les opérateurs sur  $\mathbb{C}^d$  sont uniformément pavables.

*Preuve du Fait 2.* D’après la (version fini-dimensionnelle de) la Remarque 4 suivant le Corollaire 4.4, on peut se contenter de montrer que les opérateurs *auto-adjoints* et de diagonale nulle sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$  sont uniformément pavables.

La preuve repose sur un argument standard d’“itération”. Fixons  $s$  et  $\alpha$  comme dans le Fait, et soit  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  auto-adjoint vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  et  $\|T\| \leq 1$ .

Par hypothèse, on peut trouver une partition  $\mathcal{I}^1 = (I_1, \dots, I_s)$  de  $[d]$  telle que  $\|P_{I_l} T P_{I_l}\| \leq \alpha$  pour  $l = 1, \dots, s$ .

Pour  $l \in \{1, \dots, s\}$  fixé, on a  $\mathbb{D}(P_{I_l} T P_{I_l}) = P_{I_l} \mathbb{D}(T) P_{I_l} = 0$ ; donc on peut trouver une partition  $(I_{l,1}, \dots, I_{l,s})$  de  $[d]$  telle que

$$\|P_{I_{l,l'}} P_{I_l} T P_{I_l} P_{I_{l,l'}}\| \leq \alpha \|P_{I_l} T P_{I_l}\| \leq \alpha^2 \quad \text{pour } l' = 1, \dots, s.$$

En énumérant les ensembles  $I_l \cap I_{l,l'}$  pour  $l, l' = 1 \dots s$ , on obtient ainsi une partition  $\mathcal{I}^2$  de  $[d]$  en  $s^2$  morceaux telle que  $\|P_I T P_I\| \leq \alpha^2$  pour tout  $I \in \mathcal{I}^2$ .

En répétant ce raisonnement, on voit que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $\mathcal{I}^N$  de  $[d]$  en  $s^N$  morceaux telle que  $\|P_I T P_I\| \leq \alpha^N$  pour tout  $I \in \mathcal{I}^N$ ; ce qui termine la preuve du Fait 2 puisque  $\alpha < 1$ .  $\square$

Par les Faits 1 et 2, la preuve de la proposition est maintenant terminée.  $\square$

*Remarque 1.* Le Fait 2 utilisé plus haut admet une version infini-dimensionnelle : *S’il existe une constante  $\alpha < 1$  tels que tout opérateur auto-adjoint  $T$  sur  $\ell^2$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\alpha\|T\|$ -pavable en un nombre fini de morceaux, alors tous les opérateurs sur  $\ell^2$  sont pavables.* La preuve est identique à celle du Fait 2.

*Remarque 2.* Dans [1], Akemann et Anderson proposent une conjecture qui entraîne immédiatement AA( $\delta$ ) pour tout  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$  : *si  $P$  est une projection sur  $\mathbb{C}^d$ , alors il existe une projection diagonale  $Q$  telle*

$$\max\left(\|QPQ\|, \|(1-Q)P(1-Q)\|\right) \leq \frac{1}{2} + \|\mathbb{D}(P)\|.$$

Plus précisément, la validité de cette conjecture entraînerait AA( $\delta$ ) avec témoins  $r := 2$  et  $\eta := 1 - (\frac{1}{2} + \delta)$ . Cependant, Weaver a montré dans [52] que cette conjecture est fausse.

*Remarque 3.* La Proposition 5.1 enrichit notre liste de formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer :

$$\begin{aligned} \text{(KS)} &\iff \text{AA}(\delta) \text{ est vraie pour un } \delta \geq \frac{1}{2} \\ &\iff \text{AA}(\delta) \text{ est vraie pour tout } \delta \in (0, 1). \end{aligned}$$

On l’a écrit de cette façon pour bien insister sur le fait que plus  $\delta$  est grand, plus l’énoncé AA( $\delta$ ) est fort (ce qui est évident); et aussi pour bien rappeler que la valeur  $\delta = \frac{1}{2}$  semble cruciale, ce qui est assez clair au vu de la preuve précédente.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que le passage de AA( $\frac{1}{2}$ ) à AA( $\delta$ ) pour tout  $\delta \in (0, 1)$  est très indirect : on passe par la propriété de pavage, qui entraîne “trivialement” AA( $\delta$ ) pour tout  $\delta$ . Incidemment, un coup d’oeil à la preuve du Corollaire 4.4 montre qu’il est également très facile de montrer que la propriété de pavage entraîne (KS). La suite ne fera que confirmer que “le plus fort, c’est toujours le pavage”.

**5.2. Version infini-dimensionnelle.** Pour  $\delta \in (0, 1)$  donné, il est très facile de formuler une version infini-dimensionnelle de  $AA(\delta)$ , qu'on notera dans la suite  $AA(\delta)_\infty$  : Pour toute projection  $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$ , on peut trouver une partition finie  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| < 1$  pour  $k = 1, \dots, r$ . Au vu de la Proposition 4.7, le résultat suivant n'est pas très surprenant.

**Proposition 5.2.** *Pour tout  $\delta \in (0, 1)$  les énoncés  $AA(\delta)$  et  $AA(\delta)_\infty$  sont équivalents.*

*Démonstration.* Le fait que  $AA(\delta)_\infty$  entraîne  $AA(\delta)$  n'est pas difficile à voir : on procède par contraposée, comme dans la preuve de la Proposition 4.7.

Pour la réciproque, il est très tentant (et tout à fait pertinent) d'invoquer le Lemme de sélection de Rado, voire de dire que "le résultat est clair par des arguments standard" (à base de Rado) ; mais bizarrement, ce n'est pas tout à fait aussi simple. Ce qui pose problème est que si  $P$  est une projection sur  $\ell^2$  et si  $I \subseteq \mathbb{N}$ , alors  $P_I P P_I$  n'a aucune raison d'être encore une projection ; ce qui empêche de recopier purement et simplement la preuve de la Proposition 4.7. Il va donc falloir se fatiguer un peu plus.

Le point clé est le fait suivant.

**Fait.** Soit  $\delta \in (0, 1)$ , et supposons que  $AA(\delta)$  soit vérifié par toutes les projections  $P$  sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$  avec "témoins"  $r$  et  $\eta$ . Alors  $AA(\delta)$  est en fait vérifié par tous les opérateurs  $T$  sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$  tels que  $0 \leq T \leq Id$ , avec les mêmes témoins.

*Preuve du Fait.* Fixons  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  vérifiant  $0 \leq T \leq Id$  et  $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$ . L'idée est de construire une projection  $P$  agissant sur  $\mathbb{C}^{d+N}$  pour un certain entier  $N$ , telle que

$$(5.1) \quad P_{[d]} T P_{[d]} = T \quad \text{et} \quad \|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta.$$

Admettons provisoirement avoir su construire  $P$ .

Par  $AA(\delta)$  et comme  $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$ , on peut trouver une partition  $(J_1, \dots, J_r)$  de  $[d + N]$  telle que

$$\|P_{J_k} P P_{J_k}\| \leq (1 - \eta) \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Si on pose  $I_k := J_k \cap [d]$ , alors les  $I_k$  forment une partition de  $[d]$  ; et comme  $T = P_{[d]} P P_{[d]}$ , on a

$$\|P_{I_k} T P_{I_k}\| = \|P_{[d]} P_{J_k} P P_{J_k} P_{[d]}\| \leq \|P_{J_k} P P_{J_k}\| \leq 1 - \eta.$$

Ainsi, l'opérateur  $T$  est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r$  morceaux et la preuve du Fait est terminée... *modulo* la construction de la projection  $P$  vérifiant (5.1).

Rappelons la notation (bien connue) suivante : si  $u$  et  $v$  sont des vecteurs non nuls de  $\mathbb{C}^d$ , on note  $u \otimes v$  l'opérateur de rang 1 sur  $\mathbb{C}^d$  défini par

$$(u \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle u.$$

On voit de suite que si  $\|u\| = 1$ , alors  $u \otimes u$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{C}u$ .

*Private joke.* Il y a là matière à *litige* : pourquoi  $\langle x, v \rangle u$  et pas  $\langle x, u \rangle u$ . Une raison est qu'avec la définition adoptée,  $u \otimes v$  dépend linéairement de  $u$  et anti-linéairement de  $v$ , ce qui est conforme à la convention retenue pour le produit scalaire. Une autre raison, est qu'on a une "formule de composition" facile à retenir :  $(u \otimes v)(u' \otimes v') = \langle u', v \rangle u \otimes v'$ .

Comme l'opérateur  $T$  est auto-adjoint, il se diagonalise en base orthonormée. Avec la notation ci-dessus, cela signifie qu'on peut trouver une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_d)$

de  $\mathbb{C}^d$  et des nombres réels  $\lambda_i$  tels que

$$T = \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i \otimes u_i.$$

De plus, on a  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  pour tout  $i$  car  $0 \leq T \leq Id$ .

Soit  $\eta > 0$  à choisir, et soit  $N \in \mathbb{N}$  un entier suffisamment grand pour qu'on puisse trouver des vecteurs  $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{C}^N$  deux à deux orthogonaux (par exemple, à supports disjoints) vérifiant

$$\|v_i\| = 1 \text{ et } \|v_i\|_\infty^2 \leq \eta \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, d\}.$$

On définit des vecteurs  $w_i \in \mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{d+N}$  par

$$w_i := \sqrt{\lambda_i} u_i \oplus \sqrt{1 - \lambda_i} v_i.$$

Un instant de réflexion montre que les  $w_i$  sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux. Par conséquent, l'opérateur

$$P := \sum_{i=1}^d w_i \otimes w_i$$

est une *projection orthogonale* de  $\mathbb{C}^{d+N}$ . On va voir que  $P$  convient si  $\eta$  est suffisamment petit.

La décomposition ‘‘par blocs’’ de  $P$  correspondant à la décomposition  $\mathbb{C}^{d+N} = \mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^N$  s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} A & * \\ * & B \end{pmatrix},$$

où

$$A = \sum_{i=1}^d (\sqrt{\lambda_i} u_i) \otimes (\sqrt{\lambda_i} u_i) = \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i \otimes u_i = T,$$

et de même

$$B = \sum_{i=1}^d (1 - \lambda_i) v_i \otimes v_i.$$

On a donc  $P_{[d]} P P_{[d]} = T$ , et  $\|\mathbb{D}(P)\| = \max(\|\mathbb{D}(T)\|, \|\mathbb{D}(B)\|)$ . Comme  $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$ , il suffit donc de voir qu'on peut choisir  $\eta$  de sorte que  $\|\mathbb{D}(B)\| \leq \delta$ .

En notant  $(e_j)_{j \in [d+N]}$  la base canonique de  $\mathbb{C}^{d+N}$ , on a

$$\|\mathbb{D}(B)\| = \sup_{d+1 \leq j \leq N} \langle B e_j, e_j \rangle;$$

et vu la forme de  $B$  :

$$\langle B e_j, e_j \rangle = \sum_{i=1}^d (1 - \lambda_i) |\langle e_j, v_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^d |\langle e_j, v_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^d \|v_i\|_\infty^2 \leq d\eta.$$

Il suffit donc de choisir  $\eta \leq \delta/d$  pour obtenir  $\|\mathbb{D}(B)\| \leq \delta$ .

□

Grâce au Fait, la fin de la preuve de la proposition est maintenant une application directe du Lemme de sélection de Rado. En effet, si  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifie  $0 \leq T \leq Id$  et  $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$  alors  $P_I T|_{E_I}$  possède les mêmes propriétés pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$ , où on a posé comme d'habitude  $E_I = [e_i; i \in I]$ . Par le Fait, on sait donc que si  $AA(\delta)$  est vérifiée pour les projections avec témoins  $r$  et  $\eta$  alors, pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $P_{[d]} T|_{E_{[d]}} \in \mathcal{B}(E_{[d]}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r$  morceaux. Comme dans la preuve de la Proposition 4.7, on en déduit immédiatement que  $T$  lui-même est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r$  morceaux.  $\square$

*Remarque.* La preuve de la Proposition 5.2 montre en fait que  $AA(\delta)$  est équivalent à une version plus forte de  $AA(\delta)_\infty$  que celle donnée plus haut : *Il existe un entier  $r \in \mathbb{N}$  et une constante  $\eta \in (0, 1)$  tels que tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $0 \leq T \leq Id$  et  $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$  est  $(1 - \eta)$ -pavable en  $r$  morceaux.* Autrement dit, on a des estimations uniformes sur les pavages (ce qui n'est pas très surprenant) et, surtout,  $AA(\delta)_\infty$  n'est pas vrai uniquement pour des *projections*. La même remarque vaut pour la version fini-dimensionnelle (c'est exactement le contenu du Fait isolé dans la preuve de la proposition) : si  $AA(\delta)$  est vrai, alors il est vrai pour tous les opérateurs  $T$  vérifiant  $0 \leq T \leq Id$ .

**5.3. Toute la vérité sur  $AA(\delta)$ .** Pour ce qu'on veut faire de  $AA(\delta)$  en relation avec le Problème de Kadison-Singer, la Proposition 5.1 suffira largement. Cependant, le résultat suivant, dû à Akemann-Anderson [1], est assez remarquable.

**Théorème 5.3.** *Si  $AA(\delta)$  est vrai pour un  $\delta \in (0, 1)$ , alors (KS) est vrai; et par conséquent,  $AA(\delta)$  est vrai pour tout  $\delta \in (0, 1)$ .*

La preuve est de loin ce qu'on trouvera de plus sophistiqué dans cet article. On va en donner les arguments essentiels, en suivant de près les idées de Bice [9]. Cependant, pour ne pas allonger démesurément cette sous-section, on admettra quelques points techniques dont la preuve appartient "vraiment" à la théorie des  $C^*$ -algèbres.

On rappelle que si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , on note  $\varphi_{\mathcal{U}}$  l'état pur associé sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$ , et  $\Phi_{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{U}} \circ \mathbb{D}$  son prolongement "canonique" à  $\mathcal{B}(\ell^2)$  :

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle T e_n, e_n \rangle \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{U}} = (\Phi_{\mathcal{U}})|_{\mathcal{D}(\ell^2)}.$$

Le lemme suivant est dû à Anderson [4].

**Lemme 5.4.** *Si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , alors  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est un état pur de  $\mathcal{B}(\ell^2)$ .*

*Démonstration.* Elle est très jolie ; mais on la fera plus tard : voir le Théorème 7.8.  $\square$

*Remarque.* On peut observer que ce lemme est une conséquence triviale de (KS) et du Corollaire 3.2, puisque  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est un prolongement de  $\varphi_{\mathcal{U}}$  ; mais on ne sait pas que (KS) est vrai...

Introduisons maintenant une terminologie très "tendance".

**Définition 5.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\mathcal{F}$  une partie de  $\mathcal{A}^+$  contenant  $\mathbf{1}$ . On dira que  $\mathcal{F}$  est un **filtre quantique** si*

$$\forall b_1, \dots, b_n \in \mathcal{F} : \|b_1 \cdots b_n\| = 1.$$

Il est bon de garder à l'esprit que la propriété "être un filtre quantique" est héréditaire au sens suivant : si  $\mathcal{F}$  est un filtre quantique, alors toute partie  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$  contenant  $\mathbf{1}$  est un filtre quantique.

*Exemple 1.* Si  $\Phi$  est un état sur  $\mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{F}_\Phi^+ = \{b \in \mathcal{A}; 0 \leq b \leq \mathbf{1} \text{ et } \Phi(b) = 1\}$  est un filtre quantique.

*Démonstration.* On a déjà vu (Fait 4.1) que si  $b \in \mathcal{F}_\Phi^+$ , alors  $\Phi(bx) = \Phi(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . Donc, si  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{F}_\Phi^+$ , alors  $\Phi(b_1 \cdots b_n) = 1$  et par conséquent  $\|b_1 \cdots b_n\| \geq 1$  puisque  $\|\Phi\| = 1$ . D'où  $\|b_1 \cdots b_n\| = 1$  car on a également  $\|b_1 \cdots b_n\| \leq \|b_1\| \cdots \|b_n\| = 1$ .  $\square$

*Exemple 2.* Si  $\mathcal{U}$  est un filtre sur  $\mathbb{N}$ , alors  $\mathcal{F}_\mathcal{U} := \{P_I; I \in \mathcal{U}\}$  est un filtre quantique dans  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\ell^2)$ .

*Démonstration.* C'est clair car  $P_{I_1} \cdots P_{I_n} = P_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$  pour tous  $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{N}$  et une projection (orthogonale) non nulle est de norme 1.  $\square$

*Remarque.* Si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre alors, avec la notation de l'Exemple 1, on voit que  $\mathcal{F}_\mathcal{U}$  est exactement l'intersection de  $\mathcal{F}_{\Phi_\mathcal{U}}^+$  avec l'ensemble des projections diagonales. (Incidentement, c'est une autre façon de montrer que  $\mathcal{F}_\mathcal{U}$  est un filtre quantique).

Le lemme suivant montre qu'un état pur est entièrement déterminé par le filtre quantique qu'il définit.

**Lemme 5.6.** *Si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des états purs sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , alors*

$$\Phi = \Psi \iff \mathcal{F}_\Phi^+ \subseteq \mathcal{F}_\Psi^+ \iff \mathcal{F}_\Psi^+ \subseteq \mathcal{F}_\Phi^+.$$

La preuve de ce lemme utilise le langage de la théorie des représentations, et on ne la donnera donc pas. Pour le lecteur/la lectrice bien au point sur les  $C^*$ -algèbres, on peut quand même dire que ce lemme est une conséquence pas trop difficile du **Théorème de transitivité de Kadison**. On renvoie à [9] pour les détails.

Signalons également que le lemme est évident lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\ell^2)$  et que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des états de la forme  $\Phi = \Phi_\mathcal{U}$  et  $\Psi = \Phi_\mathcal{V}$ , où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des ultrafiltres sur  $\mathbb{N}$ . En effet, si  $\mathcal{F}_\Phi^+ \subseteq \mathcal{F}_\Psi^+$  alors on a en particulier  $\mathcal{F}_\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_\mathcal{V}$ , autrement dit  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , et donc  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  puisque  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre.

**Lemme 5.7.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre. Si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^+$  est un filtre quantique, alors il existe un état pur  $\Phi$  tel que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\Phi^+$ .*

*Remarque.* En particulier, on voit que les "ultrafiltres quantiques", *i.e.* les filtres quantiques maximaux pour l'inclusion, sont exactement ceux de la forme  $\mathcal{F}_\Phi^+$ , où  $\Phi$  est un état pur sur  $\mathcal{A}$ .

*Preuve du Lemme 5.7.* On commence par une Cauchy-Schwarzerie :

**Fait 1.** Si  $b, x, y \in \mathcal{A}$  vérifient  $0 \leq b \leq \mathbf{1}$  et  $\|x\|, \|y\| \leq 1$ , alors

$$|\Phi(xby)| \leq \Phi(b)^{1/4} \quad \text{pour tout état } \Phi \text{ sur } \mathcal{A}.$$

*Preuve du Fait 1.* Par calcul fonctionnel, on peut écrire  $b = u^2$ , avec  $0 \leq u \leq \mathbf{1}$ . On a alors

$$\begin{aligned} |\Phi(xby)| &= |\Phi(xuuy)| \\ &\leq \Phi((xu)^*(xu))^{1/2} \Phi((uy)^*(uy))^{1/2} \\ &\leq \Phi(ux^*xu)^{1/2} \quad \text{car } \|(uy)^*(uy)\| \leq 1 \\ &\leq \left[ \Phi(u^*u)^{1/2} \Phi((x^*xu)^*(x^*xu)) \right]^{1/2} \\ &\leq \Phi(b)^{1/4} \quad \text{car } \|(x^*xu)^*(x^*xu)\| \leq 1. \end{aligned}$$

□

Pour  $b \in \mathcal{A}^+$  vérifiant  $\|b\| = 1$ , notons  $\mathbf{S}_b$  l'ensemble de tous les états  $\Phi$  sur  $\mathcal{A}$  tels que  $\Phi(b) = 1$ . Par le Corollaire 3.3, on sait que  $\mathbf{S}_b$  est toujours *non vide*. De plus,  $\mathbf{S}_b$  est une partie préfaiblement fermée de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ .

**Fait 2.** Si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^+$  est un filtre quantique, alors  $\mathbf{S}_{b_1} \cap \cdots \cap \mathbf{S}_{b_N} \neq \emptyset$  pour tous  $b_1, \dots, b_N \in \mathcal{F}$ .

*Preuve du Fait 2.* Fixons  $b_1, \dots, b_N \in \mathcal{F}$ , et posons

$$b := b_N \dots b_1 b_1 \cdots b_N = (b_1 \cdots b_N)^*(b_1 \cdots b_N).$$

Alors  $b \geq 0$ , et  $\|b\| = 1$  car  $\mathcal{F}$  est un filtre quantique. On a donc  $\mathbf{S}_b \neq \emptyset$ , *i.e.* on peut trouver un état  $\Phi$  tel que  $\Phi(b) = 1$ .

Par le Fait 1, on a  $\Phi(b) \leq \Phi(b_j)^{1/4}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , et donc  $\Phi(b_j) = 1$ ; autrement dit,  $\Phi \in \mathbf{S}_{b_1} \cap \cdots \cap \mathbf{S}_{b_N}$ . □

Comme  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est compact, il découle du Fait 2 que l'ensemble

$$\mathbf{S}_{\mathcal{F}} := \bigcap_{b \in \mathcal{F}} \mathbf{S}_b$$

est *non vide*. De plus,  $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$  est visiblement convexe et préfaiblement compact. Par le Théorème de Krein-Milman,  $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$  possède donc au moins un point extrémal  $\Phi$ .

Comme  $\Phi \in \mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ , on a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+$ . D'autre part, il est facile de vérifier que  $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$  est une *partie extrémale* de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ ; et on en déduit que  $\Phi$  est en fait un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ , *i.e.* un état pur. Les détails sont laissés en exercice. □

**Définition 5.8.** On dira que deux états purs  $\Phi$  et  $\Psi$  sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  sont **orthogonaux** s'il existe  $b \in \mathcal{A}$  avec  $0 \leq b \leq \mathbf{1}$  tel que  $\Phi(b) = 1$  et  $\Psi(b) = 0$ .

La terminologie n'est pas "standard", mais elle semble raisonnablement suggestive. De plus, la notion d'orthogonalité est assez pertinente pour ce qui nous concerne :

**Lemme 5.9.** Soit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^+$  un filtre quantique, et soit  $\Phi$  un état pur de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+$ . Alors on a l'alternative suivante : ou bien  $\Phi$  est le seul état pur tel que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+$ , ou bien il existe un état pur  $\Psi$  orthogonal à  $\Phi$  tel que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\Psi}^+$ .

La preuve de ce lemme est encore un peu plus délicate que celle du Lemme 5.6. Les ingrédients essentiels sont le Théorème de transitivité de Kadison et une version "renforcée" du Lemme 5.7; voir [9] pour les détails.

Voici enfin le dernier lemme dont on aura besoin. En réalité, on ne va utiliser que la partie "triviale" de ce lemme; mais pour se faire plaisir, on peut bien prouver le lemme en entier.

Rappelons que si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  le filtre quantique  $\{P_I; I \in \mathcal{U}\}$ ; autrement dit, l'ensemble de toutes les projections diagonales  $P$  telles que  $\varphi_{\mathcal{U}}(P) = 1$ .

**Lemme 5.10.** Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ . Si  $\Phi$  est un état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$ , alors

$$\Phi \text{ prolonge } \varphi_{\mathcal{U}} \implies \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+;$$

et la réciproque est vraie si la restriction de  $\Phi$  à  $\mathcal{D}(\ell^2)$  est un état pur.

*Démonstration.* Il est évident que si  $\Phi$  prolonge  $\varphi_{\mathcal{U}}$  alors  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+$ ; et comme on l'a dit, on aura uniquement besoin de cette implication là pour démontrer le Théorème 5.3.

La preuve de l'implication non triviale repose sur le fait suivant, qui est une version "non commutative" de l'inégalité de Markov  $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X)$ . L'énoncé fait intervenir le **calcul fonctionnel borélien** pour un opérateur normal. Pour ce qui nous concerne, il suffira de savoir que si  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est un opérateur normal, alors on peut définir  $f(T)$  pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\sigma(T)$  par la formule  $f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_T(\lambda)$ , où  $E_T$  est la **mesure spectrale** de  $T$ , et que toutes les propriétés raisonnables qu'on peut imaginer sont vraies.

**Fait.** Soit  $\Phi$  un état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$ , et soit  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $0 \leq T \leq Id$ . Pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , on a

$$\Phi(\mathbf{1}_{[\alpha, 1]}(T)) \leq \frac{1}{\alpha} \Phi(T) \quad \text{et} \quad \Phi(\mathbf{1}_{[0, \alpha]}(T)) \leq \frac{1}{1 - \alpha} (1 - \Phi(T)).$$

*Preuve du Fait.* En notant  $E_T$  la mesure spectrale de  $T$ , on a

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{1}_{[\alpha, 1]}(T)) &= \Phi \left( \int_{[\alpha, 1]} dE_T(\lambda) \right) \\ &\leq \Phi \left( \int_{[\alpha, 1]} \frac{\lambda}{\alpha} dE_T(\lambda) \right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \Phi \left( \int_{[0, 1]} \lambda dE_T(\lambda) \right) = \frac{1}{\alpha} \Phi(T). \end{aligned}$$

De même :

$$\Phi(\mathbf{1}_{[0, \alpha]}(T)) = \Phi \left( \int_{[0, \alpha]} dE_T(\lambda) \right) \leq \Phi \left( \int_{[0, \alpha]} \frac{1 - \lambda}{1 - \alpha} dE_T(\lambda) \right) \leq \frac{1}{1 - \alpha} \Phi(Id - T).$$

□

*Remarque.* En réalité, on ne va utiliser le Fait que pour des opérateurs *diagonaux*. Dans ce cas le calcul fonctionnel se définit directement : si  $D$  est un opérateur diagonal de diagonale  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $f(D)$  est l'opérateur diagonal de diagonale  $(f(\theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Dit autrement : en identifiant  $\mathcal{D}(\ell^2)$  à  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ , on a  $f(\theta) = f \circ \theta$  pour  $\theta \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ; en particulier,  $\mathbf{1}_A(\theta) = \mathbf{1}_{\{\theta \in A\}}$  pour tout borélien  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Par ailleurs, un état  $\Phi$  sur  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  s'identifie à une mesure positive *finiment additive*  $\mathfrak{m}$  sur  $\mathbb{N}$  telle que  $\mathfrak{m}(\mathbb{N}) = 1$ ; et il est commode d'écrire  $\Phi(\theta) = \int_{\mathbb{N}} \theta(n) d\mathfrak{m}(n)$ . Le Fait devient alors une *conséquence* de l'inégalité de Markov usuelle (qui est valable pour les mesures finiment additives).

Fixons maintenant un état  $\Phi$  sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$ . Notons  $\varphi$  la restriction de  $\Phi$  à  $\mathcal{D}(\ell^2)$  et supposons que  $\varphi$  soit un état pur et  $\varphi \neq \varphi_{\mathcal{U}}$ . Il s'agit de voir que  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{F}_{\Phi}^+$ .

D'après le Lemme 5.6,  $\mathcal{F}_{\varphi_{\mathcal{U}}}^+$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{F}_{\varphi}^+$ ; autrement dit, on peut trouver un opérateur diagonal  $D$  avec  $0 \leq D \leq 1$  tel que  $\varphi_{\mathcal{U}}(D) = 1$  et  $\varphi(D) < 1$ .

Choisissons  $\alpha \in (0, 1)$  tel que  $\frac{1}{\alpha} \varphi(D) < 1$ . Alors  $P := \mathbf{1}_{[\alpha, 1]}(D)$  est une projection *diagonale* car  $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$ .

On a  $\varphi_{\mathcal{U}}(P) = \varphi_{\mathcal{U}}(Id - \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(D)) = 1 - \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbf{1}_{[0,\alpha]}(D))$ ; et par le Fait appliqué à  $\Phi_{\mathcal{U}}$  :

$$\varphi_{\mathcal{U}}(\mathbf{1}_{[0,\alpha]}(D)) \leq \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varphi_{\mathcal{U}}(D)) = 0.$$

Donc  $\varphi_{\mathcal{U}}(P) = 1$ , i.e.  $P \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  puisque  $P$  est une projection diagonale.

Mais on a aussi  $\varphi(P) = \varphi(\mathbf{1}_{[\alpha,1]}(D)) \leq \frac{1}{\alpha} \varphi(D) < 1$  (toujours par le Fait), et donc  $P \notin \mathcal{F}_{\varphi}^+$ . On a donc bien montré que  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{F}_{\Phi}^+$ , ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

On peut maintenant donner la

*Preuve du Théorème 5.3.* Supposons que l'énoncé AA( $\delta$ ) soit vrai pour un certain  $\delta > 0$ . Alors sa version infini-dimensionnelle AA( $\delta$ ) $_{\infty}$  est vraie également, d'après la Proposition 5.2.

Supposons cependant que (KS) soit faux; autrement dit, qu'on puisse trouver un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{N}$  tel que  $\Phi_{\mathcal{U}}$  ne soit pas le seul état sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$  prolongeant  $\varphi_{\mathcal{U}}$ .

Par le Lemme 5.10,  $\Phi_{\mathcal{U}}$  n'est pas le seul état  $\Phi$  sur  $\mathcal{B}(\ell^2)$  tel que  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi}^+$ . De plus,  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est un état pur d'après le Lemme 5.4. Par le Lemme 5.9, il existe donc un état pur  $\Psi$  orthogonal à  $\Phi_{\mathcal{U}}$  tel que  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{F}_{\Psi}^+$ . Soit  $B \in \mathcal{B}(\ell^2)$  avec  $0 \leq B \leq Id$  tel que

$$\Phi_{\mathcal{U}}(B) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(B) = 1.$$

Comme  $0 = \Phi_{\mathcal{U}}(B) = \mathcal{U}\text{-lim} \langle Be_n, e_n \rangle$ , on peut trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que

$$\langle Be_n, e_n \rangle < \delta \quad \text{pour tout } n \in I.$$

Alors l'opérateur  $T := P_I B P_I$  vérifie  $0 \leq T \leq Id$  et  $\|\mathbb{D}(T)\| = \|P_I \mathbb{D}(B) P_I\| \leq \delta$ . Par AA( $\delta$ ) $_{\infty}$ , on peut donc trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\|P_{I_k} T P_{I_k}\| < 1$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

Comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, l'un des  $I_k$  appartient à  $\mathcal{U}$ . Alors  $J := I \cap I_k \in \mathcal{U}$ , et

$$\|P_J B P_J\| = \|P_{I_k} P_I B P_I P_{I_k}\| = \|P_{I_k} T P_{I_k}\| < 1.$$

Mais comme  $\Psi(B) = 1$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{F}_{\Psi}^+$ , on a  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \cup \{B\} \subseteq \mathcal{F}_{\Psi}^+$ , et donc  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \cup \{B\}$  est un filtre quantique. Comme  $P_J$  et  $B$  appartiennent à ce filtre quantique, on a donc  $\|P_J B P_J\| = 1$ , d'où une contradiction.  $\square$

## 6. KADISON-SINGER ET LA THÉORIE DES REPÈRES

Dans cette section, on change complètement d'univers : on va voir que (KS) est équivalent à un autre énoncé très célèbre, la **Conjecture de Feichtinger**. Cette conjecture appartient à ce qu'on appelle en anglais la théorie des **frames**, qui n'a a priori pas grand chose à voir avec les  $C^*$ -algèbres.

**6.1. Suites de Bessel, repères et suites de Riesz.** Dans cette sous-section,  $H$  est un espace de Hilbert séparable, éventuellement de dimension finie.

**Définition 6.1.** Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite finie ou infinie d'éléments de  $H$ .

- (1) On dit que  $(f_i)$  est une **suite de Bessel** s'il existe une constante  $B < \infty$  telle que

$$\forall f \in H : \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

- (2) On dit que  $(f_i)$  est un **repère** (pour les anglophones : une **frame**) s'il existe deux constantes  $A > 0$  et  $B < \infty$  telles que

$$\forall f \in H : A \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

- (3) On dit que  $(f_i)$  est une **suite de Riesz** s'il existe deux constantes  $c > 0$  et  $C < \infty$  telles que

$$c \sum_{i \in I} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i f_i \right\|^2 \leq C \sum_{i \in I} |a_i|^2$$

pour toute suite à support fini  $(a_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}$ .

*Remarque.* La notion de repère a été introduite par R. Duffin et A. Schaeffer en 1952 ([24]), qui en avaient besoin pour des questions d'échantillonnage et d'analyse de Fourier "non harmonique" (où typiquement on s'intéresse à des "séries de Fourier"  $\sum c_n e^{i\lambda_n x}$  sur  $[0, 2\pi]$  avec des  $\lambda_n$  non entiers). Par la suite, les repères sont devenus très populaires dans le milieu des "ondelettistes".

Pour fixer les idées, il est bon de faire quelques remarques triviales concernant ces définitions.

- La suite "vide" est autorisée. C'est une suite de Riesz, mais pas un repère.
- La meilleure constante  $B$  possible pour une suite de Bessel  $(f_i)$  s'appelle la **constante de Bessel** de  $(f_i)$ . On pourrait définir de même les "constantes de repère" d'un repère  $(f_i)$ .
- Toute suite de Bessel est bornée.
- Toute suite *finie* est une suite de Bessel.
- Tout repère est une suite de Bessel.
- Si  $(f_i)_{i \in I}$  est un repère de  $H$ , alors  $[f_i; i \in I] = H$ . Cela vient de l'estimation inférieure, qui entraîne que si  $f \in H$  est orthogonal à tous les  $f_i$ , alors  $f = 0$ .
- Toute suite orthonormale est une suite de Riesz. Plus généralement, il suffit de supposer que  $(f_i)$  est orthogonale avec  $0 < \inf_i \|f_i\| \leq \sup_i \|f_i\| < \infty$ .
- Toute sous-suite d'une suite de Bessel est une suite de Bessel, et toute sous-suite d'une suite de Riesz est une suite de Riesz.
- Toute **réunion finie** de suites de Bessel est une suite de Bessel; et c'est un repère si au moins une de ces suites est un repère. Concernant le mot "réunion", on l'entendra toujours au sens de "réunion en disjointisant les ensembles d'indices". Par exemple, la suite  $(f_i) \cup (f_i)$  est la suite  $(f_i)$  où chaque terme est répété deux fois. (Cette précision est assez importante : typiquement, dans un repère on autorise les "redondances".)

La théorie des repères (des frames...) est en croissance exponentielle depuis quelques années, et il n'est pas question ici d'en faire un tour d'horizon exhaustif. Au contraire, on se limitera au "minimum vital" indispensable pour comprendre le lien avec le Problème de Kadison-Singer. Dans ce qui suit, on notera toujours  $(e_i)_{i \in I}$  la base canonique de  $\ell^2(I)$ , pour tout ensemble d'indices  $I$ .

**Proposition 6.2.** *Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite d'éléments de  $H$ .*

- (1)  $(f_i)$  est une suite de Bessel si et seulement si il existe un (unique) opérateur borné  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  tel que  $S e_i = f_i$  pour tout  $i \in I$ . Dans ce cas, la constante de Bessel de  $(f_i)$  est égale à  $\|S\|^2$ . L'opérateur  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  s'appelle l'**opérateur de synthèse** associé à  $(f_i)$ .

- (2)  $(f_i)$  est une suite de Riesz si et seulement si il existe un isomorphisme  $J : \ell^2(I) \rightarrow [f_i; i \in I]$  tel que  $Je_i = f_i$  pour tout  $i \in I$ .
- (3) Si  $(f_i)$  est une suite de Bessel, alors c'est un repère si et seulement si l'opérateur de synthèse  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  est surjectif.

*Démonstration.* Supposons que  $(f_i)$  soit une suite de Bessel, avec une constante au plus égale à  $B$  :

$$\sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad \text{pour tout } f \in H.$$

On peut alors définir un opérateur  $A : H \rightarrow \ell^2(I)$  (qu'on appelle l'**opérateur d'analyse** associé à  $(f_i)$ ) par

$$Af = (\langle f, f_i \rangle)_{i \in I}.$$

L'opérateur  $A$  est borné, avec  $\|A\|^2 \leq B$ . On a par définition

$$\langle f, A^*e_i \rangle = \langle Af, e_i \rangle = \langle f, f_i \rangle$$

pour tout  $i \in I$  et tout  $f \in H$ ; donc  $S := A^*$  vérifie  $Se_i = f_i$ ,  $i \in I$ .

Inversement, supposons qu'il existe un opérateur  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  tel que  $Se_i = f_i$ ,  $i \in I$ . Pour  $f \in H$ , on a alors

$$\sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |\langle S^*f, e_i \rangle|^2 = \|S^*f\|^2 \leq \|S^*\|^2 \|f\|^2;$$

donc  $(f_i)$  est une suite de Bessel de constante  $B \leq \|S^*\|^2 = \|S\|^2$ .

Enfin, il est clair d'après les calculs précédents que si  $(f_i)$  est une suite de Bessel et si  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  est l'opérateur de synthèse associé, alors sa constante de Bessel est égale à  $\|S^*\|^2 = \|S\|^2$ .

Le point (2) est évident, par définition d'une suite de Riesz.

Pour démontrer (3), supposons que  $(f_i)$  soit une suite de Bessel, et soit  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  l'opérateur de synthèse associé. On a vu dans la preuve de (1) qu'on a

$$\sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 = \|S^*f\|^2 \quad \text{pour tout } f \in H.$$

Donc  $(f_i)$  est un repère si et seulement  $\|S^*f\| \geq c \|f\|$  pour une certaine constante  $c > 0$  (et tout  $f \in H$ ). Cela signifie que l'opérateur  $S^*$  est *injectif à image fermée*, autrement dit que  $S$  est surjectif.  $\square$

De cette proposition, on déduit immédiatement les faits suivant, qui illustrent assez bien la différence entre suites de Riesz et repères.

**Corollaire 6.3.** *Une suite finie  $(f_i)_{i \in I} \subseteq H$  est une suite de Riesz si et seulement si elle est linéairement indépendante, et  $(f_i)$  est un repère si et seulement si c'est une famille génératrice de  $H$ .*

Une autre conséquence immédiate est le

**Corollaire 6.4.** *Toute suite de Riesz  $(f_i)_{i \in I}$  est une suite de Bessel, et un repère de l'espace de Hilbert  $[f_i; i \in I]$  qu'elle engendre. Plus précisément,  $(f_i)$  est une suite de Riesz si et seulement si elle est de Bessel avec un opérateur de synthèse injectif à image fermée.*

Ce dernier résultat montre en particulier que *toute réunion finie de suites de Riesz est une suite de Bessel*; observation particulièrement importante pour ce qui va suivre.

**6.2. La Conjecture de Feichtinger.** La très célèbre “Conjecture de Feichtinger” est l’énoncé suivant, qu’on notera (F) : *Tout repère normalisé dans un espace de Hilbert est réunion finie de suites de Riesz.*

Il semble curieusement que cette conjecture ait été énoncée pour la première fois (par écrit) dans [17], et non pas dans les travaux de Feichtinger lui-même. Pour la petite histoire (merci à Stéphane Jaffard d’avoir interviewé le maître !), Feichtinger a eu l’idée de sa conjecture à propos des “repères de Gabor”, c’est-à-dire des repères de  $L^2(\mathbb{R})$  de la forme  $f_{m,n}(x) = g(x - ma)e^{inx}$ , où  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et les constantes  $a, b > 0$  sont fixées et  $m, n$  varient dans  $\mathbb{Z}$ . Intuitivement, si le réseau  $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$  est “assez dense”, alors la suite  $(f_{m,n})$  va vérifier l’estimation inférieure de repère ; mais si  $\Lambda$  est “trop dense”, alors  $(f_{m,n})$  risque de ne pas vérifier l’estimation supérieure, *i.e.* de ne pas être une suite de Bessel. À l’inverse, si les points de  $\Lambda$  sont “suffisamment éloignés les uns des autres”, alors  $(f_{m,n})$  va être une suite de Riesz. Maintenant, il est géométriquement plausible que si le réseau  $\Lambda$  n’est pas trop dense, alors on peut le décomposer en un nombre fini de paquets dont chacun est formé de points suffisamment éloignés les uns des autres. D’où la conjecture de Feichtinger dans ce contexte.

*Remarque 1.* Il est facile de voir que dans (F), on peut remplacer “repère normalisé” par “repère  $(f_i)$  tel que  $\inf_i \|f_i\| > 0$ ”.

*Remarque 2.* Telle quelle, la conjecture (F) est “mal posée”, car il n’est *pas vrai* que toute réunion finie de suites de Riesz soit un repère de l’espace de Hilbert qu’elle engendre.

*Démonstration.* Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie, et choisissons deux suites orthonormales  $(f_i)_{i \in I_1}$  et  $(f_i)_{i \in I_2}$  telles que  $F_1 + F_2$  ne soit pas fermé dans  $H$ , où  $F_k := [f_i; i \in I_k]$ . Soit alors  $I := I_1 \sqcup I_2$ , et soit  $S : \ell^2(I) \rightarrow H$  l’opérateur de synthèse associé à  $(f_i)_{i \in I}$ . Comme  $\ell^2(I) = \ell^2(I_1) \oplus \ell^2(I_2)$ , on a  $S\ell^2(I) = S\ell^2(I_1) + S\ell^2(I_2) = F_1 + F_2$ . Donc  $S\ell^2(I)$  est *strictement* contenu dans l’espace de Hilbert  $F := \overline{F_1 + F_2}$  engendré par  $(f_i)$ , et par suite  $(f_i)$  n’est pas un repère de  $F$ .  $\square$

La Remarque 2 est quelque peu déplaisante ; mais fort heureusement, il est très facile de donner une formulation “bien posée” de (F) :

**Lemme 6.5.** *La Conjecture de Feichtinger est équivalente à l’énoncé suivant, qu’on notera (B) : toute suite de Bessel normalisée est réunion finie de suites de Riesz.*

*Démonstration.* Supposons que (F) soit vraie, et soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite de Bessel normalisée dans un espace de Hilbert  $H$ . Soit également  $(f_i)_{i \in I'}$  une base orthonormale de  $H$ . Alors  $(f_i)_{i \in I \sqcup I'}$  est un repère, car c’est la réunion d’un repère et d’une suite de Bessel. Par (F), la suite  $(f_i)_{i \in I \sqcup I'}$  est donc réunion finie de suites de Riesz, donc  $(f_i)_{i \in I}$  aussi puisque toute sous-suite d’une suite de Riesz est une suite de Riesz.  $\square$

*Remarque.* Comme plus haut, on peut remplacer dans (B) “suite de Bessel normalisée” par “suite de Bessel  $(f_i)$  vérifiant  $\inf_i \|f_i\| > 0$ ”.

La proposition suivante, qu’on trouve dans [17], met en évidence un lien *a priori* surprenant entre Feichtinger et Kadison-Singer.

**Proposition 6.6.** *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (1) *Tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est pavable, *i.e.* (A) ;*
- (2) *pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, toute suite de Bessel normalisée est réunion finie de suites  $\varepsilon$ -Riesz, *i.e.* Riesz avec constantes  $c \geq 1 - \varepsilon$  et  $C \leq 1 + \varepsilon$  ;*

(3) la Conjecture de Feichtinger (F), sous la forme (B) ;

(4) “AA( $\delta$ ) $_{\infty}$  pour tout  $\delta \in (0, 1)$ ”.

*Démonstration.* L’implication (2)  $\implies$  (3) est évidente, et on sait déjà que (4) entraîne (1) ; donc il faut seulement montrer que (1) entraîne (2) et que (3) entraîne (4).

(1)  $\implies$  (2). Supposons (1) vérifiée, et fixons une suite de Bessel normalisée  $(f_i)_{i \in I}$  dans un espace de Hilbert séparable  $H$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $I = \mathbb{N}$  et  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ . Fixons également  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $S : \ell^2(\mathbb{N}) = H \rightarrow H$  l’opérateur de synthèse associé à  $(f_i)$ , et posons  $R := S^*S$  ; l’opérateur  $R$  est l’**opérateur de repère** associé à  $(f_i)$ . On a

$$\langle Re_i, e_i \rangle = \|Se_i\|^2 = \|f_i\|^2 = 1$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , et donc  $\mathbb{D}(R) = Id$ . Par (1), on peut donc trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que

$$\|P_{I_k}(R - Id)P_{I_k}\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Comme  $R$  est auto-adjoint, cela s’écrit encore

$$-\varepsilon Id \leq P_{I_k}(R - Id)P_{I_k} \leq \varepsilon Id ;$$

d’où  $-\varepsilon P_{I_k} \leq P_{I_k}(R - Id)P_{I_k} \leq \varepsilon P_{I_k}$  en multipliant à gauche et à droite par  $P_{I_k}$ , autrement dit

$$(6.1) \quad (1 - \varepsilon)P_{I_k} \leq P_{I_k}RP_{I_k} \leq (1 + \varepsilon)P_{I_k}.$$

Par ailleurs, pour toute suite à support fini  $(a_i)_{i \in I_k} \subseteq \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_k} a_i f_i \right\|^2 &= \left\langle S \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right), S \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right) \right\rangle \\ &= \left\langle R \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right), \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\rangle \\ &= \left\langle P_{I_k} R P_{I_k} \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right), \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Par (6.1), on en déduit

$$(1 - \varepsilon) \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I_k} a_i f_i \right\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2,$$

ce qui montre que la suite  $(f_i)_{i \in I_k}$  est  $\varepsilon$ -Riesz, pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ .

(3)  $\implies$  (4). Supposons (3) vérifiée, et fixons  $\delta \in (0, 1)$ . Soit également  $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$  une projection vérifiant  $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$ . On cherche une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| < 1$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

Comme  $\|\mathbb{D}(P)\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \langle Pe_i, e_i \rangle = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|Pe_i\|^2$ , les vecteurs  $f_i := (Id - P)e_i$  vérifient  $\|f_i\|^2 \geq 1 - \delta$  et on a donc  $\inf_i \|f_i\| > 0$ . De plus,  $(f_i)$  est une suite de Bessel puisque  $S := Id - P$  est un opérateur borné. Par (3), on peut donc trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que chaque suite  $(f_i)_{i \in I_k}$  soit une suite de Riesz.

Il existe ainsi une constante  $c > 0$  telle que

$$\left\| \sum_{i \in I_k} a_i (Id - P)e_i \right\|^2 \geq c \sum_{i \in I_k} |a_i|^2 = c \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$  et pour toute suite à support fini  $(a_i)_{i \in I_k} \subseteq \mathbb{C}$  ; d’où

$$\left\| P \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2 - \left\| (Id - P) \left( \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right) \right\|^2 \leq (1 - c) \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2.$$

Dit autrement : pour  $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i \in \ell^2$  quelconque, on a

$$\|PP_{I_k}x\|^2 \leq (1 - c) \|P_{I_k}x\|^2 \leq (1 - c) \|x\|^2;$$

et donc  $\|PP_{I_k}\|^2 \leq 1 - c$ .

Comme  $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| = \|(PP_{I_k})^*(PP_{I_k})\| = \|PP_{I_k}\|^2$ , on obtient donc finalement

$$\|P_{I_k}PP_{I_k}\| \leq 1 - c < 1 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

□

**6.3. AA( $\delta$ ) à la sauce repères : Weaver.** Dans cette sous-section, on va voir que pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , l'énoncé AA( $\delta$ ) se reformule de manière presque tautologique en termes de repères finis d'un type particulier. Cette observation est due à Weaver [53].

**Définition 6.7.** Soit  $C > 0$ . On dira qu'une suite  $(f_i)_{i \in I}$  dans un espace de Hilbert  $H$  est un **repère  $C$ -Parseval**, si on a

$$\forall f \in H : \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 = C \|f\|^2.$$

Par exemple, si  $C \in \mathbb{N}$ , alors une réunion de  $C$  bases orthonormées est un repère  $C$ -Parseval.

*Remarque.* La terminologie officielle est **repère serré avec constante  $C$** ; et en anglais :  **$C$ -tight frame**.

Le lemme suivant montre que les repères "Parsevalesques" finis sont exactement les images des suites orthonormales par des projections orthogonales, convenablement normalisées. On note comme d'habitude  $(e_i)_{i \in [d]}$  la base canonique de  $\mathbb{C}^d$ .

**Lemme 6.8.** Soit  $C > 0$ , et soit  $d \in \mathbb{N}$ .

- (1) Si  $P$  est une projection orthogonale de  $\mathbb{C}^d$  et si on pose  $f_i = \sqrt{C} P e_i$ , alors la suite  $(f_i)_{i \in [d]}$  est un repère  $C$ -Parseval de  $H := P(\mathbb{C}^d)$ .
- (2) Tout repère  $C$ -Parseval  $(f_i)_{i \in [d]}$  d'un espace de Hilbert  $H$  est isométrique à un repère du type précédent; autrement dit, il existe un plongement isométrique  $J : H \rightarrow \mathbb{C}^d$  tel que  $J f_i = \sqrt{C} P e_i$  pour tout  $i \in [d]$ , où  $P$  est la projection (orthogonale) de  $\mathbb{C}^d$  sur  $JH$ .
- (3) Si  $(f_i)_{i \in [d]}$  est un repère  $C$ -Parseval de  $H$  isométrique à  $(\sqrt{C} P e_i)$ , alors

$$\|\mathbb{D}(P)\| = \frac{1}{C} \max_{i \in [d]} \|f_i\|^2;$$

et pour tout  $I \subseteq [d]$ , la constante de Bessel de  $(f_i)_{i \in I}$  est égale à  $C \|P_I P P_I\|$ .

*Démonstration.* (1) Si  $f \in H = P(\mathbb{C}^d)$ , alors

$$\sum_{i \in [d]} |\langle f, f_i \rangle|^2 = C \sum_{i=1}^d |\langle f, P e_i \rangle|^2 = C \sum_{i=1}^d |\langle P f, e_i \rangle|^2 = C \|P f\|^2 = C \|f\|^2;$$

donc  $(f_i)$  est un repère  $C$ -Parseval de  $H$ .

(2) Soit  $(f_i)_{i \in [d]}$  un repère  $C$ -Parseval d'un espace de Hilbert  $H$ . Notons  $J : H \rightarrow \mathbb{C}^d$  l'opérateur défini par

$$Jf := \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{i=1}^d \langle f, f_i \rangle e_i.$$

On a par définition

$$\|Jf\|^2 = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^d |\langle f, f_i \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \text{pour tout } f \in H,$$

donc  $J$  est une isométrie (non surjective *a priori*). De plus, on a également par définition

$$J^*e_i = \frac{1}{\sqrt{C}} f_i \quad \text{pour tout } i \in [d].$$

Soit  $P$  la projection orthogonale de  $\mathbb{C}^d$  sur  $J(H)$ . Comme  $J$  est une isométrie, on voit facilement que

$$P = JJ^*.$$

En effet,  $Q := JJ^*$  est une projection d'image contenue dans  $\text{Im}(P) = J(H)$ , et si  $x = Jf \in J(H)$ , alors  $Qx = JJ^*Jf = Jf = x$ .

On a donc  $Pe_i = JJ^*e_i = \frac{1}{\sqrt{C}} Jf_i$  pour tout  $i \in [d]$ , ce qui termine la preuve de (2).

(3) Si  $Jf_i = \sqrt{C} Pe_i$  pour  $i = 1, \dots, d$ , où  $J : H \rightarrow \mathbb{C}^d$  est une isométrie, alors

$$\|\mathbb{D}(P)\| = \max_{1 \leq i \leq d} \|Pe_i\|^2 = \frac{1}{C} \max_{i \in [d]} \|f_i\|^2.$$

Enfin, si  $I \subseteq [d]$  alors, comme  $f_i = \sqrt{C} PP_I e_i$  pour  $i \in I$ , l'opérateur de synthèse associé à la suite  $(Jf_i)_{i \in I}$  est  $S := \sqrt{C} PP_I$ ; et donc la constante de Bessel de  $(f_i)_{i \in I}$ , qui est la même que celle de  $(Jf_i)_{i \in I}$ , est égale à  $C \|PP_I\|^2 = C \|P_I PP_I\|$ .  $\square$

On en vient maintenant à la reformulation annoncée de AA( $\delta$ ). Pour  $C > 0$ , on notera  $W(C)$  l'énoncé suivant : *Il existe  $r \in \mathbb{N}$  et  $\eta > 0$  tels que tout repère  $C$ -Parseval fini  $(f_i)$  avec  $\|f_i\| \leq 1$  pour tout  $i$  est réunion de  $r$  suites de Bessel de constantes de Bessel n'excédant pas  $(1 - \eta)C$ .*

**Observation 6.9.** *Pour tout  $C > 1$ , l'énoncé  $W(C)$  est équivalent à  $AA(\frac{1}{C})$ , avec les mêmes témoins  $r$  et  $\eta$ .*

*Démonstration.* C'est, au sens propre, une conséquence immédiate du Lemme 6.8, puisque ce dernier dit que les repères Parsevalesques et les projections de  $\mathbb{C}^d$  se correspondent "canoniquement". Il suffit d'écrire  $W(C)$  et  $AA(\frac{1}{C})$  l'un à côté de l'autre et de relire l'énoncé du lemme.  $\square$

On obtient donc deux nouvelles formulations du Problème de Kadison-Singer :

$$\begin{aligned} \text{(KS)} & \iff W(C) \text{ est vrai pour tout } C > 1 \\ & \iff W(C) \text{ est vrai pour un } C > 1. \end{aligned}$$

**6.4. Inversibilité restreinte : Bourgain-Tzafriri.** Dans [12], Bourgain et Tzafriri démontrent le résultat suivant. Comme d’habitude, pour  $I \subseteq [d]$  on note  $E_I$  le sous-espace de  $\mathbb{C}^d$  engendré par les  $e_i$ ,  $i \in I$ .

**Théorème 6.10.** *Il existe deux constantes  $c > 0$  et  $A < \infty$  telles que la propriété suivante ait lieu : pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 1$  vérifiant  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i = 1, \dots, d$ , on peut trouver  $I \subseteq [d]$  de cardinalité  $|I| \geq \frac{c}{\|S\|^2} d$  tel que l’opérateur  $S|_{E_I}$  est inversible sur son image, avec  $\|(S|_{E_I})^{-1}\| \leq A$ ; autrement dit,  $\|Sx\| \geq \frac{1}{A} \|x\|$  pour tout  $x \in E_I$ .*

Plus succinctement : toute matrice de taille  $d$  dont les colonnes sont de norme 1 est inversible sur un sous-espace “diagonal” de dimension proportionnelle à  $d$ , avec une estimation indépendante de  $d$  sur la norme de l’inverse.

La preuve donnée dans [12] est assez longue et repose sur des arguments probabilistes; elle est bien décortiquée dans [31]. Une preuve beaucoup plus courte et “élémentaire” a été donnée récemment par Spielman et Srivastava dans [46] (voir aussi [54] pour un résultat plus général). Les idées de [46] relèvent de l’analyse numérique, et sont donc complètement différentes de celles de [12].

On ne donnera pas la preuve du Théorème 6.10 ici; mais il est intéressant d’en isoler la conséquence (facile) suivante, qui ne peut pas ne pas faire penser à la propriété de pavage.

**Corollaire 6.11.** *Pour tout  $M > 0$ , il existe une constante  $C = C(M)$  telle que la propriété suivante ait lieu : pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 1$  vérifiant  $\|S\| \leq M$  et  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i = 1, \dots, d$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $[d]$  en un nombre de morceaux  $r \leq 1 + C \log(d)$ , telle que  $S|_{E_{I_k}}$  est inversible avec  $\|(S|_{E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$  pour  $k = 1, \dots, r$ , où  $A$  est une constante absolue.*

*Démonstration.* Soit  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  vérifiant  $\|S\| \leq M$  et  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i = 1, \dots, d$ . Soient également  $c$  et  $A$  les constantes données par le Théorème 6.10. On pose  $\kappa = \kappa(M) := \frac{c}{M^2}$  et

$$\mathcal{I} := \left\{ I \subseteq [d]; \forall x \in E_I : \|Sx\| \geq \frac{1}{A} \|x\| \right\}.$$

Si on applique le Théorème 6.10 à l’opérateur  $P_J S|_{E_J} \in \mathcal{B}(E_J)$ , pour  $J \subseteq [d]$  donné, on voit que la famille  $\mathcal{I}$  possède la propriété suivante : pour tout  $J \subseteq [d]$ , on peut trouver un ensemble  $I \subseteq J$  appartenant à  $\mathcal{I}$  tel que  $|I| \geq \kappa |J|$ .

On construit alors des ensembles  $I_1, I_2, \dots \subseteq [d]$  deux à deux disjoints de la façon suivante : on pose  $d_1 := d$ , et on choisit  $I_1 \in \mathcal{I}$  tel que  $|I_1| \geq \kappa d_1$ ; puis on pose  $d_2 := |[d] \setminus I_1|$  et on choisit  $I_2 \subseteq [d] \setminus I_1$  tel que  $|I_2| \geq \kappa d_2$ ; et ainsi de suite. À l’étape  $r$ , on aura  $d_{r+1} := |[d] \setminus I_1 \cup \dots \cup I_r| \leq (1 - \kappa)^r d$ ; donc le processus s’arrête, *i.e.*  $I_1 \cup \dots \cup I_r = [d]$ , au plus tard au premier entier  $r$  tel que  $(1 - \kappa)^r d < 1$ . On a alors  $(1 - \kappa)^{r-1} \geq \frac{1}{d}$ , et donc  $r - 1 \leq C \log(d)$ , où  $C = C(\kappa)$  ne dépend que de  $M$ .

Ainsi, on a partitionné  $[d]$  en au plus  $1 + C \log(d)$  ensembles appartenant à la famille  $\mathcal{I}$ , ce qui est le résultat souhaité.  $\square$

Il est très naturel de se demander si, dans le corollaire précédent, on peut trouver une partition en un nombre  $r$  de morceaux indépendant de la dimension  $d$ . C’est précisément ce qui dans [15] est appelé la “Conjecture de Bourgain-Tzafriri”, et qu’on notera bien entendu (BT) : *Pour tout  $M > 0$ , on peut trouver un entier  $r = r(M) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 1$  vérifiant  $\|S\| \leq M$  et  $\|Se_i\| = 1$  pour*

$i = 1, \dots, d$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $[d]$  telle que  $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$  pour  $k = 1, \dots, r$ , où  $A$  est une constante absolue.

La version “infini-dimensionnelle” de (BT) sera notée  $(\text{BT})_\infty$ ; elle s'énonce comme suit : *Pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  en un nombre  $r = r(\|S\|)$  de morceaux, telle que les opérateurs  $S_{|E_{I_k}}$  sont inversibles sur leur image (i.e. injectifs à images fermées) avec  $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$ , où  $A$  est une constante absolue.*

On peut également formuler une version “faible” de  $(\text{BT})_\infty$ , qu'on notera  $(\text{BTf})_\infty$  : *Pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que les opérateurs  $S_{|E_{I_k}}$  sont inversibles sur leur image.*

Il est facile de voir (à l'aide du Lemme de sélection de Rado) que les énoncés (BT) et  $(\text{BT})_\infty$  sont en fait équivalents; et il est évident que  $(\text{BT})_\infty$  est formellement plus fort que  $(\text{BTf})_\infty$ . En résumé :

$$(\text{BT}) \iff (\text{BT})_\infty \implies (\text{BTf})_\infty.$$

La proposition suivante en dit nettement plus.

**Proposition 6.12.** *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (1) *Tout opérateur sur  $\ell^2$  est pavable, i.e. (A);*
- (2) *la conjecture  $(\text{BT})_\infty$ ;*
- (3) *la conjecture “faible”  $(\text{BTf})_\infty$ ;*
- (4) *la Conjecture de Feichtinger (F), sous la forme (B).*

*Démonstration.* (1)  $\implies$  (2). Supposons (1) vérifiée. Soit  $A > 1$  quelconque (!), et soit  $\varepsilon > 0$  à choisir. Soit également  $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|Se_i\| = 1$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

L'hypothèse  $\|Se_i\| = 1$  se ré-écrit sous la forme  $\langle S^*Se_i, e_i \rangle = 1$ . On a donc

$$\mathbb{D}(S^*S) = Id.$$

Par (1) et la Proposition 4.7, il existe un entier  $r = r(\varepsilon)$  tel que, pour tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$  et  $\|T\| \leq 1$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\|P_{I_k}TP_{I_k}\| \leq \varepsilon$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

En appliquant ceci à l'opérateur  $T := \frac{1}{2\|S\|^2} (S^*S - \mathbb{D}(S^*S)) = \frac{1}{2\|S\|^2} (S^*S - Id)$  (qui est bien de norme au plus 1 car  $\|\mathbb{D}(S^*S)\| \leq \|S^*S\| = \|S\|^2$ ), on obtient une partition  $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r = \mathbb{N}$  avec  $r = r(\varepsilon)$ , telle que

$$\|P_{I_k}(S^*S - Id)P_{I_k}\| \leq 2\|S\|^2 \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

On prend maintenant  $\varepsilon := \frac{\alpha}{2\|S\|^2}$ , où  $\alpha \in (0, 1)$  est à choisir. Alors l'entier  $r = r(\varepsilon)$  dépend uniquement de  $\alpha$  et de  $\|S\|$ , et on a  $\|P_{I_k}(S^*S - Id)P_{I_k}\| \leq \alpha$  pour  $k = 1, \dots, r$ . Comme  $S^*S - Id$  est auto-adjoint, on en déduit  $-\alpha Id \leq P_{I_k}(S^*S - Id)P_{I_k} \leq \alpha Id$ , et donc  $-\alpha P_{I_k} \leq P_{I_k}(S^*S - Id)P_{I_k} \leq \alpha P_{I_k}$  en multipliant à gauche et à droite par  $P_{I_k}$ . Autrement dit :

$$(1 - \alpha)P_{I_k} \leq P_{I_k}S^*SP_{I_k} \leq \alpha P_{I_k} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r,$$

avec un entier  $r = r(\alpha, \|S\|)$ .

Pour  $k = 1, \dots, r$  et  $x \in E_{I_k}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|Sx\|^2 &= \|SP_{I_k}x\|^2 \\ &= \langle P_{I_k}S^*SP_{I_k}x, x \rangle \\ &\geq (1 - \alpha) \langle P_{I_k}x, x \rangle = (1 - \alpha) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Donc  $S|_{E_{I_k}}$  est inversible avec  $\|(S|_{E_{I_k}})^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \leq A$  si  $\alpha = \alpha(A)$  est assez petit. L'entier  $r$  dépend alors uniquement de  $A$  et de  $\|S\|$ .

On a donc montré que pour  $A > 1$  donné et pour tout opérateur  $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|Se_i\| = 1$  pour  $i \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  en un nombre  $r = r(A, \|S\|)$  de morceaux telle que  $\|(S|_{E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$  pour  $k = 1, \dots, r$ ; ce qui est une version “renforcée” de  $(BT)_\infty$  où on autorise pour  $A$  n'importe quelle constante strictement supérieure à 1.

Il est clair que (2) entraîne (3), et on a déjà vu que (4) entraîne (1). Pour conclure, il suffit donc de montrer que (3) entraîne (4); mais en réalité, il est *évident* que (3) et (4) sont équivalents, en vertu du fait suivant.

**Fait.** Soit  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de Bessel dans  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ , et soit  $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'opérateur de synthèse associé,  $Se_i = f_i$ . Si  $I \subseteq \mathbb{N}$ , alors

$$S|_{E_I} \text{ est inversible} \iff (f_i)_{i \in I} \text{ est une suite de Riesz.}$$

Le Fait lui-même est clair puisque  $S|_{E_I}$  s'identifie à l'opérateur de synthèse associé à  $(f_i)_{i \in I}$ , et qu'une suite de Bessel est une suite de Riesz précisément quand son opérateur de synthèse est un isomorphisme sur son image, d'après le Corollaire 6.4.  $\square$

*Remarque.* Dans  $(BT)_\infty$ , il n'est en fait pas nécessaire d'imposer que les  $Se_i$  soient de norme *exactement* égale à 1. Il suffit que  $\delta := \inf_i \|Se_i\|$  soit strictement positif; et on obtient alors une partition de  $\mathbb{N}$  en  $r$  morceaux avec  $r = r(M, \delta)$ . Pour le voir, il suffit d'adapter la preuve de l'implication (1)  $\implies$  (2). Au lieu d'avoir  $\mathbb{D}(S^*S) = Id$ , on aura  $\mathbb{D}(S) \geq \delta^2 Id$ , ce qui donnera  $P_{I_k}S^*SP_{I_k} \geq (\delta^2 - \alpha)P_{I_k}$  et donc  $\|(S|_{E_{I_k}})^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - \alpha}}$ , si on a pris soin de choisir  $\alpha < \delta^2$ . Ainsi, on pourra prendre pour  $A$  n'importe quelle constante strictement supérieure à  $\frac{1}{\delta}$ .

On peut ainsi compléter notre liste de formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer :

$$(KS) \iff (A) \iff (F) \iff (BT).$$

## 7. RÉSULTATS PARTIELS ET AUTRES RAMIFICATIONS

Cette section contient quelques résultats partiels concernant (KS) qui à mon avis *doivent absolument* être mentionnés, soit parce que leur énoncé est frappant, soit parce que leur preuve est belle, soit les deux. Bien entendu, il s'agit d'une “sélection” très partielle et tout à fait subjective.

**7.1. Matrices à coefficients positifs.** Le résultat suivant est dû à Berman-Halpern-Kaftal-Weiss [8], et indépendamment à Gregson [27]. Pour tout ensemble  $I$ , on notera  $(t_{ij})$  la matrice d'un opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2(I))$  dans la base canonique de  $\ell^2(I)$ .

**Théorème 7.1.** *Si  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  a une matrice  $(t_{ij})$  à coefficients positifs, alors  $T$  est pavable.*

Pour la preuve, on a besoin de deux lemmes. Le premier se trouve dans [8] pour la partie (a), et dans Anderson [4] pour la partie (b). Pour la preuve du Théorème 7.1, on aura juste besoin de la partie (a); mais la partie (b) sera utilisée plus bas, et de plus les deux preuves sont intéressantes.

**Lemme 7.2.** *Soit  $(s_{ij})_{i,j \in I}$  une matrice finie indexée par un ensemble  $I$ , avec  $s_{ij} \geq 0$  pour tous  $i, j$  et  $s_{ii} = 0$ .*

(a) *On suppose que la matrice  $(s_{ij})$  est symétrique. Alors, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , il existe une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $I$  telle que*

$$\forall k \forall i \in I_k : \sum_{j \in I_k} s_{ij} \leq \frac{1}{r} \sum_{j \in I} s_{ij}.$$

(b) *On ne fait pas d'hypothèse de symétrie. Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $I$  en  $r = 3^N$  morceaux telle que*

$$\forall k \forall j \in I_k : \sum_{i \in I_k} s_{ij} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N \sum_{i \in I} s_{ij}.$$

*Démonstration.* (a) Notons  $\Sigma_r$  l'ensemble de toutes les partitions  $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_r)$  de  $I$  en  $r$  morceaux (éventuellement vides). On définit  $F = \Sigma_r \rightarrow \mathbb{R}^+$  par

$$F(\mathbf{I}) := \sum_{k=1}^r \sum_{i,j \in I_k} s_{ij}.$$

(Par convention, une somme "vide" est égale à 0.)

Comme  $\Sigma_r$  est un ensemble fini (!), on peut choisir une partition  $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_r)$  telle que  $F(\mathbf{I})$  soit *minimal*. On va voir que  $\mathbf{I}$  convient.

Supposons qu'il existe  $k_0 \in \{1, \dots, r\}$  et  $i_0 \in I_{k_0}$  tels que

$$\sum_{j \in I_{k_0}} s_{i_0 j} > \frac{1}{r} \sum_{j \in I} s_{i_0 j}.$$

Comme  $\sum_{k=1}^r \sum_{j \in I_k} s_{i_0 j} = \sum_{j \in I} s_{i_0 j}$ , on peut trouver  $k_1 \in \{1, \dots, r\}$  tel que

$$\sum_{j \in I_{k_1}} s_{i_0 j} \leq \frac{1}{r} \sum_{j \in I} s_{i_0 j} < \sum_{j \in I_{k_0}} s_{i_0 j};$$

et on a bien sûr  $k_1 \neq k_0$  (!).

Soit alors  $\mathbf{I}' = (I'_1, \dots, I'_r)$  la partition de  $I$  définie comme suit :

$$I'_k = \begin{cases} I_{k_0} \setminus \{i_0\} & \text{si } k = k_0, \\ I_{k_1} \cup \{i_0\} & \text{si } k = k_1, \\ I_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va voir que  $F(\mathbf{I}') < F(\mathbf{I})$ , ce qui contredira le choix de  $\mathbf{I}$ .

Par définition de  $\mathbf{I}'$ , il suffit de vérifier qu'on a

$$(7.1) \quad \sum_{i,j \in I'_{k_0}} s_{ij} + \sum_{i,j \in I'_{k_1}} s_{ij} < \sum_{i,j \in I_{k_0}} s_{ij} + \sum_{i,j \in I_{k_1}} s_{ij};$$

ce qui n'est pas difficile : comme  $s_{i_0 i_0} = 0$  et  $s_{ij} = s_{ji}$  pour tous  $i, j$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in I'_{k_0}} s_{ij} + \sum_{i,j \in I'_{k_1}} s_{ij} &= \sum_{i,j \in I_{k_0}} s_{ij} - \sum_{i \in I_{k_0}} s_{ii_0} - \sum_{j \in I_{k_0}} s_{i_0 j} \\ &\quad + \sum_{i,j \in I_{k_1}} s_{ij} + \sum_{i \in I_{k_1}} s_{ii_0} + \sum_{j \in I_{k_1}} s_{i_0, j} \\ &= \sum_{i,j \in I_{k_0}} s_{ij} + \sum_{i,j \in I_{k_1}} s_{ij} + 2 \left( \sum_{j \in I_{k_1}} s_{i_0 j} - \sum_{j \in I_{k_0}} s_{i_0 j} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque  $\sum_{j \in I_{k_1}} s_{i_0 j} < \sum_{j \in I_{k_0}} s_{i_0 j}$ .

(b) Par un argument d'itération évident, il suffit en fait de traiter le cas  $N = 1$ . Il s'agit alors de trouver une partition de  $I$  en trois morceaux  $I_1, I_2, I_3$  telle que

$$\forall k \forall j \in I_k : \sum_{i \in I_k} s_{ij} \leq \frac{2}{3} \sum_{i \in I} s_{ij}.$$

Comme on va avoir besoin d'ordonner les éléments de  $I$ , on va supposer que  $I = [d] = \{1, \dots, d\}$ , pour un certain entier  $d \geq 1$ .

Pour tout  $j \in [d]$ , on posera

$$c(j) := \sum_{i \in [d]} s_{ij}.$$

**Fait 1.** On peut trouver un ensemble  $J \subseteq [d]$  tel que

$$(1) \quad \forall j \in J : \sum_{\substack{i \in J \\ i \leq j}} s_{i,j} \leq \frac{1}{3} c(j) \quad \text{et} \quad (2) \quad \forall j \notin J : \sum_{i \in J} s_{ij} \geq \frac{1}{3} c(j).$$

*Preuve du Fait 1.* Posons  $j_1 := 1 = \min(I)$  et  $J_1 := \{j_1\}$ . Alors (1) est vrai pour  $J = J_1$  car  $s_{11} = 0$ . Si (2) est vrai également pour  $J_1$ , on prend  $J := J_1$  et la preuve est terminée.

Supposons que (2) ne soit pas vraie pour  $J = J_1$ . Soit  $j_2$  le plus petit entier  $j > j_1$  tel que

$$\sum_{i \in J_1} s_{ij} < \frac{1}{3} c(j),$$

et soit  $J_2 := \{j_1, j_2\} = J_1 \cup \{j_2\}$ . Alors (1) est vraie pour  $J_2$  car on a

$$\sum_{\substack{i \in J_2 \\ i \leq j}} s_{ij} \leq \sum_{\substack{i \in J_1 \\ i \leq j}} s_{ij} + s_{j_2 j} \quad \text{pour tout } j \in [d] \quad \text{et } s_{j_2 j_2} = 0.$$

De plus, l'inégalité (2) est également vraie pour  $J_2$  et pour tous les  $j \notin J_2$  vérifiant  $j \leq j_2$ , par définition de  $j_2$ .

Si (2) est en fait vraie pour tout  $j \notin J_2$ , on prend  $J := J_2$  et la preuve est terminée. Sinon, on appelle  $j_3$  le plus petit entier  $j > j_2$  tel que

$$\sum_{i \in J_2} s_{ij} < \frac{1}{3} c(j),$$

et on pose  $J_3 := \{j_1, j_2, j_3\} = J_2 \cup \{j_3\}$ .

On répète ce raisonnement tant que cela est possible. De façon précise, on construit des ensembles  $J_k = \{j_1 < \dots < j_k\}$  tels que

$$(1) \quad \forall j \in J_k : \sum_{\substack{i \in J_k \\ i \leq j}} s_{ij} \leq \frac{1}{3} c(j) \quad \text{et} \quad (2)_{\leq} \quad \forall j \notin J_k \text{ avec } j \leq j_k : \sum_{i \in J_k} s_{ij} \geq \frac{1}{3} c(j).$$

Le processus se poursuit tant qu'il existe un indice  $j > j_k$  tel que  $\sum_{i \in J_k} s_{ij} < \frac{1}{3} c(j)$ . Mais bien entendu, il doit s'arrêter à un certain entier  $k \leq d$ ; et alors (1) et (2) sont vérifiées pour  $J := J_k$ .  $\square$

**Fait 2.** L'ensemble  $J$  étant comme dans le Fait 1, il existe un ensemble  $J' \subseteq J$  tel que

$$(1') \quad \forall j \in J' : \sum_{\substack{i \in J' \\ i \geq j}} s_{ij} \leq \frac{1}{3} c(j) \quad \text{et} \quad (2') \quad \forall j \in J \setminus J' : \sum_{i \in J'} s_{ij} \geq \frac{1}{3} c(j).$$

*Démonstration.* On procède exactement comme dans le Fait 1, mais "en descendant" : on pose  $j'_1 := \max(J)$  et  $J'_1 := \{j'_1\}$ ; puis  $J'_2 := J'_1 \cup \{j'_2\}$ , où  $j'_2$  est le plus grand entier  $j < j'_1$  tel que  $\sum_{i \in J'_1} s_{ij} < \frac{1}{3} c(j)$  s'il en existe; et ainsi de suite.  $\square$

Posons maintenant

$$I_1 := [d] \setminus J, \quad I_2 := J' \quad \text{et} \quad I_3 := J \setminus J';$$

et vérifions que la partition  $(I_1, I_2, I_3)$  convient. (On rappelle à nouveau que certains des ensembles constituant une "partition" peuvent être vides).

Si  $j \in I_1$ , i.e.  $j \notin J$ , alors d'après le Fait 1 :

$$\sum_{i \in I_1} s_{ij} = \sum_{i \in [d]} s_{ij} - \sum_{i \in J} s_{ij} \leq c(j) - \frac{1}{3} c(j) = \frac{2}{3} c(j).$$

Si  $j \in I_2 = J'$ , alors d'après les Faits 1 et 2 :

$$\sum_{i \in I_2} s_{ij} \leq \sum_{\substack{i \in J' \\ i \geq j}} s_{ij} + \sum_{\substack{i \in J \\ i \leq j}} s_{ij} \leq \frac{1}{3} c(j) + \frac{1}{3} c(j) = \frac{2}{3} c(j).$$

Enfin, si  $j \in I_3 = J \setminus J'$ , alors d'après le Fait 2 :

$$\sum_{i \in I_3} s_{ij} = \sum_{i \in J} s_{ij} - \sum_{i \in J'} s_{ij} \leq c(j) - \frac{1}{3} c(j) = \frac{2}{3} c(j).$$

$\square$

*Remarque 1.* On a très envie de croire qu'il devrait être facile de déduire la partie (b) du lemme de la partie (a); mais je n'ai pas vu comment.

*Remarque 2.* Si  $T$  est un opérateur borné sur  $\ell^1(\mathbb{N})$  de matrice  $(t_{ij})$ , alors on a pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$  :

$$\|P_I T P_I\|_{\ell^1 \rightarrow \ell^1} = \sup_{j \in I} \sum_{i \in I} |t_{ij}|.$$

Donc la partie (b) du Lemme 7.2 entraîne immédiatement que *tout opérateur borné sur  $\ell^1$  est pavable* (relativement à la base canonique de  $\ell^1$ ). Un résultat du même type se trouve dans [47].

Le deuxième lemme dont on a besoin est une version de ce qu'on appelle habituellement le **test de Schur**.

**Lemme 7.3.** *Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$  une matrice à coefficients complexes indexée par un ensemble  $I$ . On suppose qu'il existe une constante  $C$  et des nombres réels  $\xi_i > 0$  tels que*

$$\forall i \in I : \sum_j |a_{ij}| \xi_j \leq C \xi_i \quad \text{et} \quad \forall j \in I : \sum_i |a_{ij}| \xi_i \leq C \xi_j.$$

Alors  $A$  définit un opérateur borné sur  $\ell^2(I)$ , avec  $\|A\| \leq C$ .

*Démonstration.* Si  $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$ , alors

$$\begin{aligned} \left( \sum_j |a_{ij} x_j| \right)^2 &= \left( \sum_j \sqrt{|a_{ij}| \xi_j} \times \frac{|x_j|}{\sqrt{\xi_j}} \sqrt{|a_{ij}|} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_j |a_{ij}| \xi_j \right) \left( \sum_j |a_{ij}| \frac{|x_j|^2}{\xi_j} \right) \\ &\leq C \xi_i \sum_j |a_{ij}| \frac{|x_j|^2}{\xi_j} \quad \text{pour tout } i \in I. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \sum_j |a_{ij} x_j| \right)^2 &\leq C \times \sum_j \frac{|x_j|^2}{\xi_j} \times \sum_i |a_{ij}| \xi_i \\ &\leq C^2 \sum_j |x_j|^2 = C^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

□

*Preuve du Théorème 7.1.* Par l'argument habituel à base de Lemme de sélection de Rado, il suffit de montrer que pour  $\varepsilon > 0$  donné, tout opérateur  $T = (t_{ij}) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$  tel que  $\mathbb{D}(T) = 0$  et  $t_{ij} \geq 0$  pour tous  $i, j$  est  $\varepsilon$ -pavable en un nombre  $r$  de morceaux ne dépendant que de  $\varepsilon$  et de  $\|T\|$ .

Supposons d'abord que l'opérateur  $T$  est *auto-adjoint*, et fixons  $\varepsilon > 0$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que les coefficients  $t_{ij}$  pour  $i \neq j$  sont tous *strictement positifs* (quitte à remplacer  $T$  par  $T + E$ , où  $E$  est une matrice auto-adjointe de norme très petite, de diagonale nulle et à coefficients non diagonaux strictement positifs).

Par le **Théorème de Perron-Frobenius** (voir par exemple [44]), on peut trouver un vecteur non nul  $\xi \in \mathbb{C}^d$  tel que  $\xi_i \geq 0$  pour tout  $i \in [d]$  et  $T\xi = \|T\| \xi$ . On a alors en fait  $\xi_i > 0$  pour tout  $i$  car  $\sum_j t_{ij} \xi_j = \|T\| \xi_i$  et les  $t_{ij}$  pour  $j \neq i$  sont strictement positifs (si  $\xi_i$  valait 0, alors tous les autres  $\xi_j$  vaudraient aussi 0).

Choisissons un entier  $r = r(\varepsilon, \|T\|)$  tel que  $\frac{1}{r} \|T\| \leq \varepsilon$ . En appliquant la partie (a) du Lemme 7.2 à la matrice  $(s_{ij}) := (\xi_i \xi_j t_{ij})$ , on obtient une partition  $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r = [d]$  telle que

$$\forall k \forall i \in I_k : \sum_{j \in I_k} t_{ij} \xi_j \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^d t_{ij} \xi_j = \frac{\|T\|}{r} \xi_i.$$

De plus, si  $i \in I_k$  alors

$$\sum_{j \in I_k} t_{ij} \xi_j = \sum_{j=1}^d (P_{I_k} T P_{I_k})_{ij} \xi_j;$$

et si  $i \notin I_k$  alors  $(P_{I_k} T P_{I_k})_{ij} = 0$  pour tout  $j$ .

On obtient donc pour  $k \in \{1, \dots, r\}$  fixé :

$$\forall i \in [d] : \sum_{j \in [d]} (P_{I_k} T P_{I_k})_{ij} \xi_j \leq \frac{\|T\|}{r} \xi_i;$$

et comme l'opérateur  $P_{I_k} T P_{I_k}$  est auto-adjoint, on a aussi

$$\forall j \in [d] : \sum_{i \in [d]} (P_{I_k} T P_{I_k})_{ij} \xi_i \leq \frac{\|T\|}{r} \xi_j.$$

Par le test de Schur (Lemme 7.3), on en déduit

$$\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \frac{1}{r} \|T\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Traitons maintenant le cas d'un opérateur  $T = (t_{ij})$  quelconque. L'opérateur  $A := T + T^*$  est auto-adjoint, sa matrice  $(a_{ij})$  est à coefficients positifs avec  $a_{ii} = 0$ , et  $\|A\| \leq 2\|T\|$ . De plus, on a  $\|P_I T P_I\| \leq \|P_I A P_I\|$  pour tout  $I \subseteq [d]$  d'après le Théorème de Perron-Frobenius, car les matrices de  $P_I T P_I$  et  $P_I A P_I$  sont à coefficients positifs avec  $(P_I A P_I)_{ij} \geq (P_I T P_I)_{ij}$  pour tous  $i, j$ . D'après le cas "auto-adjoint" appliqué à  $A$ , on en déduit immédiatement le résultat pour  $T$ .  $\square$

*Remarque 1.* La preuve ci-dessus montre que si  $r \in \mathbb{N}$  est donné, alors tout opérateur auto-adjoint à coefficients matriciels positifs et de norme au plus 1 est  $\frac{1}{r}$ -pavable en  $r$  morceaux. Ce résultat est optimal; voir [8].

*Remarque 2.* Il est assez clair qu'on pourrait utiliser la partie (b) du Lemme 7.2 au lieu de la partie (a) pour démontrer le Théorème 7.1. La preuve du théorème en serait d'ailleurs très légèrement simplifiée, car il serait inutile de considérer d'abord le cas où l'opérateur  $T$  est auto-adjoint.

**7.2. Bourgain-Tzafriri 2.** Dans [13], Bourgain et Tzafriri étudient très sérieusement (!) le Problème de Kadison-Singer. Un de leurs résultats principaux est le théorème suivant, formellement très proche du Théorème 6.10.

**Théorème 7.4.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que la propriété suivante ait lieu. Pour tout opérateur sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1/c$  vérifiant  $\mathbb{D}(T) = 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute mesure de probabilité  $\lambda$  sur  $[d]$ , on peut trouver un ensemble  $I \subseteq [d]$  tel que  $\lambda(I) \geq \frac{c\varepsilon^2}{\|T\|^2}$  et  $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$ .*

La preuve du Théorème 7.4 est évidemment difficile, mais reste dans les limites du "raisonnable".

En prenant pour  $\lambda$  la mesure de probabilité uniforme sur  $[d]$ , on obtient un ensemble  $I \subseteq [d]$  avec  $|I| \geq \frac{c\varepsilon^2}{\|T\|^2} d$  tel que  $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$ . Exactement comme dans la preuve du Corollaire 6.11, on en déduit que les opérateurs sur  $\mathbb{C}^d$  sont uniformément pavables en  $O(\log(d))$  morceaux.

Ce résultat est un indice assez clair de la “plausibilité” de la conjecture de pavage fini-dimensionnelle  $(A)_{<\infty}$ , et donc de (KS). Dans le même article, Bourgain et Tzafriri donnent d’ailleurs des conditions suffisantes très générales pour qu’un opérateur soit pavable. En particulier, ils obtiennent le résultat suivant.

**Théorème 7.5.** *Soit  $\nu > 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $d(\nu, \varepsilon)$  tel que tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq d(\nu, \varepsilon)$  vérifiant  $\|T\| = 1$  et*

$$|\langle Te_i, e_j \rangle| \leq \frac{1}{(\log d)^{1+\nu}} \quad \text{pour tous } i, j \in [d]$$

*est  $\varepsilon$ -pavable en un nombre  $r = r(\varepsilon, \nu)$  de morceaux.*

La preuve originale de ce théorème est extraordinairement élaborée (“quite complicated”, écrivent les auteurs). Une preuve plus accessible se trouve dans Tropp [50], où l’étape essentielle de la preuve de [13] est remplacée par un argument plus simple; mais même ainsi, on ne peut certainement pas dire que la démonstration soit facile. Quoi qu’il en soit, les deux preuves reposent sur une approche probabiliste.

**7.3. Opérateurs de Laurent.** Soit  $H$  l’espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{T})$ . Il y a sur  $H$  une base orthonormée “privilegiée”, à savoir la base de Fourier  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , où  $e_n(t) = e^{int}$ . On dira qu’un opérateur  $D$  agissant sur  $H$  est **diagonal** s’il est diagonal relativement à la base  $(e_n)$ ; et si  $T \in \mathcal{B}(H)$ , on note  $\mathbb{D}(T)$  l’opérateur diagonal avec coefficients  $\langle Te_n, e_n \rangle$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Un opérateur  $T \in \mathcal{B}(H)$  est dit **pavable** s’il est pavable relativement à la base  $(e_n)$ . Évidemment, la conjecture de pavage (A), initialement formulée sur  $\ell^2(\mathbb{N})$ , est vraie si et seulement si tout opérateur sur  $H = L^2(\mathbb{T})$  est pavable en ce sens.

Il est très naturel de chercher à “tester” la validité de la conjecture de pavage sur des opérateurs classiques. Une classe particulièrement importante est celle des **opérateurs de Laurent**. Si  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ , l’opérateur de Laurent  $L_\phi$  associé à  $\phi$  est... l’opérateur de multiplication par  $\phi$ , agissant sur  $H = L^2(\mathbb{T})$  :

$$L_\phi f = \phi f \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Voici trois résultats assez frappants concernant la propriété de pavage pour les opérateurs de Laurent.

- Dans [8], Berman, Halpern, Keftal et Weiss montrent que si le symbole  $\phi$  est **intégrable au sens de Riemann** (!), alors  $L_\phi$  est pavable, et même pavable avec des *progressions arithmétiques*.
- Toujours dans [8], il est montré que si  $V \subseteq \mathbb{T}$  est un ouvert dense dont la frontière  $\partial V$  est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors l’opérateur de Laurent  $L_{1_V}$  *n’est pas pavable avec des progressions arithmétiques*.
- Dans [13], Bourgain et Tzafriri montrent à l’aide du Théorème 7.5 que si le symbole  $\phi$  vérifie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(n)|^2 |n|^\tau < \infty$$

pour un certain  $\tau > 0$ , alors  $L_\phi$  est pavable; et ils en déduisent qu’il existe des ouverts denses  $V \subseteq \mathbb{T}$  avec  $|\partial V| > 0$  tels que  $L_{1_V}$  est pavable.

La proposition qui suit concerne les opérateurs de Laurent associés à des fonctions indicatrices. Pour tout  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ , posons

$$L_\Lambda^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}); \widehat{f}(n) \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{Z} \setminus \Lambda\} = [e_n; n \in \Lambda],$$

et notons comme il se doit  $P_\Lambda$  la projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{T})$  sur  $L_\Lambda^2$ ; autrement dit, la projection diagonale associée à  $\Lambda$ .

**Proposition 7.6.** *Soit  $E \subseteq \mathbb{T}$  un ensemble mesurable, de mesure de Lebesgue  $|E| > 0$ , et soit  $\varepsilon \in (0, |E|)$ . Soit également  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $\|P_\Lambda(L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E}))P_\Lambda\| \leq \varepsilon$ ;
- (2)  $\forall f \in L_\Lambda^2(\mathbb{T}) : (|E| - \varepsilon) \|f\|^2 \leq \int_E |f|^2 \leq (|E| + \varepsilon) \|f\|^2$ .

*Démonstration.* On a besoin du fait suivant.

**Fait.** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base orthonormée de  $H$ . Si  $P \in \mathcal{B}(H)$  est une projection et si  $u \in H$ , alors

$$\|Pu\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle u, e_i \rangle|^2 \|Pe_i\|^2 + \langle (P - \mathbb{D}(P))u, u \rangle.$$

*Preuve du Fait.* Bien entendu, la diagonale  $\mathbb{D}$  est relative à la base orthonormée  $(e_i)$ .

Comme  $P$  est une projection, on a

$$\begin{aligned} \|Pu\|^2 &= \langle Pu, u \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle Pe_i, \sum_{j \in I} \langle u, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i \in I} |\langle u, e_i \rangle|^2 \|Pe_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle u, e_i \rangle \overline{\langle u, e_j \rangle} \langle Pe_i, e_j \rangle; \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On applique le Fait avec  $P := L_{\mathbf{1}_E} = M_{\mathbf{1}_E}$  (qui est bien une projection orthogonale) et  $u := P_\Lambda f$ , où  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Ici,  $H = L^2(\mathbb{T})$  et la base orthonormée est la base de Fourier  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . On obtient ainsi

$$\|\mathbf{1}_E P_\Lambda f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{P_\Lambda f}(n)|^2 \|\mathbf{1}_E e_n\|^2 + \langle P_\Lambda(L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E}))P_\Lambda f, f \rangle;$$

et comme  $\|\mathbf{1}_E e_n\|^2 = |E|$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  (car  $|e_n(t)| \equiv 1$ ), cela s'écrit encore

$$\int_E |P_\Lambda f|^2 = |E| \|P_\Lambda f\|^2 + \langle P_\Lambda(L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E}))P_\Lambda f, f \rangle.$$

Par ailleurs, comme l'opérateur  $L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E})$  est auto-adjoint, on voit que (1) est satisfaite si et seulement si  $-\varepsilon P_\Lambda \leq P_\Lambda(L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E}))P_\Lambda \leq \varepsilon P_\Lambda$ , autrement dit

$$-\varepsilon \|P_\Lambda f\|^2 \leq \langle P_\Lambda(L_{\mathbf{1}_E} - \mathbb{D}(L_{\mathbf{1}_E}))P_\Lambda f, f \rangle \leq \varepsilon \|P_\Lambda f\|^2 \quad \text{pour toute } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

On en déduit aussitôt l'équivalence de (1) et (2). □

De cette proposition (et de l'équivalence de (KS) avec la conjecture de pavage) on déduit immédiatement le

**Corollaire 7.7.** *Une réponse positive à (KS) entraîne le résultat suivant : pour tout ensemble mesurable  $E \subseteq \mathbb{T}$  de mesure non nulle et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver une partition  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_r)$  de  $\mathbb{Z}$  telle que*

$$\forall k \forall f \in L_{\Lambda_k}^2(\mathbb{T}) : (1 - \varepsilon) \|f\|^2 \leq \frac{1}{|E|} \int_E |f|^2 \leq (1 + \varepsilon) \|f\|^2.$$

Dans [15], le résultat qui vient d'être énoncé est présenté comme une conjecture importante en analyse harmonique : *any advance on this problem would have broad applications throughout the field.*

**7.4. Ultrafiltres.** Dans cette sous-section, on revient à la formulation initiale de (KS) en termes d'ultrafiltres. Rappelons que si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ , on note  $\varphi_{\mathcal{U}}$  l'état pur associé sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  et  $\Phi_{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{U}} \circ \mathbb{D}$  son prolongement canonique à  $\mathcal{B}(\ell^2)$  :

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{U}\text{-lim} \langle Te_n, e_n \rangle \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{U}} = (\Phi_{\mathcal{U}})|_{\mathcal{D}(\ell^2)}.$$

On commence par combler un trou, en démontrant un résultat d'Anderson [4] admis dans le courant de la preuve du Théorème 5.3. Il s'agissait du Lemme 5.4, qui monte maintenant en grade :

**Théorème 7.8.** *Si  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ , alors  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est un état pur de  $\mathcal{B}(\ell^2)$ .*

La démonstration repose sur deux lemmes. Rappelons que si  $\Phi$  est un état sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , on note

$$\mathcal{F}_{\Phi}^+ = \{b \in \mathcal{A}; 0 \leq b \leq \mathbf{1} \text{ et } \Phi(b) = 1\}.$$

**Lemme 7.9.** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre, et soit  $\mathcal{D}$  une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}$ . Soit aussi  $\Phi$  un état sur  $\mathcal{A}$ . On suppose que  $\varphi := \Phi|_{\mathcal{D}}$  est un état pur de  $\mathcal{D}$ , et qu'il existe une projection  $\mathbb{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  telle que*

$$\forall a \in \ker(\mathbb{E}) : \inf \{ \Phi(a^*ba); b \in \mathcal{F}_{\Phi}^+ \} = 0.$$

Alors l'état  $\Phi$  est pur.

*Démonstration.* Remarquons d'abord que l'énoncé du lemme a un sens. En effet, si  $b \in \mathcal{A}$  est positif alors  $a^*ba$  est également positif, et par conséquent

$$\Phi(a^*ba) \geq 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

Donc l'inf apparaissant dans l'énoncé du lemme est un nombre réel positif bien défini.

On rappelle qu'on note  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  l'ensemble de tous les états sur  $\mathcal{A}$ . Pour  $\Psi \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$  et  $a \in \mathcal{A}$ , on posera

$$i_{\Psi}(a) := \inf \{ \Psi(a^*ba); b \in \mathcal{F}_{\Psi}^+ \}.$$

**Fait 1.** Soit  $\Psi \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ . Si  $a \in \mathcal{A}$  vérifie  $i_{\Psi}(a) = 0$ , alors  $a \in \ker(\Psi)$ .

*Preuve du Fait 1.* Fixons  $a \in \mathcal{A}$  vérifiant  $i_{\Psi}(a) = 0$ . Soit également  $\varepsilon > 0$ .

Par hypothèse, on peut trouver  $b \in \mathcal{F}_{\Psi}^+$  tel que  $\Psi(a^*ba) < \varepsilon$ . Soit  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $b = u^*u$ . On a  $\Psi(a^*ba) = \Psi((ua)^*(ua))$ , et donc  $\Psi((ua)^*(ua)) < \varepsilon$ . Par ailleurs, comme  $b \in \mathcal{F}_{\Psi}$ , on a (d'après le Fait 4.1)  $\Psi(a) = \Psi(ba) = \Psi(u^*(ua))$ . Par Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|\Psi(a)| \leq \Psi(uu^*)^{1/2} \Psi((ua)^*(ua))^{1/2} < \sqrt{\varepsilon},$$

où la deuxième inégalité vient du fait que  $\|uu^*\| = \|u\|^2 = \|b\| = 1$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a donc  $\Psi(a) = 0$ .  $\square$

**Fait 2.** Si  $a \in \mathcal{A}$ , alors  $\mathbf{K}_a := \{ \Psi \in \mathbf{S}(\mathcal{A}); i_{\Psi}(a) = 0 \}$  est une partie extrême de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  : si  $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$  sont tels que le segment ouvert  $] \Psi_1, \Psi_2 [$  rencontre  $\mathbf{K}_a$ , alors  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  appartiennent à  $\mathbf{K}_a$ .

*Preuve du Fait 2.* La fonction  $\Psi \mapsto i_\Psi(a)$  est positive et *concave* sur  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ , car c'est la borne inférieure d'une famille de fonctions affines positives. Donc le résultat est clair : si  $\Psi = (1 - s)\Psi_1 + s\Psi_2 \in \mathbf{K}_a$  avec  $0 < s < 1$ , alors

$$0 = i_\Psi(a) \geq (1 - s)i_{\Psi_1}(a) + s i_{\Psi_2}(a),$$

et donc  $i_{\Psi_1}(a)$  et  $i_{\Psi_2}(a)$ , qui sont positifs, doivent tous les deux valoir 0.  $\square$

Montrons maintenant que l'état  $\Phi$  est pur, *i.e.* est un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ . Soient  $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ , et supposons que  $\Phi$  appartienne au segment ouvert  $] \Phi_1, \Phi_2 [$  : il s'agit de voir que  $\Phi_1 = \Phi = \Phi_2$ .

Comme  $\Phi|_{\mathcal{D}} \in ](\Phi_1)|_{\mathcal{D}}, (\Phi_2)|_{\mathcal{D}}[$  et que  $\Phi|_{\mathcal{D}}$  est un point extrémal de  $\mathbf{S}(\mathcal{D})$ , on sait déjà que  $(\Phi_1)|_{\mathcal{D}} = \Phi|_{\mathcal{D}} = (\Phi_2)|_{\mathcal{D}}$ .

De plus, on sait par hypothèse que  $\Phi \in \mathbf{K}_a$  pour tout  $a \in \ker(\mathbb{E})$ . Par le Fait 2, on a donc  $\Phi_j \in \mathbf{K}_a$  pour tout  $a \in \ker(\mathbb{E})$  et  $j = 1, 2$ ; et par le Fait 1, on en déduit  $\ker(\mathbb{E}) \subseteq \ker(\Phi_j)$ . Comme  $\mathbb{E}$  est une projection, cela s'écrit encore

$$\Phi_j(a - \mathbb{E}(a)) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A};$$

autrement dit :  $\Phi_j = ((\Phi_j)|_{\mathcal{D}}) \circ \mathbb{E}$ . Comme  $\ker(\mathbb{E}) \subseteq \ker \Phi$  par le Fait 1, on a de même  $\Phi = (\Phi|_{\mathcal{D}}) \circ \mathbb{E}$ ; et donc  $\Phi_j = \Phi$  pour  $j = 1, 2$  puisque  $(\Phi_j)|_{\mathcal{D}} = \Phi|_{\mathcal{D}}$ .  $\square$

Le deuxième lemme dont on a besoin est la version infini-dimensionnelle du Lemme 7.2 (b).

**Lemme 7.10.** *Soit  $(s_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  une matrice infinie à coefficients positifs, avec  $s_{ii} = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  en  $r = 3^N$  morceaux telle que*

$$\forall k \forall j \in I_k : \sum_{i \in I_k} s_{ij} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N \sum_{i \in \mathbb{N}} s_{ij}.$$

*Démonstration.* C'est une application "immédiate" du Lemme 7.2 (b) et du Lemme de sélection de Rado. Les détails sont laissés en exercice.  $\square$

On peut maintenant donner la

*Preuve du Théorème 7.8.* Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$ . D'après le Lemme 7.9, pour montrer que  $\Phi_{\mathcal{U}}$  est un état pur, il suffit de prouver que si  $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifie  $\mathbb{D}(A) = 0$ , alors

$$\inf \left\{ \Phi_{\mathcal{U}}(A^*BA); B \in \mathcal{F}_{\Phi_{\mathcal{U}}}^+ \right\} = 0.$$

Fixons  $A$  vérifiant  $\mathbb{D}(A) = 0$ , et  $\varepsilon > 0$ . On va montrer qu'il existe un ensemble  $I \in \mathcal{U}$  tel que  $\Phi_{\mathcal{U}}(A^*P_I A) \leq \varepsilon$ .

Pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}}(A^*P_I A) &= \mathcal{U}\text{-lim} \langle P_I A e_j, A e_j \rangle \\ &= \mathcal{U}\text{-lim} \left( \sum_{i \in I} \langle P_{\{i\}} A e_j, A e_j \rangle \right). \end{aligned}$$

Posons alors

$$s_{ij} := \langle P_{\{i\}} A e_j, A e_j \rangle = \langle A^* P_{\{i\}} A e_j, e_j \rangle.$$

La matrice infinie  $(s_{ij})$  vérifie les hypothèses du Lemme 7.10. En effet, on a  $s_{ij} \geq 0$  car l'opérateur  $A^*P_{\{i\}}A$  est positif, et  $s_{ii} = \langle P_{\{i\}} A e_i, A e_i \rangle = 0$  car  $P_{\{i\}} A e_i \in [e_i]$  et  $\mathbb{D}(A) = 0$ .

De plus, on a  $\sum_{i \in \mathbb{N}} s_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle P_{\{i\}} A e_j, A e_j \rangle = \|A e_j\|^2$  pour tout  $j$ , et donc

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} s_{i,j} < \infty.$$

Enfin, on a pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{i \in I} s_{ij} = \langle P_I A e_j, A e_j \rangle = \langle A^* P_I A e_j, e_j \rangle.$$

Par le Lemme 7.10 appliqué avec  $N$  suffisamment grand, il existe donc une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall k \forall j \in I_k : \langle A^* P_{I_k} A e_j, e_j \rangle < \varepsilon.$$

Comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, on peut trouver  $k_0$  tel que  $I := I_{k_0} \in \mathcal{U}$ . En considérant  $\mathcal{U}$  comme un quantificateur, on a ainsi

$$\mathcal{U}j : \langle A^* P_I A e_j, e_j \rangle < \varepsilon,$$

et donc  $\Phi_{\mathcal{U}}(A^* P_I A) = \mathcal{U}\text{-lim } \langle A^* P_I A e_j, e_j \rangle \leq \varepsilon$ .  $\square$

On va maintenant montrer que *pour une certaine catégorie d'ultrafiltres  $\mathcal{U}$* , l'état pur  $\varphi_{\mathcal{U}}$  sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  admet bel et bien un unique prolongement à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ .

**Définition 7.11.** *On dira qu'un ultrafiltre  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  est un  $q$ -point s'il vérifie la propriété suivante : pour toute partition  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  en intervalles bornés, il existe un ensemble  $I \in \mathcal{U}$  qui rencontre chaque  $J_k$  en exactement 1 point.*

Par exemple, tout ultrafiltre trivial  $\mathcal{U}_n$  est un  $q$ -point : la partition  $(J_k)$  étant donnée, il n'est pas difficile de trouver un ensemble  $I \subseteq \mathbb{N}$  contenant  $n$  et rencontrant chaque  $J_k$  en exactement 1 point.

Hormis cet exemple, il n'est pas clair qu'il existe vraiment des  $q$ -points dans  $\beta\mathbb{N}$  ... mais l'inverse n'est pas clair non plus. En effet, Choquet a montré dans [20] que si on admet l'**Hypothèse du Continu** CH, alors il existe des  $q$ -points non triviaux. Par ailleurs, il a également montré (sans recourir à CH) qu'il existe des ultrafiltres qui *ne sont pas* des  $q$ -points.

Le théorème suivant est dû à Reid [42]. C'est un des rares exemples de résultats positifs concernant (KS) qui se formule en termes d'ultrafiltres. Ce qui vient d'être dit sur les  $q$ -points montre qu'il ne faut pas en surestimer la portée, mais le résultat et sa preuve sont beaux... On renvoie à [9] pour un résultat plus général, et par exemple à [2] ou [40] pour d'autres considérations sur une éventuelle approche de (KS) "par ultrafiltres".

**Théorème 7.12.** *Si  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  est un  $q$ -point, alors  $\varphi_{\mathcal{U}}$  admet un unique prolongement à  $\mathcal{B}(\ell^2)$ .*

*Démonstration.* Le point clé est le fait suivant.

**Fait 1.** Soit  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  un  $q$ -point. Pour tout  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ , on peut trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que l'opérateur  $P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I$  soit compact.

*Preuve du Fait 1.* Remarquons d'abord qu'on a

$$\mathbb{D}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_{\{n\}} T P_{\{n\}},$$

où la série converge **inconditionnellement** pour la topologie forte des opérateurs, ce qui signifie que toutes ses sous-séries convergent. Pour tout  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on peut donc écrire

$$P_I \mathbb{D}(T) P_I = \sum_{n \in I} P_{\{n\}} T P_{\{n\}}.$$

Fixons une suite  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de nombres réels strictement positifs convergeant très vite vers 0.

Soit  $n_1 := 1$ . Les opérateurs  $TP_{[1, n_1]}$  et  $T^*P_{[1, n_1]}$  sont de rang fini (donc compacts), donc

$$\|(Id - P_{[1, n]})TP_{[1, n_1]}\| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|(Id - P_{[1, n]})T^*P_{[1, n_1]}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

On peut donc trouver un entier  $n_2 > n_1$  tel que

$$\|P_{(n_2, \infty)}TP_{[1, n_1]}\| < \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \|P_{(n_2, \infty)}T^*P_{[1, n_1]}\| < \varepsilon_1.$$

En répétant ce raisonnement, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout entier  $k$  :

$$\|P_{(n_{k+1}, \infty)}TP_{[1, n_k]}\| < \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \|P_{(n_{k+1}, \infty)}T^*P_{[1, n_k]}\| < \varepsilon_k.$$

Posons alors  $J_1 := [1, n_1]$  et  $J_{k+1} := (n_k, n_{k+1}]$  pour tout  $k \geq 1$ . Comme  $\mathcal{U}$  est un  $q$ -point, on peut trouver un ensemble  $I_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $I_0$  rencontre chaque  $J_k$  en exactement 1 point :

$$I_0 \cap J_k = \{m_k\}.$$

Comme  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre, on a  $I_0 \cap 2\mathbb{N} \in \mathcal{U}$  ou  $I_0 \cap (2\mathbb{N} - 1) \in \mathcal{U}$ . Supposons par exemple qu'on soit dans le deuxième cas, *i.e.*

$$I := \{m_1, m_3, m_5, \dots\} \in \mathcal{U}.$$

Comme  $P_I = \sum_{i=0}^{\infty} P_{\{m_{2i+1}\}}$  (où la série converge dans  $\mathcal{B}(\ell^2)$  pour la topologie forte des opérateurs), on a

$$\begin{aligned} P_I T P_I &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} P_{\{m_{2i+1}\}} \right) T \left( \sum_{j=0}^{\infty} P_{\{m_{2j+1}\}} \right) \\ &= P_I \mathbb{D}(T) P_I + \sum_{i=0}^{\infty} P_{\{m_{2i+1}\}} T \left( \sum_{j \neq i} P_{\{m_{2j+1}\}} \right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'opérateur

$$K := \sum_{i=0}^{\infty} P_{\{m_{2i+1}\}} T \left( \sum_{j \neq i} P_{\{m_{2j+1}\}} \right)$$

est compact. Ce n'est *a priori* pas évident, car à ce stade on ne sait pas que les séries définissant  $K$  convergent en norme et donc on ne peut pas immédiatement affirmer que  $K$  est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Soient  $i, j \in \mathbb{N}$  quelconques avec  $i \neq j$ .

Si  $i > j$ , alors  $\{m_{2i+1}\} \subseteq J_{2i+1} \subseteq (n_{2i}, \infty)$  et  $\{m_{2j+1}\} \subseteq J_{2j+1} \subseteq [1, n_{2j+1}] \subseteq [1, n_{2i-1}]$ . Donc  $P_{\{m_{2i+1}\}} T P_{\{m_{2j+1}\}} = P_{\{m_{2i+1}\}} P_{(n_{2i}, \infty)} T P_{[1, n_{2i-1}]} P_{\{m_{2j+1}\}}$ , et par suite

$$\|P_{\{m_{2i+1}\}} T P_{\{m_{2j+1}\}}\| \leq \|P_{(n_{2i}, \infty)} T P_{[1, n_{2i-1}]}\| < \varepsilon_{2i-1}.$$

Si  $i < j$ , on a de même

$$\|P_{\{m_{2i+1}\}}TP_{\{m_{2j+1}\}}\| = \|P_{\{m_{2j+1}\}}T^*P_{\{m_{2i+1}\}}\| < \varepsilon_{2j-1}.$$

On en déduit que si la suite  $(\varepsilon_k)$  tend suffisamment vite vers 0 et si on pose

$$K_{ij} := P_{\{m_{2i+1}\}}TP_{\{m_{2j+1}\}},$$

alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  fixé, la série  $\sum_{j \neq i} K_{ij}$  converge *en norme* dans  $\mathcal{B}(\ell^2)$  et

$$\left\| \sum_{j \neq i} K_{ij} \right\| \leq \sum_{j < i} \varepsilon_{2i-1} + \sum_{j > i} \varepsilon_{2j-1} = (i-1)\varepsilon_{2i-1} + \sum_{j > i} \varepsilon_{2j-1} := \alpha_i.$$

Donc l'opérateur

$$K_i := \sum_{j \neq i} K_{ij}$$

est compact car les opérateurs  $K_{ij}$  sont de rang fini ; et si la suite  $(\varepsilon_k)$  tend assez vite vers 0, alors la série  $\sum \alpha_i$  est convergente et donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|K_i\| < \infty.$$

Ainsi, la série  $\sum K_i$  converge en norme dans  $\mathcal{B}(\ell^2)$  ; et comme  $K = \sum_0^{\infty} K_i$  (où *a priori* la convergence n'avait lieu que pour la topologie forte des opérateurs), on peut conclure que l'opérateur  $K$  est compact.  $\square$

Introduisons maintenant la notation *ad hoc* suivante : si  $\alpha_I$  est une quantité positive dépendant de  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on écrira

$$\alpha_I \xrightarrow{I \rightarrow \mathcal{U}} 0$$

pour indiquer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $I \in \mathcal{U}$  tel que  $\alpha_I \leq \varepsilon$ .

**Fait 2.** Soit  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$  un ultrafiltre non trivial. Si  $K \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est un opérateur compact, alors  $\|P_I K\| \xrightarrow{I \rightarrow \mathcal{U}} 0$ .

*Démonstration.* Fixons un opérateur compact  $K$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $K$  est compact, on peut trouver un entier  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $\|P_{[1,d]}K - K\| \leq \varepsilon$ . Comme l'ultrafiltre  $\mathcal{U}$  est non trivial, il contient le filtre de Fréchet et donc  $I := \mathbb{N} \setminus [1, d]$  appartient à  $\mathcal{U}$  ; et comme  $P_I = Id - P_{[1,d]}$ , on a  $\|P_I K\| \leq \varepsilon$ .  $\square$

Il est à présent facile de terminer la preuve du théorème. Fixons un  $q$ -point  $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ . Par le Lemme 3.12, on peut supposer que l'ultrafiltre  $\mathcal{U}$  est *non trivial*.

Soit  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  quelconque, et soit  $\varepsilon > 0$ . Par le Fait 1, on peut trouver  $I_1 \in \mathcal{U}$  tel que l'opérateur  $K := P_{I_1}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_1}$  soit compact ; et par le Fait 2, on peut trouver  $I_2 \in \mathcal{U}$  tel que  $\|P_{I_2}KP_{I_2}\| \leq \varepsilon$ . Alors  $I := I_1 \cap I_2$  appartient à  $\mathcal{U}$ , et on a

$$\|P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I\| \leq \|P_{I_2}KP_{I_2}\| \leq \varepsilon.$$

On voit ainsi que tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  est compressible *modulo*  $\mathcal{U}$  ; d'où le résultat par le Corollaire 4.3.  $\square$

**7.5. Repères.** Comme il a déjà été dit, la théorie des repères est depuis déjà un certain temps en croissance au moins exponentielle ; et en particulier, énormément de résultats partiels ont été obtenus ces dernières années concernant la Conjecture de Feichtinger. Il n'est pas question d'en donner ici un panorama exhaustif, ce que je serais de toute façon bien incapable de faire. Je vais me contenter d'indiquer très brièvement quelques résultats frappants, en renvoyant à [15] pour plus de détails et pour un tour d'horizon beaucoup plus ambitieux.

**7.5.1. Repères de Gabor.** Comme il a été dit, les repères de Gabor sont à l'origine de la conjecture de Feichtinger. Il est donc naturel de citer au moins un résultat concernant les suites de la forme  $f_{m,n}(x) = f(x - ma)e^{inx}$  : dans [14], Bownik et Speegle montrent que si  $ab \in \mathbb{Q}$ , alors  $(f_{m,n})$  est réunion finie de suites de Riesz. (L'article contient de nombreux autres résultats très intéressants concernant la conjecture de Feichtinger, en particulier pour les repères d'ondelettes.)

**7.5.2. Repères de translatés.** Pour toute fonction  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , notons  $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$  la **translatée** de  $g$  par  $\lambda$  :

$$g_\lambda(x) = g(x - \lambda).$$

Dans [16], Casazza, Christensen et Kalton démontrent que de nombreux “repères de translatés” sont en fait des suites de Riesz :

**Théorème 7.13.** *Soit  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$  un ensemble minoré, soit  $a > 0$  et soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Si la suite  $(g_{na})_{n \in \Lambda}$  est un repère de l'espace qu'elle engendre, alors c'est une suite de Riesz.*

En particulier, la Conjecture de Feichtinger est “trivialement” satisfaite pour les repères du type précédent.

**7.5.3. Suites localisées.** Il est possible de définir plusieurs notions raisonnables de “localisation” pour une suite vivant dans un espace de Hilbert  $H$ .

Dans [28], Gröchenig considère des suites  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  indexées par un ensemble  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ . L'ensemble  $\Lambda$  est supposé  $\delta$ -séparé pour un certain  $\delta > 0$ , ce qui signifie que les points de  $\Lambda$  sont à distance au moins  $\delta$  les uns des autres. La suite  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq H$  est dite **intrinsèquement localisée** s'il existe deux constantes  $C < \infty$  et  $s > d$  telles que

$$|\langle f_\lambda, f_\mu \rangle| \leq C \left(1 + \|\lambda - \mu\|\right)^{-s} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Il est montré dans [28] que toute suite intrinsèquement localisée  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq H$  vérifiant  $\inf_{\lambda \in \Lambda} \|f_\lambda\| > 0$  est réunion finie de suites de Riesz. Des résultats du même type se trouvent dans [6] et [26].

Ainsi, la Conjecture de Feichtinger est vraie pour les repères localisés ; ce qui inclut de nombreux cas “utiles dans les applications”.

**7.5.4. Repères de noyaux reproduisants normalisés.** Soit  $H$  un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , tel que les évaluations  $f \mapsto f(\lambda)$  soient continues. Pour tout  $\lambda \in \Omega$ , il existe alors une unique fonction  $k_\lambda \in H$  telle que

$$\forall f \in H : f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle.$$

La fonction  $k_\lambda$  s'appelle le **noyau reproduisant** de l'espace  $H$  au point  $\lambda$ . Le **noyau reproduisant normalisé** (qui ne reproduit plus rien du tout) est par définition

$$\tilde{k}_\lambda := \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}.$$

Il est très naturel de tenter de “tester” la Conjecture de Feichtinger sur des suites de noyaux reproduisants normalisés, dans divers espaces de fonctions  $H$  ; et de fait, on connaît beaucoup de choses.

1. Cas de l'espace de Hardy  $H^2(\mathbb{D})$ .

Ici,  $\mathbb{D}$  est le disque unité de  $\mathbb{C}$ , et pas la projection canonique de  $\mathcal{B}(\ell^2)$  sur  $\mathcal{D}(\ell^2)$  ! L'espace de Hardy  $H^2(\mathbb{D})$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f$  holomorphes sur  $\mathbb{D}$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dont les coefficients de Taylor sont de carré sommable :

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Le noyau reproduisant au point  $\lambda \in \mathbb{D}$  est facile à déterminer : on a

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z};$$

ce qui est juste une traduction de la formule de Cauchy.

Les suites  $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}$  pour lesquelles la suite de noyaux reproduisants normalisés  $(\tilde{k}_{\lambda_i})$  est une suite de Riesz ou une suite de Bessel dans  $H^2$  ont été et sont encore très étudiées ; voir par exemple la référence incontournable [39].

On sait que  $(\tilde{k}_{\lambda_i})$  est une suite de Riesz si et seulement si elle est de Bessel avec un opérateur de synthèse  $S = \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H^2$  injectif à image fermée ; ce qui revient à dire que l'application linéaire  $A : H^2 \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  définie par  $Af = (\langle f, \tilde{k}_{\lambda_i} \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$  envoie continûment  $H^2$  dans  $\ell^2$ , et que l'opérateur  $A : H^2 \rightarrow \ell^2$  (qui est bien entendu l'adjoint de  $S$ ) est *surjectif*. Notons également que le fait que  $A$  envoie *continûment*  $H^2$  dans  $\ell^2$  est automatique par le théorème du graphe fermé, dès lors qu'on sait que  $A(H^2) \subseteq \ell^2$ . Comme  $\langle f, \tilde{k}_{\lambda_i} \rangle = \frac{1}{\|k_{\lambda_i}\|} f(\lambda_i)$  pour toute fonction  $f \in H^2$ , on voit donc que  $(\tilde{k}_{\lambda_i})$  est une suite de Riesz si et seulement si  $\Lambda = (\lambda_i)$  est une **suite d'interpolation complète pour  $H^2$** , au sens suivant : le problème d'interpolation

$$f(\lambda_i) = \|k_{\lambda_i}\| a_i \quad , \quad i \in \mathbb{N}$$

admet une solution  $f \in H^2$  si et seulement si la donnée  $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  appartient à  $\ell^2$ .

Dans le même esprit, comme  $\|k_\lambda\|_{H^2}^2 = k_\lambda(\lambda) = (1 - |\lambda|^2)^{-1}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{D}$ , on voit que  $(\tilde{k}_{\lambda_i})$  est une suite de Bessel si et seulement si la suite  $(\lambda_i)$  vérifie la **condition de Carleson-Newman**

$$(CN) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} (1 - |\lambda_i|^2) |f(\lambda_i)|^2 < \infty \quad \text{pour toute } f \in H^2.$$

Par ailleurs, Shapiro et Shields ont montré dans [45] que  $(\tilde{k}_{\lambda_i})$  est une suite d'interpolation complète pour  $H^2$  si et seulement si  $(\lambda_i)$  est une **suite de Carleson**, *i.e.* vérifie la condition

$$(C) \quad \inf_j \prod_{i \neq j} \left| \frac{\lambda_i - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_i \lambda_j} \right| > 0.$$

Enfin, McKenna a montré dans [38] que si  $(\lambda_i)$  vérifie (CN), alors  $(\lambda_i)$  est une réunion finie de suites de Carleson.

De ces résultats très classiques, on déduit immédiatement que *la Conjecture de Feichtinger est vraie pour les suites de noyaux reproduisants normalisés dans  $H^2(\mathbb{D})$* . Cette observation est due à Nikol'skiĭ.

## 2. Cas des espaces modèles.

Soit  $H^\infty(\mathbb{D})$  l'espace des fonctions holomorphes et bornées sur  $\mathbb{D}$ . Une fonction  $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D})$  est dite **intérieure** si sa “valeur au bord” est de module presque partout égal à 1 sur  $\partial\mathbb{D}$ ; autrement dit si on a  $\lim_{r \rightarrow 1^-} |\Theta(re^{it})| = 1$  pour presque tout  $t \in [0, 2\pi)$ . L'**espace modèle**  $\mathcal{K}_\Theta$  associé à une fonction intérieure  $\Theta$  est par définition le supplémentaire orthogonal de  $\Theta H^2 := \{\Theta f; f \in H^2\}$  dans  $H^2 = H^2(\mathbb{D})$  :

$$\mathcal{K}_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2.$$

À titre d'exercice, on pourra montrer que le noyau reproduisant de  $\mathcal{K}_\Theta$  au point  $\lambda \in \mathbb{D}$ , noté  $k_\lambda^\Theta$ , est donné par la formule

$$k_\lambda^\Theta(z) = \frac{1 - \overline{\Theta(\lambda)} \Theta(z)}{1 - \bar{\lambda}z}.$$

Dans [7], Dyakonov et Baranov obtiennent de très beaux résultats sur les suites de noyaux reproduisants normalisés dans les espaces modèles, que l'on peut résumer par le théorème suivant.

**Théorème 7.14.** *Soit  $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D})$  une fonction intérieure.*

- (a) *Si  $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $\mathbb{D}$  vérifiant  $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\Theta(\lambda_i)| < 1$  et si la suite  $(\tilde{k}_{\lambda_i}^\Theta)$  est une suite de Bessel, alors  $(\tilde{k}_{\lambda_i}^\Theta)$  est réunion finie de suites de Riesz.*
- (b) *S'il existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  tel que l'ensemble  $\{z \in \mathbb{D}; |\Theta(z)| < \varepsilon\}$  est connexe, alors la Conjecture de Feichtinger est vraie pour les suites de noyaux reproduisants normalisés dans  $\mathcal{K}_\Theta$ .*

## 3. Cas des espaces contractivement contenus dans $H^2$ .

Un espace de Hilbert  $H$  est dit *contractivement contenu dans  $H^2$*  si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $H^2(\mathbb{D})$  et si on a  $\|\cdot\|_H \geq \|\cdot\|_{H^2}$ . Dans [34], Lata et Paulsen ont montré que pour résoudre la Conjecture de Feichtinger, il suffirait de tout savoir sur ces espaces et leurs noyaux reproduisants :

**Théorème 7.15.** *La Conjecture de Feichtinger est vraie si et seulement si elle est vraie pour les suites de noyaux reproduisants dans les espaces de Hilbert contractivement contenus dans  $H^2$ .*

C'est un résultat “philosophiquement” très intéressant, mais qui n'est sans doute pas d'une énorme utilité pratique : le zoo des espaces contractivement contenus dans  $H^2$  est particulièrement vaste ! On pourra à ce sujet consulter le monumental ouvrage [25].

## 4. Cas des espaces ayant la **Propriété de Pick**.

Soit  $H$  un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , avec évaluations continues. On dit qu'une fonction  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est un **multiplicateur** de  $H$  si  $\phi f \in H$  pour toute  $f \in H$ ; dans ce cas, on note  $\|\phi\|_{\mathfrak{M}(H)}$  la norme de l'opérateur de multiplication  $M_\phi : H \rightarrow H$ . Par exemple, les multiplicateurs de l'espace  $H^2 = H^2(\mathbb{D})$  sont les fonctions de  $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ , et  $\|\phi\|_{\mathfrak{M}(H^2)} = \|\phi\|_\infty$  pour toute fonction  $\phi \in H^\infty$ .

On dit que l'espace  $H$  possède la **Propriété de Pick** si pour toute suite finie  $(\lambda_i)_{i \in I} \subseteq \Omega$  et pour toute suite  $(a_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}$  indexée par le même ensemble  $I$  telle que la matrice hermitienne  $\left( (1 - \bar{a}_j a_i) \langle k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} \rangle \right)_{i,j \in I}$  soit positive, on peut trouver un multiplicateur  $\phi$  de  $H$  tel que  $\phi(\lambda_i) = a_i$  pour tout  $i \in I$  et  $\|\phi\|_{\mathfrak{M}(H)} \leq 1$ . Le très classique **Théorème de Pick** affirme précisément que l'espace de Hardy  $H^2$  possède la Propriété de Pick.

Dans [43], Seip propose la conjecture suivante : *Si  $H$  est un espace possédant la Propriété de Pick, alors toute suite de Bessel de noyaux reproduisants normalisés  $(f_i)_{i \in I} \subseteq H$  vérifiant la condition de "séparation"  $\sup_{i \neq j} |\langle f_i, f_j \rangle| < 1$ , est en fait une suite de Riesz.* Cette conjecture est vraie dans de nombreux cas, en particulier pour l'espace de Hardy  $H^2$ ; voir [10] pour plus de détails.

Par ailleurs, il est observé dans [19] que toute suite de Bessel normalisée dans un espace de Hilbert est réunion finie de suites (de Bessel) vérifiant la condition de séparation précédente. On voit donc que *la validité de la Conjecture de Seip entraînerait la validité de la Conjecture de Feichtinger pour toutes les suites de Bessel de noyaux reproduisants normalisés dans un espace possédant la Propriété de Pick.*

**7.6. Rado-Horn.** Le *Théorème de Rado-Horn* est un résultat d'algèbre linéaire de nature "combinatoire", démontré indépendamment par Rado en 1955 et par Horn en 1962. Il s'énonce comme suit.

**Théorème 7.16.** *Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite dans un espace vectoriel  $V$ , et soit  $r \in \mathbb{N}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  *$(f_i)$  peut être partitionnée en  $r$  suites linéairement indépendantes;*
- (2) *pour tout ensemble fini  $J \subseteq I$ , on a*

$$\dim [f_i; i \in J] \geq \frac{1}{r} |J|.$$

On connaît maintenant de nombreuses preuves de ce résultat, toutes hautement non triviales; voir [18] pour une intéressante discussion. Il y a cependant une implication très facile (exercice : trouver laquelle et la démontrer).

Voici une conséquence du Théorème de Rado-Horn qui n'est pas sans suggérer un lien possible avec la Conjecture de Feichtinger.

**Corollaire 7.17.** *Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $(f_i)_{i \in I}$  est un repère  $r$ -Parseval normalisé dans  $\mathbb{C}^d$ ,  $d \geq 1$ , alors  $|I| = rd$  et  $(f_i)$  peut être partitionné en  $r$  bases de  $\mathbb{C}^d$ .*

*Démonstration.* On a pour tout  $j \in [d]$  :

$$\sum_{i \in I} |\langle e_j, f_i \rangle|^2 = r \|e_j\|^2 = r;$$

d'où en sommant de 1 à  $d$  :

$$rd = \sum_{j=1}^d \left( \sum_{i \in I} |\langle e_j, f_i \rangle|^2 \right) = \sum_{i \in I} \|f_i\|^2 = |I|.$$

Soit maintenant  $J$  une partie quelconque de  $I$ , et soit  $P_J$  la projection orthogonale de  $\mathbb{C}^d$  sur  $F_J := [f_i; i \in J]$ . Comme “le rang d’un projecteur est égal à sa trace”, on a

$$\begin{aligned} \dim(F_J) = \text{trace}(P_J) &= \sum_{j=1}^d \langle P_J e_j, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^d \|P_J e_j\|^2 \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^d \sum_{i \in I} |\langle P_J e_j, f_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\dim(F_J) \geq \frac{1}{r} \sum_{i \in J} \left( \sum_{j=1}^d |\langle e_j, P_J f_i \rangle|^2 \right) = \frac{1}{r} \sum_{i \in J} \|P_J f_i\|^2 = \frac{1}{r} \sum_{i \in J} \|f_i\|^2 = \frac{|J|}{r}.$$

D’après le Théorème de Rado-Horn, on en déduit que  $(f_i)$  peut être partitionnée en  $r$  suites linéairement indépendantes. Ces suites contiennent chacune au plus  $d$  vecteurs puisqu’on est en dimension  $d$ ; mais comme  $|I| = rd$ , elles contiennent en fait exactement  $d$  vecteurs, et donc ce sont des bases de  $\mathbb{C}^d$ .  $\square$

À ce stade, il est judicieux de rappeler l’énoncé  $W(C)$  : *Il existe un entier  $r \in \mathbb{N}$  et une constante  $\eta > 0$  tels que tout repère  $C$ -Parseval fini  $(f_i)$  avec  $\|f_i\| \leq 1$  est réunion de  $r$  suites de Bessel de constantes au plus égales à  $(1 - \eta)C$ . On a vu que la validité de  $W(C)$  pour un  $C > 1$  est équivalente à (KS).*

Cela étant dit, admettons à présent que pour un certain entier  $r \geq 2$  on sache démontrer la version “quantitative” suivante du Corollaire 7.17 : *tout repère  $r$ -Parseval normalisé  $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}^d$  peut être partitionné en  $r$  bases  $(f_i)_{i \in I_1}, \dots, (f_i)_{i \in I_r}$  dont les “constantes inférieures de repère” sont minorées, i.e. au moins égales à une certaine constante  $\alpha = \alpha(r) > 0$ .*

Pour  $k = 1, \dots, r$  et  $x \in \mathbb{C}^d$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_k} |\langle x, f_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 - \sum_{i \in I \setminus I_k} |\langle x, f_i \rangle|^2 \\ &\leq r \|x\|^2 - \alpha \|x\|^2 = (1 - \eta)r \|x\|^2, \end{aligned}$$

où  $\eta = \alpha/r$ . Autrement dit, la constante de Bessel de chaque suite  $(f_i)_{i \in I_k}$  est au plus égale à  $(1 - \eta)r$ .

On voit donc que l’énoncé  $W(r)$  est satisfait, à un détail près : il n’est valable *a priori* que pour des repères  $r$ -Parseval *normalisés*. Cependant, Weaver a montré dans [53] que cette version affaiblie de  $W(r)$  entraîne  $W(r)$  si de plus  $r$  est au moins égal à 4 et  $\eta = \alpha/r$  est supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , i.e.  $\alpha > \sqrt{r}$ .

On arrive ainsi à la conclusion suivante : *si, pour un certain entier  $r \geq 4$ , on est capable de démontrer une version quantitative du Théorème de Rado-Horn suffisamment forte, alors on a prouvé que (KS) est vrai.*

**7.7. Et pourquoi pas un contre-exemple ?** Outre Kadison et Singer eux-même, de nombreux spécialistes considéraient comme très plausible que (KS) soit en fait faux. Et de fait, on a pu montrer que certaines conjectures “très proches mais un peu plus fortes” sont bel et bien fausses. Cependant, je ne parlerai absolument pas des diverses stratégies élaborées depuis 1959 pour tenter de trouver un contre-exemple à (KS). On pourra consulter [2] ou [15] pour d’intéressantes discussions.

## 8. MARCUS-SPIELMAN-SRIVASTAVA

Rappelons que si  $H$  est un espace de Hilbert et si  $v \in H \setminus \{0\}$ , on note  $v \otimes v$  l’opérateur de rang 1 sur  $H$  défini par

$$(v \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle v.$$

L’opérateur  $v \otimes v$  est auto-adjoint ; et si  $\|v\| = 1$ , il s’agit simplement de la projection orthogonale sur  $[v] = \mathbb{C}v$ .

Les opérateurs du type  $v \otimes v$  interviennent très naturellement dans la théorie des repères, en raison du fait suivant :

**Fait 8.1.** *Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite finie dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors*

- *$(f_i)$  est une suite de Bessel si et seulement si il existe une constante  $B < \infty$  telle que*

$$\sum_{i \in I} f_i \otimes f_i \leq B \text{Id};$$

- *$(f_i)$  est un repère de  $H$  si et seulement si il existe deux constantes  $A > 0$  et  $B < \infty$  telles que*

$$A \text{Id} \leq \sum_{i \in I} f_i \otimes f_i \leq B \text{Id};$$

- *$(f_i)$  est un repère  $C$ -Parseval, pour un certain  $C > 0$ , si et seulement si*

$$\sum_{i \in I} f_i \otimes f_i = C \text{Id};$$

*Démonstration.* Il suffit d’observer que pour tout  $x \in H$ , on a

$$\left\langle \left( \sum_{i \in I} f_i \otimes f_i \right) x, x \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle f_i, x \rangle = \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2.$$

□

Dans [36], Marcus, Spielman et Srivastava démontrent le résultat suivant. On appellera **vecteur aléatoire dans  $\mathbb{C}^d$**  toute variable aléatoire  $v$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^d$ . Les variables aléatoires seront supposées définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . L’espérance d’une variable aléatoire réelle ou vectorielle  $\xi$  est notée  $\mathbb{E}(\xi)$  ou  $\mathbb{E}\xi$ .

**Théorème 8.2.** *Soit  $(v_i)_{i \in I}$  une suite finie de vecteurs aléatoires indépendants dans  $\mathbb{C}^d$ , chaque  $v_i$  ne prenant qu’un nombre fini de valeurs. Soit également  $\varepsilon > 0$ . On suppose qu’on a*

$$\mathbb{E}\|v_i\|^2 \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } i \in I, \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left( \sum_{i \in I} v_i \otimes v_i \right) = \text{Id}.$$

Alors, on a avec probabilité positive :

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) \right\| \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2.$$

En première lecture, ce résultat peut sembler presque anodin. Comme “la norme de l’espérance n’est pas plus grande que l’espérance de la norme”, on a évidemment

$$1 = \|Id\| \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{i \in I} v_i \otimes v_i \right\|;$$

et le Théorème 8.2 dit “simplement” que pour certaines réalisations des  $v_i$ , on peut essentiellement renverser cette inégalité évidente.

En deuxième lecture ... on ne voit pas du tout comment démontrer ce théorème ; ce qui n’est pas très étonnant au vu du corollaire suivant.

**Corollaire 8.3.** *L’énoncé  $W(C)$  est vrai pour tout  $C > 1$  ; et par conséquent, (KS) et toutes ses versions équivalentes sont vrais.*

*Démonstration.* Fixons  $C > 1$  et un repère  $C$ -Parseval fini  $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}^d$ , avec  $\|f_i\| \leq 1$ . Par le Fait 8.1, on a ainsi

$$\sum_{i \in I} f_i \otimes f_i = C Id.$$

Il s’agit de trouver une partition  $(I_1, \dots, I_r)$  de  $I$  telle que chaque suite  $(f_i)_{i \in I_k}$  ait une constante de Bessel au plus égale à  $(1 - \eta)C$ , où l’entier  $r$  et la constante  $\eta > 0$  dépendent uniquement de  $C$ .

L’idée, très naturelle, est de choisir la partition  $(I_1, \dots, I_r)$  “au hasard”.

Fixons un entier  $r \geq 2$ , et soit  $(k_i)_{i \in I}$  une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l’ensemble  $\{1, \dots, r\}$  :

$$\mathbb{P}(k_i = k) = \frac{1}{r} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

On définit des variables aléatoires  $v_i$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{dr} = \mathbb{C}^d \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^d$  de la façon suivante :

$$v_i(\omega) := \sqrt{\frac{r}{C}} (0 \oplus \dots \oplus f_i \oplus \dots \oplus 0),$$

où  $f_i$  apparaît à la place  $k_i(\omega)$ .

Les vecteurs aléatoires  $v_i$  sont indépendants, et prennent chacun exactement  $r$  valeurs. De plus, comme  $\|f_i\| \leq 1$  on a

$$\mathbb{E}\|v_i\|^2 \leq \frac{r}{C} \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Enfin, on a

$$v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) = \frac{r}{C} (0 \oplus \dots \oplus (f_i \otimes f_i) \oplus \dots \oplus 0),$$

où  $f_i \otimes f_i$  apparaît à la place  $k_i(\omega)$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v_i \otimes v_i) &= \frac{r}{C} \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(k_i = k) \left( 0 \oplus \dots \oplus \underbrace{(f_i \otimes f_i)}_{\text{place } k} \oplus \dots \oplus 0 \right) \\ &= \frac{1}{C} \left( (f_i \otimes f_i) \oplus \dots \oplus (f_i \otimes f_i) \oplus \dots \oplus (f_i \otimes f_i) \right); \end{aligned}$$

et comme  $\sum_i f_i \otimes f_i = C Id$ , on en déduit

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i \in I} v_i \otimes v_i \right) = \frac{1}{C} (C Id \oplus \cdots \oplus C Id) = Id.$$

Par le Théorème 8.2, on peut donc trouver au moins un  $\omega \in \Omega$  (l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires sont définies) tel que

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) \right\| \leq \left( 1 + \sqrt{\frac{r}{C}} \right)^2.$$

Écrivons pour simplifier  $\mathbf{v}_i := v_i(\omega)$  et  $\mathbf{k}_i := k_i(\omega)$ . Soit  $(I_1, \dots, I_r)$  la partition de  $I$  définie par la suite  $(\mathbf{k}_i)_{i \in I}$  :

$$I_k := \{i \in I; \mathbf{k}_i = k\} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Par définition des  $I_k$ , on a

$$\sum_{i \in I} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i = \frac{r}{C} \left( \sum_{i \in I_1} f_i \otimes f_i \right) \oplus \cdots \oplus \left( \sum_{i \in I_r} f_i \otimes f_i \right),$$

et donc

$$\left\| \sum_{i \in I} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \right\| = \frac{r}{C} \max \left( \left\| \sum_{i \in I_1} f_i \otimes f_i \right\|, \dots, \left\| \sum_{i \in I_r} f_i \otimes f_i \right\| \right).$$

Comme  $\left\| \sum_{i \in I} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \right\| \leq \left( 1 + \sqrt{\frac{r}{C}} \right)^2$ , on obtient donc

$$\left\| \sum_{i \in I_k} f_i \otimes f_i \right\| \leq \frac{C}{r} \left( 1 + \sqrt{\frac{r}{C}} \right)^2 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

D'après le Fait 8.1, cela signifie que chaque suite  $(f_i)_{i \in I_k}$  a une constante de Bessel au plus égale à

$$B(r, C) := \frac{C}{r} \left( 1 + \sqrt{\frac{r}{C}} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{C}} \right)^2 C.$$

Comme  $C > 1$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{C}} < 1$  si  $r = r(C)$  est assez grand, de sorte qu'on peut écrire  $B(r, C) = (1 - \eta)C$ , où  $\eta = \eta(C) > 0$ . Et ainsi, la démonstration est terminée.  $\square$

*Remarque.* En prenant  $C = 2$ , on trouve que l'énoncé  $AA(\frac{1}{2})$  est satisfait avec témoins  $r = 12$  et  $\eta$  tel que  $1 - \eta = \frac{14+4\sqrt{6}}{24}$ . En revenant à la preuve de la Proposition 5.1, on voit alors que si  $\varepsilon > 0$  est donné, tout opérateur  $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  vérifiant  $\|T\| \leq 1$  et  $\mathbb{D}(T) = 0$  est  $\varepsilon$ -pavable en  $r(\varepsilon) := 12^{4N}$  morceaux, où  $N$  est le plus petit entier tel que  $(1 - \eta)^N \leq \varepsilon$ .

Bien que la preuve du Théorème 8.2 soit finalement assez courte, elle ne sera pas donnée ici, en grande partie parce que je ne pense pas l'avoir comprise au delà d'une lecture mot à mot. L'article original [36] est de toute façon très bien écrit ; et on trouve également de belles présentations dans [51], [49] et sur le "blog" de T. Tao.

Il est tout de même assez facile de résumer les étapes principales de la preuve en quelques mots.

En notant  $P_A$  le polynôme caractéristique de l'opérateur aléatoire  $A := \sum_i v_i \otimes v_i$  et en posant  $P := \mathbb{E}P_A$ , on commence par montrer d'une part que le polynôme  $P$  admet une expression explicite assez simple, et d'autre part que la plus grande racine de  $P_A$  (c'est à dire la norme de l'opérateur positif  $A = \sum_i v_i \otimes v_i$ ) est, avec probabilité positive, au plus égale à la plus grande racine de  $P$ .

Le gros du travail consiste alors à montrer que la plus grande valeur propre de  $P$  est au plus égale à  $(1 + \sqrt{\varepsilon})^2$ ; ce qui demande d'introduire des idées entièrement nouvelles. Les notions clés utilisées dans cette dernière étape sont celles de **polynôme réel-stable** et de **famille entrelacée de polynômes...** mais on n'en dira pas plus.

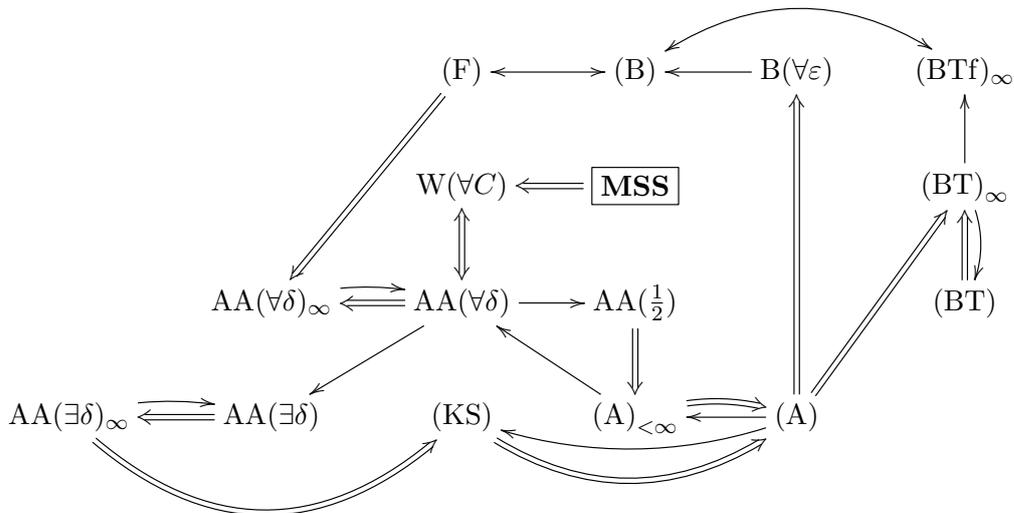
Il est tout à fait remarquable que les mêmes outils aient permis aux trois mêmes auteurs de résoudre dans [35] un problème très célèbre de théorie des graphes, en prouvant l'existence de familles infinies de **graphes de Ramanujan** de degré arbitraire. Voir [37] pour un "survol" des techniques en question.

Pour conclure, on peut se retourner et mesurer le chemin parcouru : le Problème de Kadison-Singer, issu d'une branche très abstraite de l'analyse fonctionnelle, considéré comme "inattaquable" par de nombreux spécialistes et sur lequel certains résultats partiels avaient été obtenus par des méthodes d'une complexité vertigineuse, a été résolu de manière finalement assez "élémentaire" (mais remarquablement ingénieuse) par des chercheurs travaillant dans des domaines *a priori* très éloignés, à la frontière des mathématiques et de l'informatique. Il y a certainement là matière à réflexion...

### 9. UN SCHÉMA POUR TERMINER

Le diagramme ci-dessous récapitule l'essentiel de ce que j'ai raconté dans cet article. Un simple coup d'œil suffit pour se convaincre (si besoin était) que le chemin suivi a tout de même été assez tortueux.

Les notations devraient être suffisamment claires pour qu'il soit inutile de les expliquer. Précisons cependant que les flèches simples indiquent des implications "faciles" (voire triviales), et les flèches doubles des implications plus délicates; ceci étant bien entendu très subjectif.



## RÉFÉRENCES

- [1] C. A. Akemann et J. Anderson, *Lyapunov theorems for operator algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. **94** (1991).
- [2] C. A. Akemann et V. Paulsen, *State extensions and the Kadison-Singer problem*. En ligne sur la page de V. Paulsen.
- [3] J. Anderson, *Extensions, restrictions and representations of states on  $C^*$ -algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 303–329.
- [4] J. Anderson, *Extreme points in sets of positive linear maps on  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$* . J. Funct. Anal. **31** (1979), 195–217.
- [5] W. Arveson, *An invitation to  $C^*$ -algebras*. Springer GTM **39** (1976).
- [6] R. Balan, P. Casazza, G. Peter et Z. Landau, *Density, overcompleteness, and localization of frames. I*. J. Fourier Anal. Appl. **12** (2006), 105–143.
- [7] A. Baranov et K. Dyakonov, *The Feichtinger Conjecture for reproducing kernels in model subspaces*. J. Geom. Anal. **21** (2011), 276–287.
- [8] K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss, *Matrix norm inequalities and the relative Dixmier property*. Integral Equations Operator Theory **11** (1988), 28–48.
- [9] T. M. Bice, *Filters in  $C^*$ -algebras*. Canad. J. Math. **65** (2013), 485–509.
- [10] B. Bøe, *An interpolation theorem for Hilbert spaces with Nevanlinna-Pick kernel*. Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2077–2081.
- [11] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*. Masson (1981).
- [12] J. Bourgain et L. Tzafriri, *Invertibility of “large” submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis*. Israel J. Math. **57** (1987), 137–224.
- [13] J. Bourgain et L. Tzafriri, *On a problem of Kadison and Singer*. J. Reine Angew. Math. **420** (1991), 1–43.
- [14] M. Bownik et D. Speegle, *The Feichtinger Conjecture for wavelet frames, Gabor frames and frames of translates*. Canad. J. Math. **58** (2006), 1121–1143.
- [15] P. Casazza, M. Fickus, J. C. Tremain et E. Weber, *The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering : a detailed account*. Contemp. Math. **414** (2006), 299–355.
- [16] P. Casazza, O. Christensen et N. J. Kalton, *Frames of translates*. Collect. Math. **52** (2001), 35–54.
- [17] P. Casazza, O. Christensen, A. Lindner et R. Vershynin, *Frames and the Feichtinger conjecture*. Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1025–1033.
- [18] P. Casazza et J. Peterson, *An elementary, illustrative proof of the Rado-Horn theorem*. Linear Algebra Appl. **437** (2012), 2523–2537.
- [19] I. Chalendar, E. Fricain et D. Timotin, *A short note on the Feichtinger conjecture*. Preprint (2011). En ligne sur arXiv.
- [20] G. Choquet, *Deux classes remarquables d’ultrafiltres sur  $\mathbb{N}$* . Bull. Sci. Math. **92** (1968), 143–153.
- [21] P. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press (1930).
- [22] J. Dixmier, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*. Éditions Jacques Gabay (1969).
- [23] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*. Springer GTM **179** (1998).
- [24] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*. Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1952), 341–366.
- [25] E. Fricain et J. Mashreghi, *Theory of de Branges-Rovnyak spaces*. Cambridge University Press (à paraître).
- [26] P. Gavruta, *On the Feichtinger Conjecture*. Electron. J. Linear Algebra **26** (2013), 546–552.
- [27] K. Gregson, *Extensions of pure states of  $C^*$ -algebras*. PhD thesis, University of Aberdeen (1986).
- [28] K. Gröchenig, *Localized frames are finite unions of Riesz sequences*. Adv. Comput. Math. **18** (2003), 149–157.
- [29] H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss, *The relative Dixmier property in discrete crossed products*. J. Funct. Anal. **69** (1986), 121–140.

- [30] N. J. A. Harvey, *An introduction to the Kadison-Singer problem and the paving conjecture*. En ligne sur la page de l'auteur.
- [31] P. Jaming, *Inversibilité restreinte, problème d'extension de Kadison-Singer et applications à l'analyse harmonique*. Mémoire de DEA (1994), disponible en ligne.
- [32] R. Kadison et I. M. Singer, *Extensions of pure states*. Amer. J. Math. **81** (1959), 383–400.
- [33] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*. Springer GTM **156** (1995).
- [34] S. Lata et V. Paulsen, *The Feichtinger conjecture and reproducing kernel Hilbert spaces*. Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 130–147.
- [35] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava, *Interlacing families I : Bipartite Ramanujan graphs of all degrees*. Preprint (2013). En ligne sur arXiv.
- [36] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava, *Interlacing families II : Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*. Preprint (2013). En ligne sur arXiv.
- [37] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava, *Ramanujan graphs and the solution to the Kadison-Singer problem*. Preprint (2014). En ligne sur arXiv.
- [38] P. J. McKenna, *Discrete Carleson measures and some interpolation problems*. Mich. Math. J. **24** (1977), 311–319.
- [39] N. K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the shift operator*. Springer (1986).
- [40] V. Paulsen, *A dynamical systems approach to the Kadison-Singer problem*. J. Funct. Anal. **255** (2008), 120–132.
- [41] S. Popa, *A  $II_1$  factor approach to the Kadison-Singer problem*. Comm. Math. Phys. **332** (2014), 379–414.
- [42] G. A. Reid, *On the Calkin representations*. Proc. London Math. Soc. **23** (1971), 547–564.
- [43] K. Seip, *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions*. University Lecture Series **33**, Amer. Math. Soc. (2004).
- [44] D. Serre, *Les matrices*. Dunod (2001).
- [45] H. S. Shapiro et A. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*. Amer. J. Math. **83** (1961), 513–532.
- [46] D. A. Spielman et N. Srivastava, *An elementary proof of the restricted invertibility theorem*. Israel J. Math. **190** (2012), 83–91.
- [47] Pure state extensions and compressibility of the  $\ell^1$ -algebra. Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 707–713.
- [48] T. Tao, *Real stable polynomials and the Kadison-Singer problem*. En ligne sur le blog de l'auteur.
- [49] D. Timotin, *The solution to the Kadison-Singer Problem - yet another presentation*. Preprint (2015). En ligne sur arXiv.
- [50] J. Tropp, *The random paving property for uniformly bounded matrices*. Studia Math. **185** (2008), 67–82.
- [51] A. Valette, *Le Problème de Kadison-Singer (d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava)*. Preprint (2014). En ligne sur arXiv.
- [52] N. Weaver, *A counterexample to a conjecture of Akemann and Anderson*. Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 65–71.
- [53] N. Weaver, *The Kadison-Singer problem in discrepancy theory*. Discrete Math. **278** (2004), 227–239.
- [54] P. Youssef, *Restricted invertibility and the Banach-Mazur distance to the cube*. Mathematika **60** (2014), 201–218.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS, UNIVERSITÉ D'ARTOIS, RUE JEAN SOUVRAZ S. P. 18, 62307 LENS (FRANCE).

*E-mail address:* etienne.matheron@univ-artois.fr