LE PROBLÈME DE KADISON-SINGER

ÉTIENNE MATHERON

1. Introduction

Le "Problème de Kadison-Singer" ne date pas d'hier ; mais il n'a été résolu que très récemment. A l'origine, il s'agit d'une question relevant de la théorie des algèbres d'opérateurs, posée en 1959 par Richard Kadison et Isadore Singer ([13]) : *Est-il vrai que tout état pur sur $\mathcal{D}(\ell^2)$, l'algèbre des opérateurs diagonaux sur l'espace de Hilbert $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$, admet un unique prolongement en un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$, l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur ℓ^2 ?* Voilà qui semble assez pointu, et n'incite peut-être pas à poursuivre la lecture. On aurait cependant tort de ne pas persévérer un peu, car le Problème de Kadison-Singer est en réalité tout à fait fascinant : il se trouve en effet qu'il admet une multitude de formulations équivalentes, dont certaines sont très élémentaires et semblent n'avoir absolument aucun rapport avec la question initiale. Cet aspect des choses a été popularisé par Pete Casazza et ses co-auteurs, *cf.* en particulier le très ambitieux "survol" [10].

Son caractère polymorphe rend le Problème de Kadison-Singer attaquable de bien des façons ; et de fait, il a subi de nombreux assauts depuis 1959 avant d'être finalement résolu en 2013... par des informaticiens, Adam Marcus, Daniel Spielman et Nikhil Srivastava ([15]). Il est très remarquable que certaines des idées de [15] aient permis aux trois mêmes compères de résoudre un problème célèbre de théorie des graphes, en démontrant l'existence de *graphes de Ramanujan de degré arbitraire* ([14]). Pour un survol des idées en questions, on pourra consulter [16].

Dans le présent article, je vais en fait assez peu parler de la solution trouvée par Marcus, Spielman et Srivastava, mais plutôt passer du temps à expliquer, avec des indications de preuves raisonnablement détaillées, quelques unes des diverses formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer. (En caricaturant un peu, l'objectif est de rendre intelligible le diagramme de la Section 7.) Je montrerai tout de même à la fin comment le résultat principal de [15] permet de résoudre le Problème, mais ce n'est pas le but premier. Ainsi, un titre plus approprié pourrait être : "Le Problème de Kadison-Singer, *avant sa solution*" ; mais même un tel titre paraît bien présomptueux car les pages qui suivent sont très loin d'épuiser la question. Pour en savoir plus, il faudra se plonger dans [10] [1].

2. La formulation initiale

2.1. La propriété d'extension unique. Le cadre naturel du Problème de Kadison-Singer est la théorie de **C^*- algèbres**. Pour nous, une C^*- algèbre sera simplement une

1. Il existe également une "version longue" du présent article, qui reprend le contenu d'un mini-cours donné à Clermont en Juin 2014 dans le cadre du GdR "Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilités". Cette version longue paraîtra dans un volume spécial des Annales Mathématiques Blaise Pascal.

sous-algèbre unitale, fermée et auto-adjointe de $\mathcal{B}(H)$, l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur un certain espace de Hilbert complexe H.

Un élément T d'une C^*- algèbre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ est dit **positif** si c'est un opérateur positif au sens usuel, *i.e.* $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Il revient au même de dire que T est de la forme A^*A avec $A \in \mathcal{A}$, où A^* est l'adjoint de l'opérateur A.

Une forme linéaire φ sur une C^*- algèbre $\mathcal{A}$ est dite **positive** si on a $\varphi(T) \geq 0$ pour tout élément positif T de $\mathcal{A}$. Une telle forme linéaire est nécessairement continue, et on a $\|\varphi\| = \varphi(Id)$. Un **état** sur $\mathcal{A}$ est une forme linéaire positive φ telle que $\varphi(Id) = 1$. Par exemple, il est évident que si H est un espace de Hilbert et si $v \in H$ est un vecteur unitaire, alors on définit un état Φ_v sur $\mathcal{B}(H)$ en posant $\Phi_v(T) = \langle Tv, v\rangle$.

Un état φ sur $\mathcal{A}$ est dit **pur** si c'est un point *extrémal* de l'ensemble de tous les états sur $\mathcal{A}$ (lequel est visiblement convexe) ; autrement dit, si on ne peut pas écrire φ comme combinaison convexe d'états différents de φ. Par exemple, on peut montrer que tout "état vectoriel" Φ_v sur $\mathcal{B}(H)$ est pur ; voir [3] ou n'importe quel autre livre sur les C^*- algèbres.

Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ des C^*- algèbres. D'après la version "espaces vectoriels ordonnés" du Théorème de Hahn-Banach (voir par exemple [7, II.3.1]), tout état φ sur $\mathcal{A}$ peut se prolonger en un état Φ sur $\mathcal{B}$. On dit que la paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ possède la **propriété d'extension unique** si tout état *pur* sur $\mathcal{A}$ se prolonge *de manière unique* en un état sur $\mathcal{B}$. (Le prolongement est alors nécessairement un état pur ; on le voit à l'aide du Théorème de Krein-Milman.)

Un cas particulier important est celui de la paire $(L^\infty, \mathcal{B}(L^2))$, où $L^2 = L^2(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ pour un certain espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$, et $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ est considéré(e) comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(L^2)$ en identifiant une "fonction" $\theta \in L^\infty$ avec l'**opérateur de multiplication** M_θ agissant sur L^2 qui lui est naturellement associé ($M_\theta f = \theta\, f$ pour toute $f \in L^2$).

Dans le cas où l'espace mesuré sous-jacent est $\Omega = \mathbb{N}$ avec la mesure de comptage, l'espace L^2 est simplement $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ (l'espace de toutes les suites complexes de carré sommable), et l'espace L^∞ est $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ (l'espace de toutes les suites complexes bornées). La sous-algèbre de $\mathcal{B}(\ell^2)$ correspondant à ℓ^∞ ne sera pas noté ℓ^∞ mais $\mathcal{D}(\ell^2)$. C'est l'algèbre de tous les opérateurs $D \in \mathcal{B}(\ell^2)$ qui sont **diagonaux** sur la "base canonique" $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$De_n = \theta_n\, e_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

À ce stade, une précision s'impose : contrairement à l'usage francophone, l'ensemble des entiers naturels commencera à 1, *i.e.* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Dans [13], Kadison et Singer montrent que la paire $\big(L^\infty, \mathcal{B}(L^2)\big)$ *ne possède pas* la propriété d'extension unique lorsque l'espace mesuré est l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Très naturellement, ils posent la question de savoir ce qu'il en est dans le "cas discret", *i.e.* pour la paire $\big(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2)\big)$: c'est précisément le **Problème de Kadison-Singer** tel qu'il a été énoncé dans l'introduction.

Remarque. Kadison et Singer pensaient que la réponse à leur problème était en fait négative (mais contrairement à d'autres par la suite, ils sont restés fort prudents dans leur pronostic, écrivant simplement : *we incline to the view that such extension is not unique*). Pour autant, dans toute la suite on désignera par (KS) l'énoncé "la réponse au Problème de Kadison-Singer est *positive*". La mèche est donc vendue !

2.2. **Intervention des ultrafiltres.** Il se trouve qu'on sait décrire "explicitement" les états purs sur $\mathcal{D}(\ell^2)$, ce qui permet de reformuler légèrement le Problème de Kadison-Singer. Mais il faut d'abord rappeler quelques faits de base concernant des objets étranges nommés ultrafiltres.

Rappelons qu'un **filtre sur** $\mathbb{N}$ est une famille $\mathcal{F}$ de parties *non vides* de $\mathbb{N}$ stable par intersections finies et close par sur-ensembles (si $I \in \mathcal{F}$ et $J \supseteq I$, alors $J \in \mathcal{F}$). Par exemple, l'ensemble des parties *cofinies* de $\mathbb{N}$ est un filtre, qu'on appelle le *filtre de Fréchet* et qu'on notera $\mathcal{F}_\infty$. Un **ultrafiltre** sur $\mathbb{N}$ est un filtre $\mathcal{U}$ qui est maximal pour l'inclusion, *i.e.* le seul filtre contenant $\mathcal{U}$ est $\mathcal{U}$ lui même. Par exemple, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\mathcal{U}_n := \{I \subseteq \mathbb{N};\ I \ni n\}$ est un ultrafiltre. Les ultrafiltres de la forme $\mathcal{U}_n$ sont qualifiés de **triviaux**. Ce sont les seuls que l'on puisse exhiber sans recourir à un avatar du Lemme de Zorn ; mais il en existe beaucoup d'autres : par une zornification immédiate, on voit que tout filtre $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre. Les ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet $\mathcal{F}_\infty$ sont précisément les ultrafiltres non triviaux.

A tout filtre $\mathcal{F}$ de parties de $\mathbb{N}$ est naturellement associée une notion de convergence pour les suites : on dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vivant dans un espace topologique X **converge le long de** $\mathcal{F}$ vers un point $a \in X$ si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in V\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Lorsque l'espace topologique X est séparé, on a "unicité de la limite" et on peut donc légitimement écrire $a = \mathcal{F}\text{-}\lim a_n$. Par exemple, une suite (a_n) converge le long du filtre de Fréchet si et seulement si elle converge au sens usuel, et on a alors $\mathcal{F}_\infty\text{-}\lim a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. A l'autre extrême, si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) converge le long de l'ultrafiltre trivial $\mathcal{U}_{n_0}$, et on a $\mathcal{U}_{n_0}\text{-}\lim a_n = a_{n_0}$.

Il n'est pas très difficile de voir que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) vivant dans un espace topologique *compact* converge le long de $\mathcal{U}$ (en un sens, les ultrafiltres "sont là pour ça"). En particulier, si (a_n) est une suite *bornée* de nombres complexes, *i.e.* $(a_n) \in \ell^\infty$, alors $\mathcal{U}\text{-}\lim a_n$ existe dans $\mathbb{C}$.

On voit ausitôt que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, alors la formule

$$\varphi_\mathcal{U}(D) := \mathcal{U}\text{-}\lim \langle De_n, e_n\rangle$$

définit un état sur $\mathcal{D}(\ell^2)$. De plus, on peut montrer que tous les $\varphi_\mathcal{U}$ sont des états purs et qu'inversement *tout état pur sur* $\mathcal{D}(\ell^2)$ *est de la forme* $\varphi_\mathcal{U}$.

Par ailleurs, l'état $\varphi_\mathcal{U}$ a un prolongement $\Phi_\mathcal{U}$ évident à $\mathcal{B}(\ell^2)$, défini par la même formule :

$$\Phi_\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle Te_n, e_n\rangle \quad , \quad T \in \mathcal{B}(\ell^2)\,.$$

Ainsi, on voit que le Problème de Kadison-Singer revient à la question suivante : *Est-il vrai que si* $\mathcal{U}$ *est un ultrafiltre sur* $\mathbb{N}$*, alors* $\Phi_\mathcal{U}$ *est le seul prolongement de* $\varphi_\mathcal{U}$ *à* $\mathcal{B}(\ell^2)$ *? Autrement dit, si* Φ *est un état sur* $\mathcal{B}(\ell^2)$ *tel que* $\Phi(D) = \mathcal{U}\text{-}\lim\langle De_n, e_n\rangle$ *pour tout opérateur* diagonal D*, a-t-on* $\Phi(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim\langle Te_n, e_n\rangle$ *pour* tout *opérateur* $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ *?*

Remarque. Cette approche directe du Problème de Kadison-Singer a été en fait assez peu considérée. Cependant, Kadison et Singer ont observé "dès l'origine" qu'on a bien extension unique pour tous les ultrafiltres *triviaux* ; et Reid a montré ([18]) que c'est encore le cas lorsque l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est ce qu'on appelle parfois un q**-point**, ce qui signifie que pour toute partition de $\mathbb{N}$ en intervalles bornés J_k, il existe un ensemble $I \in \mathcal{U}$ qui rencontre chaque J_k en exactement 1 point. Pour des résultats plus généraux, voir le très intéressant [6].

3. Compressibilité et propriété de pavage

3.1. **Compressibilité.** Dans cette sous-section et tout le reste de l'article, on utilisera la notation suivante : si I est une partie de $\mathbb{N}$, on note P_I la "projection diagonale" associée à I, *i.e.* la projection orthogonale de ℓ^2 sur le sous-espace fermé de ℓ^2 engendré par les vecteurs e_n, $n \in I$. Ce sous-espace sera noté E_I, ou $[e_n;\ n \in I]$.

Si $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et $I \subseteq \mathbb{N}$, la **compression** de T au sous-espace E_I est l'opérateur $P_I T P_I$. Les opérateurs du type $P_I T P_I$ vont jouer un rôle essentiel dans toute la suite.

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$, on notera $\mathbb{D}(T)$ l'opérateur diagonal défini par

$$\mathbb{D}(T)e_n = \langle Te_n, e_n\rangle \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Autrement dit, si on note (t_{ij}) la matrice de T dans la base canonique de ℓ^2, alors $\mathbb{D}(T)$ est l'opérateur dont la matrice est $\operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \dots)$. Il est important de garder en tête qu'on a

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) \quad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U}\,.$$

Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ étant donné, on dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est **compressible *modulo*** $\mathcal{U}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $I \in \mathcal{U}$ tel que $\|P_I\big(T - \mathbb{D}(T)\big)P_I\| \leq \varepsilon$.

Le théorème suivant est dû à Anderson ([2]). En réalité Anderson démontre un résultat beaucoup plus général, mais cette version nous suffira.

Théorème 3.1. *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, et soit $\varphi_{\mathcal{U}}$ l'état pur associé sur $\mathcal{D}(\ell^2)$. Alors $\varphi_{\mathcal{U}}$ admet un unique prolongement en un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ si et seulement si tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est compressible modulo $\mathcal{U}$.*

Preuve abrégée. Le fait que la compressibilité entraine l'unicité du prolongement est "facile". Le point clé est que si $I \in \mathcal{U}$, alors $\varphi_{\mathcal{U}}(P_I) = 1$ par définition de $\varphi_{\mathcal{U}}$. On utilise alors le fait général suivant (qui n'est pas difficile à démontrer) : *Si Ψ est un état quelconque sur une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ et si $P \in \mathcal{A}$ vérifie $\Psi(P) = 1 = \|P\|$, alors $\Psi(AP) = \Psi(A) = \Psi(PA)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.* Dans la situation présente, on en déduit que si Φ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$, alors $\Phi(P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I) = \Phi(T - \mathbb{D}(T))$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et pour tout $I \in \mathcal{U}$. Si T est compressible *modulo* $\mathcal{U}$, cela entraine que $\Phi(T - \mathbb{D}(T)) = 0$, donc $\Phi(T) = \Phi(\mathbb{D}(T)) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) = \Phi_{\mathcal{U}}(T)$. Ainsi, la compressibilité *modulo* $\mathcal{U}$ de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ entraine que le seul état prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$ est $\Phi = \Phi_{\mathcal{U}}$.

Supposons maintenant que $\varphi_{\mathcal{U}}$ admette un unique prolongement en un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$. Alors ce prolongement ne peut être que $\Phi_{\mathcal{U}}$. Pour démontrer que tout opérateur sur ℓ^2 est compressible *modulo* $\mathcal{U}$, on se ramène sans difficulté au cas des opérateurs *auto-adjoints et de diagonale nulle.* On fixe donc un opérateur T auto-adjoint vérifiant $\mathbb{D}(T) = 0$, et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $I \in \mathcal{U}$ tel que $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$.

Comme $\Phi_{\mathcal{U}}$ est supposée être la seule forme linéaire positive sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$, la version "espaces vectoriels ordonnés" du Théorème de Hahn-Banach permet d'affirmer qu'on a

$$\inf\{\varphi_{\mathcal{U}}(D);\ D \in \mathcal{D}(\ell^2),\, D \geq T\} = \Phi_{\mathcal{U}}(T) = \sup\{\varphi_{\mathcal{U}}(D');\ D' \in \mathcal{D}(\ell^2)\,,\, D' \leq T\}\,.$$

Comme de plus $\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) = 0$, on peut donc trouver deux opérateurs diagonaux D et D' tels que $D \leq T \leq D'$ et $-\varepsilon < \varphi_{\mathcal{U}}(D) \leq \varphi_{\mathcal{U}}(D') < \varepsilon$. Alors, par définition de $\varphi_{\mathcal{U}}$, l'ensemble

$$I := \{n \in \mathbb{N};\ -\varepsilon < \langle De_n, e_n\rangle \leq \langle D'e_n, e_n\rangle < \varepsilon\} \quad \textit{appartient à } \mathcal{U}.$$

Comme les opérateurs D et D' sont diagonaux, la définition de I montre qu'on a $\|P_I D' P_I - P_I D P_I\| \leq \varepsilon$; et comme $D \leq T \leq D'$ (il est temps de s'en servir), on en déduit $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$, ce qui achève la preuve. $\square$

3.2. **Pavages.** Le Théorème 3.1 est un résultat “individuel” : l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est fixé. Si on l'applique à *tous* les ultrafiltres $\mathcal{U}$, on obtient avec un peu de travail supplémentaire une première reformulation du Problème de Kadison-Singer. Ce résultat se trouve en fait déjà dans [13].

On dira qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est **pavable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

En termes peut-être plus imagés, cela signifie que T admet des “décompositions matricielles” de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & T_r \end{pmatrix}$$

pour lesquelles l'opérateur $T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ est “presque diagonal”.

Proposition 3.2. *La paire $(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2))$ possède la propriété d'extension unique, i.e.* (KS) *est vrai, si et seulement si tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est pavable.*

Démonstration. La preuve est plus limpide si on la rend la plus abstraite possible. Tout repose sur le fait suivant.

Fait. Soit (P) une propriété relative aux parties de $\mathbb{N}$, que l'on suppose *héréditaire* : si $J \subseteq \mathbb{N}$ a (P) et si $I \subseteq J$, alors I a (P). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ admet un élément I possédant la propriété (P) ;

(ii) on peut partitionner $\mathbb{N}$ en un nombre fini d'ensembles ayant (P).

Pour $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et $\varepsilon > 0$, on peut appliquer le Fait à la propriété (P_ε) suivante : un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ a (P_ε) si et seulement si $\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$. (C'est bien une propriété héréditaire car $\|P_I T P_I\| = \|P_I(P_J T P_J)P_I\| \leq \|P_J T P_J\|$ si $I \subseteq J$.) En faisant varier ε, le résultat est que l'opérateur T est pavable si et seulement si il est compressible *modulo* tout ultrafiltre $\mathcal{U}$; d'où la proposition.

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) dans le Fait vient de la propriété générale suivante des ultrafiltres (facile à démontrer) : si $I_1, \dots, I_r$ sont des parties de $\mathbb{N}$ et si $I_1 \cup \cdots \cup I_r$ appartient à un certain ultrafilftre $\mathcal{U}$, alors l'un des I_k doit appartenir à $\mathcal{U}$.

Pour la réciproque, on a besoin d'un petit complément sur les ultrafiltres. Notons $\beta\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, et pour $I \subseteq \mathbb{N}$, posons

$$\beta_I := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N};\ \mathcal{U} \ni I\}\,.$$

Il est facile de voir que les β_I forment une base pour une certaine topologie sur $\beta\mathbb{N}$, et il n'est pas difficile non plus de montrer que $\beta\mathbb{N}$ est *compact* pour cette topologie. (L'espace $\beta\mathbb{N}$ s'appelle le **compactifié de Stone-Čech de** $\mathbb{N}$. Il y aurait beaucoup à en dire...)

Cela étant précisé, la condition (i) signifie exactement qu'on a $\beta\mathbb{N} = \bigcup_{I \in (\mathrm{P})} \beta_I$, où on a écrit “$I \in (\mathrm{P})$” pour “$I$ possède la propriété (P)”. Comme les β_I sont par définition des *ouverts* de $\beta\mathbb{N}$ et que $\beta\mathbb{N}$ est compact, on peut donc trouver $J_1, \dots, J_r$ vérifiant (P) tels que $\beta\mathbb{N} = \beta_{J_1} \cup \cdots \cup \beta_{J_r}$. On en déduit facilement que $J_1 \cup \cdots \cup J_r = \mathbb{N}$. Les J_k ne forment *a priori* pas une partition de $\mathbb{N}$, mais on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ telle que $I_k \subseteq J_k$ pour tout k (certains I_k pouvant être vides...). Les I_k vérifient encore (P) car (P) est supposée héréditaire ; donc on a bien montré que (i) entraîne (ii). $\square$

Dans la suite, on notera (A) l'énoncé "tout opérateur sur ℓ^2 est pavable". Ainsi, on vient de voir que (KS) est équivalent à (A). Il s'est donc subrepticement passé quelque chose : (KS) a été remplacé par un énoncé bien plus élémentaire qui ne fait intervenir ni ultrafiltres, ni états. On peut aussi remarquer que par définition, un opérateur T est pavable si et seulement si $T - \mathbb{D}(T)$ l'est. Donc, pour démontrer (A), il suffit de prouver que tous les opérateurs *de diagonale nulle* sont pavables.

Remarque. A mon avis, un des plus beaux résultats obtenus avant 2013 concernant la pavabilité des opérateurs sur ℓ^2 est dû à Berman, Halpern, Kaftal et Weiss ([5]) : *Tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ dont la matrice dans la base canonique de ℓ^2 est* à coefficients positifs *est pavable.*

3.3. **Pavages fini-dimensionnels.** L'énoncé (A) est de nature infini-dimensionnelle, car il concerne les opérateurs sur l'espace de dimension infinie $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Cependant, on va voir que (A) est en fait équivalent à un énoncé purement fini-dimensionnel.

Pour $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}$, on dira qu'un opérateur T agissant sur $\mathbb{C}^d$ est **ε-pavable en r morceaux** s'il existe une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d] := \{1, \dots, d\}$ telle que

$$\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \le \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r\,.$$

Cette terminologie étant précisée, on notera $(\mathrm{A})_{<\infty}$ l'énoncé suivant : *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que* pour tout $d \in \mathbb{N}$, *tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ vérifiant $\|T\| \le 1$ et $\mathbb{D}(T) = 0$ est ε-pavable en r morceaux.*

Bien entendu, le point clé dans $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est que l'entier $r = r(\varepsilon)$ doit être *indépendant de la dimension d.* (N'importe quel opérateur sur $\mathbb{C}^d$ est 0-pavable en d morceaux...). L'énoncé $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est souvent appelé la **Conjecture de pavage d'Anderson**. On peut l'abréger en disant que les opérateurs sur $\mathbb{C}^d$, $d \ge 1$ sont "uniformément pavables".

Proposition 3.3. *Les énoncés* (A) *et* $(\mathrm{A})_{<\infty}$ *sont équivalents.*

Le fait que (A) entraîne $(\mathrm{A})_{<\infty}$ n'est pas difficile. Si $(\mathrm{A})_{<\infty}$ n'est pas vérifiée pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver pour tout $r \in \mathbb{N}$ un opérateur T_r agissant sur $\mathbb{C}^{d_r}$ pour un certain d_r, qui n'est pas ε-pavable en r morceaux. La "somme directe" de tous ces opérateurs T_r est alors un opérateur agissant sur $\bigoplus_r \mathbb{C}^{d_r} \simeq \ell^2$ qui n'est pas ε-pavable, donc (A) n'est pas vérifié.

Pour l'implication "délicate" $(\mathrm{A})_{<\infty} \implies (\mathrm{A})$, on utilise un résultat combinatoire très général qu'on appelle souvent le **Lemme de sélection de Rado**. Considérons une propriété (P) relative aux parties de $\mathbb{N}$, que l'on suppose *finiment déterminée*, ce qui signifie qu'un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ a (P) si et seulement si toutes ses parties finies ont (P). Soit également $r \in \mathbb{N}$. Le Lemme de sélection de Rado s'énonce comme suit : *Si toute partie* finie *$J \subseteq \mathbb{N}$ peut être partitionnée en r morceaux ayant la propriété* (P), *alors $\mathbb{N}$ lui-même peut être partitionné en r morceaux ayant* (P).

La preuve de ce lemme est en fait très simple : en identifiant de manière évidente une partition de $\mathbb{N}$ en r morceaux (éventuellement vides) avec un "coloriage de $\mathbb{N}$ en au plus r couleurs", *i.e.* simplement une application $c : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$, le résultat est une conséquence presque immédiate de la *compacité* de l'espace produit $\{1, \dots, r\}^{\mathbb{N}}$.

Si maintenant on suppose que $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est vérifiée, on montre sans difficulté que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$ et $\mathbb{D}(T) = 0$ est pavable en appliquant, pour $\varepsilon > 0$ donné, le Lemme de sélection de Rado à la propriété (P_ε) suivante :

$$I \subseteq \mathbb{N} \;\text{ a } (\mathrm{P}_\varepsilon) \quad \text{si et seulement si} \quad \|P_I T P_I\| \leq \varepsilon\,.$$

Comme la pavabilité de tous les opérateurs est équivalente à la pavabilité de tous les opérateurs de diagonale nulle, cela prouve que $(\mathrm{A})_{<\infty}$ entraîne (A).

Remarque. Le résultat sans doute le plus profond concernant la Conjecture de pavage obtenu avant 2013 est dû à Bourgain et Tzafriri ([9]) : *Pour $\nu > 0$ donné et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d(\nu, \varepsilon)$ tel que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geq d(\nu, \varepsilon)$ vérifiant $\|T\| = 1$ et $|\langle Te_i, e_j\rangle| \leq \frac{1}{(\log d)^{1+\nu}}$ pour tous $i, j \in [d]$ est ε-pavable en un nombre $r = r(\varepsilon, \nu)$ de morceaux.* On peut par exemple en déduire que si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ vérifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(n)|^2\, |n|^\tau < \infty$ pour un certain $\tau > 0$, alors l'opérateur de multiplication M_ϕ agissant sur $L^2(\mathbb{T})$ est pavable relativement à la base de Fourier. La preuve donné dans [9] est extraordinairement difficile. Elle a été simplifiée dans [23], mais cela reste compliqué.

4. La "Conjecture AA(δ)" de Akemann et Anderson

Dans cette section, on va voir que la Conjecture de pavage d'Anderson $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est équivalente à une conjecture de "pseudo-pavage" pour les *projections orthogonales* de "petite diagonale". Tout ce qui suit est dû à Akemann et Anderson ([1]).

Étant donné un nombre réel $\delta \in (0, 1)$, on notera $\mathrm{AA}(\delta)$ l'énoncé suivant : *Il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $\eta > 0$ tels que : pour tout $d \in \mathbb{N}$ et pour toute projection orthogonale P sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ telle que $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \leq 1 - \eta$ pour $k = 1, \dots, r$.*

La fin de l'énoncé ne signifie *pas* que toute projection sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$ est $(1-\eta)$-pavable en r morceaux, car on demande des conditions sur les $\|P_{I_k} P P_{I_k}\|$ et pas sur les $\|P_{I_k}(P - \mathbb{D}(P))P_{I_k}\|$, alors qu'on ne suppose pas que $\mathbb{D}(P) = 0$. Par ailleurs, un point essentiel est qu'on ne demande pas la "ε-pseudo-pavabilité" pour *tout* $\varepsilon > 0$, mais pour *un* $\varepsilon < 1$ (à savoir $\varepsilon = 1 - \eta$) qui est éventuellement très proche de 1. Comme de plus on ne considère que des projections, on pourrait donc croire que $\mathrm{AA}(\delta)$ est un énoncé beaucoup moins fort que la Conjecture de pavage d'Anderson $(\mathrm{A})_{<\infty}$ ... mais ce n'est pas le cas :

Proposition 4.1. *L'énoncé* $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ *est équivalent à* $(\mathrm{A})_{<\infty}$*, et donc à* (KS).

Démonstration. Supposons $(\mathrm{A})_{<\infty}$ vérifié. On va en fait montrer que $\mathrm{AA}(\delta)$ est vrai pour tout $\delta \in (0, 1)$. Soit donc $\delta \in (0, 1)$ quelconque, et soit T un opérateur sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $\|T\| \leq 1$ et $\|\mathbb{D}(T)\| \leq \delta$. On ne suppose *pas* que T est une projection.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\delta + \varepsilon < 1$, et soit $\eta := 1 - (\varepsilon + \delta)$. Par $(\mathrm{A})_{<\infty}$, on peut trouver $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ tels que $\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon$ pour $k = 1, \dots, r$. On a alors $\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \|P_{I_k} \mathbb{D}(T) P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \delta = 1 - \eta$ pour tout k, ce qui prouve $\mathrm{AA}(\delta)$.

Supposons maintenant que $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ soit satisfait avec "témoins" $r \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$. Pour établir $(\mathrm{A})_{<\infty}$, on peut se contenter de prouver que les opérateurs *auto-adjoints et de diagonale nulle* sur $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ sont uniformément pavables. Le point clé est le fait suivant.

Fait. Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ est auto-adjoint et vérifie $\mathbb{D}(T) = 0$, alors T est $(1-\eta)\|T\|$-pavable en r^2 morceaux.

Preuve abrégée du Fait. Par homogénéité, on peut supposer que $\|T\| \leq 1$. Soit S l'opérateur sur $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{2d}$ défini comme suit :

$$S := \begin{pmatrix} T & \sqrt{1-T^2} \\ \sqrt{1-T^2} & -T \end{pmatrix}.$$

Cette définition a bien un sens car T est auto-adjoint et $\|T\| \leq 1$. De plus, un calcul immédiat montre que S est auto-adjoint et qu'on a $S^2 = Id$; autrement dit, S est une *symétrie orthogonale*. Par suite, les opérateurs

$$P^{\pm} := \frac{1}{2}(Id \pm S)$$

sont des projections orthogonales. Enfin, on a $\mathbb{D}(P^{\pm}) = \frac{1}{2}Id$ car $\mathbb{D}(S) = 0$, et donc $\|\mathbb{D}(P^{\pm})\| = \frac{1}{2}$· En appliquant $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ aux projections P^+ et P^- et en observant que

$$P^{\pm} = \frac{1}{2}(Id \pm S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Id \pm T) & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

on montre alors sans difficulté majeure que T est $(1-\eta)$-pavable en r^2 morceaux. Le nombre r^2 apparaît parce qu'on a besoin de considérer le raffinement commun des partitions de $[2d]$ en r morceaux adaptées à P^+ et P^-. $\square$

La fin de la preuve de la proposition consiste en un argument facile d'"itération". Soit $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ auto-adjoint vérifiant $\mathbb{D}(T) = 0$ et $\|T\| \leq 1$. Posons $s := r^2$ et $\alpha := 1 - \eta$. Par le Fait, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_s)$ de $[d]$ telle que $\|P_{I_l} T P_{I_l}\| \leq \alpha$ pour $l = 1, \dots, s$. En appliquant maintenant le Fait à chacun des opérateurs $P_{I_l} T P_{I_l}$, $1 \leq l \leq r$, on voit que T est α^2-pavable en s^2 morceaux ; et par une récurrence immédiate, on obtient que T est α^N-pavable en s^N morceaux, pour tout entier $N \geq 1$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, T est ε-pavable en $r(\varepsilon) := s^N$ morceaux, où N est le plus petit entier tel que $s^N \leq \varepsilon$. $\square$

Remarque. La valeur $\delta = \frac{1}{2}$ semble cruciale... mais en fait ce n'est pas le cas : Akemann et Anderson ont montré que si $\mathrm{AA}(\delta)$ est vrai pour *un* $\delta \in (0,1)$, alors (KS) est vrai (et donc $\mathrm{AA}(\delta)$ aussi pour *tout* $\delta \in (0,1)$ d'après la preuve ci-dessus). Ce résultat est *bien plus difficile* que la Proposition 4.1 ; voir par exemple [6].

Pour $\delta \in (0,1)$ donné, il est très facile de formuler une version infini-dimensionnelle de $\mathrm{AA}(\delta)$, qu'on notera dans la suite $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$: *Pour toute projection $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$, on peut trouver une partition finie $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| < 1$ pour $k = 1, \dots, r$.* Au vu de la Proposition 3.3, le résultat suivant n'est pas très surprenant.

Proposition 4.2. *Pour tout $\delta \in (0,1)$ les énoncés $\mathrm{AA}(\delta)$ et $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ sont équivalents.*

Le fait que $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ entraîne $\mathrm{AA}(\delta)$ n'est pas difficile à voir ; *cf.* la preuve de la Proposition 3.3. Pour la réciproque, on commence par montrer (ce qui demande un peu de travail) que si $\mathrm{AA}(\delta)$ est vérifié par toutes les projections P sur $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ avec "témoins" r et η, alors il est en fait vérifié *par tous les opérateurs T sur $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ tels que* $0 \leq T \leq Id$, avec les mêmes témoins. On conclut alors par une application "immédiate" du Lemme de sélection de Rado.

5. Kadison-Singer, Feichtinger et Bourgain-Tzafriri

Dans cette section, on va voir que (KS) est équivalent à la très célèbre *Conjecture de Feichtinger*. Cette dernière appartient à ce qu'on appelle en anglais la théorie des *frames*, qui n'a *a priori* pas grand chose à voir avec les C^*- algèbres. On va également montrer que (KS) est équivalent à ce qui est appelé dans [10] la *Conjecture de Bourgain-Tzafriri* ; laquelle est relative à une propriété d'"inversibilité restreinte" pour les matrices à colonnes normalisées.

5.1. **Suites de Bessel, repères et suites de Riesz.** Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite finie ou infinie dans un espace de Hilbert séparable H, éventuellement de dimension finie. On dit que (f_i) est une **suite de Bessel** s'il existe une constante $B<\infty$ telle que

$$\forall f\in H\quad :\quad \sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B\,\|f\|^2\,;$$

et la meilleure constante B possible s'appelle la **constante de Bessel** de (f_i). On dit que (f_i) est un **repère** de H (pour les anglophones : une **frame**) s'il existe deux constantes $A>0$ et $B<\infty$ telles que

$$\forall f\in H\quad :\quad A\,\|f\|^2\leq \sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B\,\|f\|^2\,.$$

Enfin, on dit que (f_i) est une **suite de Riesz** s'il existe deux constantes $c>0$ et $C<\infty$ telles que

$$c\sum_{i\in I}|a_i|^2\leq \Big\|\sum_{i\in I}a_i\,f_i\Big\|^2\leq C\,\sum_{i\in I}|a_i|^2$$

pour toute suite à support fini $(a_i)_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}$.

Voici quelques exemples pour fixer les idées : toute suite orthonormale est une suite de Riesz ; toute réunion finie de suites orthonormales est une suite de Bessel ; et toute réunion finie de bases orthonormales de H est un repère de H. Le mot "réunion" est ici à prendre au sens de "réunion en disjointisant les ensembles d'indices" ; par exemple, la suite $(f_i)\cup(f_i)$ est la suite (f_i) où chaque terme est répété deux fois. (Cette précision est assez importante : typiquement, dans un repère on autorise les "redondances".)

Tout ce qu'on aura besoin de savoir sur ces notions tient en quelques lignes :

Proposition 5.1. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de H.*

(1) *(f_i) est une suite de Bessel si et seulement si il existe un (unique) opérateur borné $S:\ell^2(I)\to H$ tel que $Se_i=f_i$ pour tout $i\in I$. Dans ce cas, la constante de Bessel de (f_i) est égale à $\|S\|^2$. L'opérateur $S:\ell^2(I)\to H$ s'appelle l'**opérateur de synthèse** associé à (f_i).*

(2) *(f_i) est une suite de Riesz si et seulement si c'est une suite de Bessel dont l'opérateur de synthèse $S:\ell^2(I)\to H$ est* injectif à image fermée.

(3) *(f_i) est un repère de H si et seulement si c'est une suite de Bessel dont l'opérateur de synthèse $S:\ell^2(I)\to H$ est* surjectif.

Démonstration. Supposons que (f_i) soit une suite de Bessel, avec une constante au plus égale à B :

$$\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B\,\|f\|^2\quad\text{pour tout } f\in H\,.$$

On peut alors définir un opérateur $A : H \to \ell^2(I)$ (qu'on appelle l'**opérateur d'analyse** associé à (f_i)) par

$$Af = (\langle f, f_i\rangle)_{i\in I}\,.$$

L'opérateur A est borné, avec $\|A\|^2 \leq B$. On a par définition

$$\langle f, A^* e_i\rangle = \langle Af, e_i\rangle = \langle f, f_i\rangle$$

pour tout $i \in I$ et tout $f \in H$; donc $S := A^*$ vérifie $Se_i = f_i$, $i \in I$.

Inversement, supposons qu'il existe un opérateur $S : \ell^2(I) \to H$ tel que $Se_i = f_i$, $i \in I$. Pour $f \in H$, on a alors

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle S^* f, e_i\rangle|^2 = \|S^* f\|^2 \leq \|S^*\|^2\, \|f\|^2\,;$$

donc (f_i) est une suite de Bessel de constante $B \leq \|S^*\|^2 = \|S\|^2$.

Enfin, il est clair d'après les calculs précédents que si (f_i) est une suite de Bessel et si $S : \ell^2(I) \to H$ est l'opérateur de synthèse associé, alors sa constante de Bessel est égale à $\|S^*\|^2 = \|S\|^2$. Ceci termine la preuve de (1).

Le point (2) est évident : par définition, (f_i) est suite de Riesz si et seulement si il existe un isomorphisme $J : \ell^2(I) \to [f_i;\ i \in I]$ tel que $Je_i = f_i$ pour tout $i \in I$; ce qui est une autre façon d'écrire (2).

La preuve de (3) est laissée en exercice (passer à l'adjoint...) ; sans scrupule car on n'aura en fait pas besoin du résultat. □

Remarque. La notion de repère a été introduite par Duffin et Schaeffer en 1952 ([12]), qui en avaient besoin pour des questions d'échantillonage et d'analyse de Fourier "non harmonique" (où typiquement on s'intéresse à des "séries de Fourier" $\sum c_n e^{i\lambda_n x}$ sur $[0, 2\pi]$ avec des λ_n non entiers).

La théorie des repères est en croissance au moins exponentielle depuis quelques années, en partie parce que les repères sont devenues très populaires dans le milieu des "ondelettistes". Une raison est la grande souplesse de la notion de repère : si on a besoin d'ondelettes vérifiant certaines propriétés sympathiques (par exemple, des ondelettes impaires et à support compact), il se peut qu'il soit essentiellement impossible de construire une base orthonormée de telles ondelettes mais très facile de construire un repère, lequel rendra presque les mêmes services qu'une base orthonormée.

Par ailleurs, les suites de Bessel et les suites de Riesz apparaissent inévitablement dans toutes les questions relatives aux "suites d'échantillonage" et aux "suites d'interpolation" pour les espaces de Hilbert de fonctions holomorphes ; voir par exemple [17] ou [19].

5.2. **Feichtinger.** Comme toute réunion de suites de Bessel est visiblement encore de Bessel, la Proposition 5.1 montre que toute réunion finie de suites de Riesz est une suite de Bessel. La **Conjecture de Feichtinger**, que l'on notera (F), est la réciproque de ce fait évident : *Toute suite de Bessel normalisée dans un espace de Hilbert est réunion finie de suites de Riesz.* Il semble en fait que cette conjecture ait été énoncée pour la première fois (par écrit) dans [11], et non pas dans les travaux de Feichtinger lui-même. Notons également que dans (F), on peut remplacer "suite de Bessel normalisée" par "suite de Bessel (f_i) telle que $\inf_i \|f_i\| > 0$". (Et on peut aussi remplacer "suite de Bessel" par "repère", car toute suite de Bessel devient un repère si on lui ajoute une base orthonormée).

Remarque. De source sûre (merci à Stéphane Jaffard !), Feichtinger a eu l'idée de sa conjecture à propos des "repères de Gabor", c'est-à-dire des repères de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $f_{m,n}(x) = g(x - ma)e^{inx}$, où $g \in L^2(\mathbb{R})$ et les constantes $a, b > 0$ sont fixées et m, n varient dans $\mathbb{Z}$. Intuitivement, si le réseau $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$ est "trop dense", alors $(f_{m,n})$ risque de ne pas être une suite de Bessel. A l'inverse, si les points de Λ sont "suffisamment éloignés les uns des autres", alors $(f_{m,n})$ va être une suite de Riesz. Maintenant, il est géométriquement plausible que si le réseau Λ n'est pas trop dense, alors on peut le décomposer en un nombre fini de paquets dont chacun est formé de points suffisamment éloignés les uns des autres. D'où la conjecture de Feichtinger dans ce contexte.

La résultat suivant, que l'on trouve dans [11], est *a priori* très surprenant.

Proposition 5.2. *La Conjecture de Feichtinger* (F) *est équivalente à* (KS)*.*

Démonstration. La preuve est un peu alambiquée : on va montrer que la conjecture de pavage infini-dimensionnelle (A) entraîne la Conjecture de Feichtinger, et que (F) entraîne la validité de l'énoncé d'Akemann-Anderson $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ pour tout $\delta \in (0,1)$.

Supposons (A) vérifiée, *i.e.* tout opérateur sur ℓ^2 est pavable, et fixons une suite de Bessel normalisée $(f_i)_{i\in I}$ dans un espace de Hilbert séparable H. Sans perte de généralité, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$ et $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Fixons également $\varepsilon > 0$. On va montrer que (f_i) est réunion finie de suites ε**-Riesz**, c'est-à-dire Riesz avec constantes $c \geq 1 - \varepsilon$ et $C \leq 1 + \varepsilon$.

Soit $S : \ell^2(\mathbb{N}) = H \to H$ l'opérateur de synthèse associé à (f_i), et posons $R := S^*S$; l'opérateur R est l'**opérateur de repère** associé à (f_i). On a

$$\langle Re_i, e_i\rangle = \|Se_i\|^2 = \|f_i\|^2 = 1$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $\mathbb{D}(R) = Id$. Par (A), on peut donc trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k}(R - Id)P_{I_k}\| \leq \varepsilon$ pour $k = 1, \dots, r$, autrement dit

$$\|P_{I_k}RP_{I_k} - P_{I_k}\| \leq \varepsilon\,. \tag{5.1}$$

Par ailleurs, pour $k = 1, \dots, r$ et pour toute suite à support fini $(a_i)_{i\in I_k} \subseteq \mathbb{C}$, on a

$$\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i f_i\Big\|^2 = \Big\langle SP_{I_k}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big), SP_{I_k}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big)\Big\rangle = \Big\langle P_{I_k}RP_{I_k}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big), \sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big\rangle\,.$$

Par (5.1), on en déduit

$$(1-\varepsilon)\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big\|^2 \leq \Big\|\sum_{i\in I_k} a_i f_i\Big\|^2 \leq (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big\|^2,$$

ce qui montre que la suite $(f_i)_{i\in I_k}$ est ε-Riesz, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Supposons maintenant (F) vérifiée, et fixons $\delta \in (0,1)$. Soit également $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ une projection vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leq \delta$. On cherche une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| < 1$ pour $k = 1, \dots, r$.

Comme $\|\mathbb{D}(P)\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\langle Pe_i, e_i\rangle = \sup_{i\in\mathbb{N}}\|Pe_i\|^2$, les vecteurs $f_i := (Id - P)e_i$ vérifient $\|f_i\|^2 \geq 1 - \delta$ et on a donc $\inf_i \|f_i\| > 0$. De plus, (f_i) est une suite de Bessel puisque $S := Id - P$ est un opérateur borné. Par (F), on peut donc trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ soit une suite de Riesz.

Il existe ainsi une constante $c > 0$ telle que

$$\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i(Id - P)e_i\Big\|^2 \geq c\sum_{i\in I_k}|a_i|^2 = c\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big\|^2$$

pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ et pour toute suite à support fini $(a_i)_{i\in I_k} \subseteq \mathbb{C}$; d'où

$$\left\| P\Big(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big)\right\|^2 = \left\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right\|^2 - \left\|(Id-P)\Big(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\Big)\right\|^2 \leq (1-c)\left\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right\|^2 .$$

Dit autrement : pour $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i \in \ell^2$ quelconque, on a

$$\|PP_{I_k}x\|^2 \leq (1-c)\,\|P_{I_k}x\|^2 \leq (1-c)\,\|x\|^2\,;$$

et donc $\|PP_{I_k}\|^2 \leq 1-c$. Comme $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| = \|(PP_{I_k})^*(PP_{I_k})\| = \|PP_{I_k}\|^2$, on obtient donc finalement $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| \leq 1-c < 1$ pour $k = 1, \dots, r$. □

Remarque. Énormément de résultats ont été obtenus ces dernières années concernant la Conjecture de Feichtinger. Parmi les plus beaux se trouvent à mon avis ceux de Baranov et Dyakonov sur les suites de "noyaux reproduisants normalisés" dans certains espaces de Hilbert de fonctions holomorphes ([4]).

5.3. **Bourgain-Tzafriri.** Dans [8], Bourgain et Tzafriri démontrent le résultat suivant. Comme d'habitude, pour $I \subseteq [d]$ on note E_I le sous-espace de $\mathbb{C}^d$ engendré par les e_i, $i \in I$.

Théorème 5.3. *Il existe deux constantes $c > 0$ et $A < \infty$ telles que la propriété suivante ait lieu : pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geq 1$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, d$, on peut trouver $I \subseteq [d]$ de cardinalité $|I| \geq \frac{c}{\|S\|^2}\, d$ tel que l'opérateur $S_{|E_I}$ est inversible sur son image, avec $\|(S_{|E_I})^{-1}\| \leq A$; autrement dit, $\|Sx\| \geq \frac{1}{A}\,\|x\|$ pour tout $x \in E_I$.*

Avec moins de symboles mathématiques : toute matrice S de taille d dont les colonnes sont de norme 1 est inversible sur un sous-espace de dimension proportionnelle à d engendré par certains vecteurs de la base canonique, avec une constante de proportionnalité dépendant uniquement de $\|S\|$ et une estimation "absolue" sur la norme de l'inverse.

On déduit assez facilement de ce résultat que pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geq 1$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, d$, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ en un nombre de morceaux $r \leq 1 + C(\|S\|)\,\log(d)$, telle que $S_{|E_{I_k}}$ est inversible avec $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$ pour $k = 1, \dots, r$.

Évidemment, il est très naturel de se demander si on peut en fait trouver une partition en un nombre r de morceaux *indépendant de la dimension d*. C'est précisément ce qui dans [10] est appelé la **Conjecture de Bourgain-Tzafriri**, et qu'on notera bien entendu (BT) : *Pour tout $M > 0$, il existe un entier $r = r(M) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geq 1$ vérifiant $\|S\| \leq M$ et $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, d$, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ telle que $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leq A$ pour $k = 1, \dots, r$, où A est une constante absolue.*

Dans [10], plusieurs versions infini-dimensionnelles de (BT) sont considérées. Celle qui est formellement la plus faible, qu'on notera $(\mathrm{BTf})_\infty$, s'énonce comme suit : *Pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i \in \mathbb{N}$, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que les opérateurs $S_{|E_{I_k}}$ sont inversibles sur leur image.*

Il est facile de voir (à l'aide du Lemme de sélection de Rado) que (BT) entraîne $(\mathrm{BTf})_\infty$. Que les deux conjectures soient en fait équivalentes n'est pas complètement évident, mais guère surprenant non plus. C'est la partie la moins intéressante de la proposition suivante.

Proposition 5.4. *Les Conjectures* (BT) *et* $(\mathrm{BTf})_\infty$ *sont équivalentes à* (KS).

Démonstration. Comme on vient de dire que (BT) et $(\mathrm{BTf})_\infty$ sont équivalentes (entre elles !), il suffit de montrer que $(\mathrm{BTf})_\infty$ est équivalente à la Conjecture de Feichtinger (F). Mais ceci est *évident*, en vertu du fait suivant.

Fait. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Bessel dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$, et soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ l'opérateur de synthèse associé, $Se_i = f_i$. Si $I \subseteq \mathbb{N}$, alors $S_{|E_I}$ est inversible (sur son image) si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une suite de Riesz.

Le Fait lui-même est clair puisque $S_{|E_I}$ s'identifie l'opérateur de synthèse associé à $(f_i)_{i\in I}$, et qu'une suite de Bessel est une suite de Riesz précisément quand son opérateur de synthèse est un isomorphisme sur son image, d'après la Proposition 5.1. □

6. La solution

6.1. **La reformulation de Weaver.** La preuve de la Proposition 5.2 a mis en lumière le rôle central de l'énoncé $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ de Akemann et Anderson. On va voir maintenant que la version fini-dimensionnelle de cet énoncé, *i.e.* ce qu'on a noté $\mathrm{AA}(\delta)$, se reformule de manière presque tautologique en termes de repères finis d'un type particulier. Cette observation est due à Weaver [25].

On dira qu'une suite $(f_i)_{i\in I}$ dans un espace de Hilbert H est un **repère C- Parseval**, pour une certaine constane $C > 0$, si on a

$$\forall f \in H \ \ : \ \ \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = C\,\|f\|^2.$$

La terminologie officielle est en fait **repère serré avec constante** C ; et en anglais : **C- tight frame**. Par exemple, si $C \in \mathbb{N}$, alors une réunion de C bases orthonormées est un repère C- Parseval.

Voici un exemple beaucoup plus important : *Si P est une projection orthogonale de $\mathbb{C}^d$ et si on pose $f_i = \sqrt{C}\,Pe_i$, alors la suite $(f_i)_{i\in[d]}$ est un repère C- Parseval de* $H := P(\mathbb{C}^d)$. C'est évident, car si $f \in H = P(\mathbb{C}^d)$, alors

$$\sum_{i\in[d]} |\langle f, f_i\rangle|^2 = C\sum_{i=1}^{d} |\langle f, Pe_i\rangle|^2 = C\sum_{i=1}^{d} |\langle Pf, e_i\rangle|^2 = C\,\|Pf\|^2 = C\,\|f\|^2\,.$$

L'importance de cet exemple vient du fait que c'est en réalité le seul : il n'est pas très difficile de montrer que *tout repère C- Parseval $(f_i)_{i\in[d]}$ d'un espace de Hilbert H est isométrique à un repère du type précédent ;* autrement dit, il existe un plongement isométrique $J : H \to \mathbb{C}^d$ tel que $Jf_i = \sqrt{C}\,Pe_i$ pour tout $i \in [d]$, où P est la projection (orthogonale) de $\mathbb{C}^d$ sur JH. Il suffit de poser

$$Jf := \frac{1}{\sqrt{C}}\sum_{i=1}^{d} \langle f, f_i\rangle\, e_i$$

et de faire calmement l'exercice.

On en vient maintenant à la reformulation annoncée de $\mathrm{AA}(\delta)$. Pour $C > 0$, on notera $\mathrm{W}(C)$ l'énoncé suivant : *Il existe $r \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que tout repère C- Parseval fini (f_i) avec $\|f_i\| \le 1$ pour tout i est réunion de r suites de Bessel de constantes de Bessel n'excédant pas $(1-\eta)C$.*

Observation 6.1. *Pour tout $C > 1$, l'énoncé* $\mathrm{W}(C)$ *est équivalent à* $\mathrm{AA}(\frac{1}{C})$*, avec les mêmes témoins r et η. Par conséquent,* (KS) *est vrai si et seulement si* $\mathrm{W}(C)$ *est vrai pour tout $C > 1$.*

Démonstration. C'est une conséquence *vraiment* immédiate du fait suivant :

Fait. Si $(f_i)_{i\in[d]}$ est un repère C-Parseval de H isométrique à $(\sqrt{C}Pe_i) \subseteq \mathbb{C}^d$, alors $\|\mathbb{D}(P)\| = \frac{1}{C}\max_i \|f_i\|^2$; et pour tout $I \subseteq [d]$, la constante de Bessel de $(f_i)_{i\in I}$ est égale à $C\,\|P_I P P_I\|$.

Pour démontrer l'observation, il suffit d'écrire $\mathrm{W}(C)$ et $\mathrm{AA}(\frac{1}{C})$ l'un à côté de l'autre et de relire tranquillement l'énoncé du Fait.

Quant au Fait lui même, il est à peu près évident. Si $Jf_i = \sqrt{C}\,Pe_i$ pour $i = 1,\dots,d$, où $J : H \to \mathbb{C}^d$ est une isométrie, alors $\|\mathbb{D}(P)\| = \max_i\langle Pe_i, e_i\rangle = \max_i \|Pe_i\|^2 = \frac{1}{C}\max_{i\in[d]}\|f_i\|^2$. De plus, si $I \subseteq [d]$ alors, comme $f_i = \sqrt{C}PP_Ie_i$ pour $i \in I$, l'opérateur de synthèse associé à la suite $(Jf_i)_{i\in I}$ est $S := \sqrt{C}PP_I$; et donc la constante de Bessel de $(f_i)_{i\in I}$, qui est la même que celle de $(Jf_i)_{i\in I}$, est égale à $C\,\|PP_I\|^2 = C\,\|P_IPP_I\|$. □

6.2. **Marcus-Spielman-Srivastava.** Rappelons une notation bien classique : si H est un espace de Hilbert et si $v \in H \setminus \{0\}$, on note $v \otimes v$ l'opérateur de rang 1 sur H défini par

$$(v\otimes v)(x) = \langle x, v\rangle\, v\,.$$

L'opérateur $v \otimes v$ est auto-adjoint ; et si $\|v\| = 1$, il s'agit simplement de la projection orthogonale de H sur $\mathbb{C}v$.

Les opérateurs du type $v \otimes v$ interviennent très naturellement dans la théorie des repères, en raison du fait suivant : *une suite finie $(f_i)_{i\in I}$ dans un espace de Hilbert H est un repère C-Parseval (pour un certain $C > 0$) si et seulement si*

$$\sum_{i\in I} f_i\otimes f_i = C\, Id\,.$$

C'est immédiat car on a pour pour tout $x \in H$:

$$\left\langle \Big(\sum_{i\in I} f_i\otimes f_i\Big)x, x\right\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\,\langle f_i, x\rangle = \sum_{i\in I}|\langle x, f_i\rangle|^2\,. \tag{6.1}$$

Dans [15], Marcus, Spielman et Srivastava démontrent le résultat suivant. Appelons **vecteur aléatoire dans** $\mathbb{C}^d$ toute variable aléatoire v à valeurs dans $\mathbb{C}^d$. Les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$; et l'espérance d'une variable aléatoire réelle ou vectorielle ξ est notée $\mathbb{E}(\xi)$ ou $\mathbb{E}\xi$.

Théorème 6.2. *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une suite finie de vecteurs aléatoires indépendants dans $\mathbb{C}^d$, chaque v_i ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Soit également $\varepsilon > 0$. On suppose qu'on a*

$$\mathbb{E}\|v_i\|^2 \le \varepsilon \quad \textit{pour tout } i\in I\,, \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} v_i\otimes v_i\right) = Id\,.$$

Alors, on a avec probabilité positive *:*

$$\left\|\sum_{i\in I} v_i(\omega)\otimes v_i(\omega)\right\| \le (1+\sqrt{\varepsilon})^2\,.$$

En première lecture, ce résultat ne semble pas très spectaculaire et le lien avec le Problème de Kadison-Singer ne saute pas aux yeux. On en déduit pourtant assez facilement le résultat suivant.

Corollaire 6.3. *L'énoncé* W(C) *est vrai pour tout* $C > 1$ *; et par conséquent,* (KS) *et toutes ses versions équivalentes sont vrais.*

Démonstration. Fixons $C > 1$ et un repère C-Parseval fini $(f_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{C}^d$, avec $\|f_i\| \leq 1$. On a ainsi

$$\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\, Id\,.$$

Il s'agit de trouver une partition $(I_1, \ldots, I_r)$ de I telle que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ ait une constante de Bessel au plus égale à $(1-\eta)C$, où l'entier r et la constante $\eta > 0$ dépendent uniquement de C. L'idée est on ne peut plus naturelle : on va choisir la partition $(I_1, \ldots, I_r)$ “au hasard”.

Fixons un entier $r \geq 2$, et soit $(k_i)_{i\in I}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$:

$$\mathbb{P}(k_i = k) = \frac{1}{r} \quad \text{pour } k = 1, \ldots r\,.$$

On définit des variables aléatoires v_i à valeurs dans $\mathbb{C}^{dr} = \mathbb{C}^d \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^d$ de la façon suivante :

$$v_i(\omega) := \sqrt{\frac{r}{C}}\,(0 \oplus \cdots \oplus f_i \oplus \cdots \oplus 0)\,,$$

où f_i apparaît à la place $k_i(\omega)$.

Les vecteurs aléatoires v_i sont indépendants, et prennent chacun exactement r valeurs. De plus, comme $\|f_i\| \leq 1$ on a $\mathbb{E}\|v_i\|^2 \leq \frac{r}{C}$ pour tout $i \in I$. Enfin, comme $\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\, Id$, on vérifie sans difficulté qu'on a $\mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} v_i \otimes v_i\right) = Id$.

Par le Théorème 6.2, on peut donc trouver au moins un $\omega \in \Omega$ (l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires sont définies) tel que

$$\left\|\sum_{i\in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega)\right\| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2\,.$$

Écrivons pour simplifier $\boldsymbol{v}_i := v_i(\omega)$ et $\boldsymbol{k}_i := k_i(\omega)$. Soit $(I_1, \ldots, I_r)$ la partition de I définie par la suite $(\boldsymbol{k}_i)_{i\in I}$:

$$I_k := \{i \in I;\ \boldsymbol{k}_i = k\} \quad \text{pour } k = 1, \ldots, r\,.$$

Par définition des I_k, on a

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i = \frac{r}{C}\left(\sum_{i\in I_1} f_i \otimes f_i\right) \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{i\in I_r} f_i \otimes f_i\right),$$

et donc

$$\left\|\sum_{i\in I} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i\right\| = \max\left(\left\|\sum_{i\in I_1} f_i \otimes f_i\right\|, \ldots, \left\|\sum_{i\in I_r} f_i \otimes f_i\right\|\right).$$

Comme $\left\|\sum_{i\in I} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i\right\| \leq \left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2$, on obtient donc

$$\left\|\sum_{i\in I_k} f_i \otimes f_i\right\| \leq \frac{C}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2 \qquad \text{pour } k=1,\dots,r\,.$$

D'après (6.1), cela signifie que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ a une constante de Bessel au plus égale à

$$B(r,C) := \frac{C}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{C}}\right)^2 C.$$

Comme $C>1$, on a $\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{C}}<1$ si $r=r(C)$ est assez grand, de sorte qu'on peut écrire $B(r,C)=(1-\eta)\,C$, où $\eta=\eta(C)>0$. Et ainsi, la démonstration est terminée. □

Remarque. Je ne ferai aucune tentative pour expliquer la preuve du Théorème 6.2. Il en existe déjà au moins 4 belles présentations : l'article original [15], celui d'Alain Valette ([24]) correspondant à son récent exposé au séminaire Bourbaki, les “notes en ligne” de Terence Tao ([21]), et l'article [22] de Dan Timotin.

7. Résumé

Le diagramme suivant récapitule ce que j'ai raconté dans cet article. Les sigles utilisés devraient être clairs.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{F}) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & (\mathrm{BTf})_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{BT}) \\
 & \mathrm{W}(\forall C) \arrow[d, Leftrightarrow] & \boxed{\mathbf{MSS}} \arrow[l, Rightarrow] & \\
\mathrm{AA}(\forall\delta)_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{AA}(\forall\delta) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{AA}(\tfrac{1}{2}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & (\mathrm{KS}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{A}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{A})_{<\infty} \arrow[ull, Rightarrow] \arrow[uuu, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Références

[1] C. A. Akemann et J. Anderson, *Lyapunov theorems for operator algebras.* Mem. Amer. Math. Soc. **94** (1991).

[2] J. Anderson, *Extensions, restrictions and representations of states on C^*-algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 303–329.

[3] W. Arveson, *An invitation to C^*-algebras.* Springer GTM **39** (1976).

[4] A. Baranov et K. Dyakonov, *The Feichtinger Conjecture for reproducing kernels in model subspaces.* J. Geom. Anal. **21** (2011), 276–287.

[5] K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss, *Matrix norm inequalities and the relative Dixmier property.* Integral Equations Operator Theory **11** (1988), 28–48.

[6] T. M. Bice, *Filters in C^*-algebras.* Canad. J. Math. **65** (2013), 485–509.

[7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques.* Masson (1981).

[8] J. Bourgain et L. Tzafriri, *Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis.* Israel J. Math. **57** (1987), 137–224.

[9] J. Bourgain et L. Tzafriri, *On a problem of Kadison and Singer*. J. Reine Angew. Math. **420** (1991), 1–43.

[10] P. Casazza, M. Fickus, J. C. Tremain et E. Weber, *The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering : a detailed account.* Contemp. Math. **414** (2006), 299–355.

[11] P. Casazza, O. Christensen, A. Lindner et R. Vershynin, *Frames and the Feichtinger conjecture.* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1025–1033.

[12] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series.* Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1952), 341–366.

[13] R. Kadison et I. M. Singer, *Extensions of pure states.* Amer. J. Math. **81** (1959), 383–400.

[14] A. W. Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava, *Interlacing families I : Bipartite Ramanujan graphs of all degrees.* Preprint (2013). En ligne sur arXiv.

[15] A. W. Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava, *Interlacing families II : Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem.* Preprint (2013). En ligne sur arXiv.

[16] A. W. Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava, *Ramanujan graphs and the solution to the Kadison-Singer problem.* Preprint (2014). En ligne sur arXiv.

[17] N. K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the shift operator.* Springer (1986).

[18] G. A. Reid, *On the Calkin representations.* Proc. London Math. Soc. **23** (1971), 547–564.

[19] K. Seip, *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions.* University Lecture Series **33**, Amer. Math. Soc. (2004).

[20] D. A. Spielman et N. Srivastava, *An elementary proof of the restricted invertibility theorem.* Israel J. Math. **190** (2012), 83–91.

[21] T. Tao, *Real stable polynomials and the Kadison-Singer problem.* En ligne sur le blog de l'auteur.

[22] D. Timotin, *The solution to the Kadison-Singer Problem - yet another presentation.* Preprint (2015). En ligne sur arXiv.

[23] J. Tropp, *The random paving property for uniformly bounded matrices.* Studia Math. **185** (2008), 67–82.

[24] A. Valette, *Le Problème de Kadison-Singer (d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava).* Preprint (2014). En ligne sur arXiv.

[25] N. Weaver, *The Kadison-Singer problem in discrepancy theory.* Discrete Math. **278** (2004), 227–239.

[26] P. Youssef, *Restricted invertibility and the Banach-Mazur distance to the cube.* Mathematika **60** (2014), 201–218.

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois, rue Jean Souvraz S. P. 18, 62307 Lens (France).

E-mail address: etienne.matheron@univ-artois.fr