Numéro d'ordre : 340

Rapport scientifique

présenté à

L'UNIVERSITE BORDEAUX 1

par

Etienne MATHERON

pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Analyse fonctionnelle et théorie des ensembles

Soutenue le 18 Novembre 2005

Après avis des rapporteurs

M. Jean ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux 1
M. Gilles GODEFROY	Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6
M. Hervé QUEFFÉLEC	Professeur, Université de Lille 1

Devant la commission d'examen formée de

M. Gabriel DEBS	Professeur, Université du Havre
M. Robert DEVILLE	Professeur, Université Bordeaux 1
M. Jean ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux 1
M. Gilles GODEFROY	Directeur de Recherche CNRS, Université Paris 6
M. Jean Luc JOLY	Professeur émérite, Université Bordeaux 1
M. Hervé QUEFFÉLEC	Professeur, Université de Lille 1

Table des matières

INTRODUCTION

Ce mémoire est constitué de 4 parties essentiellement indépendantes. Les résultats décrits dans la première partie se situent à la frontière de l'analyse harmonique et de la théorie descriptive des ensembles : on étudie les propriétés descriptives de certaines familles de fermés d'un groupe localement compact (ensembles d'unicité, ensembles de Helson, ensembles de synthèse harmonique). L'analyse harmonique est encore implicitement présente dans la deuxième partie, mais les résultats qui y figurent relèvent avant tout de la théorie descriptive des ensembles. Ces résultats concernent les familles héréditaires de compacts, et en particulier les idéaux de compacts. Dans la troisième partie, on explique comment une question de géométrie des espaces de Banach a mené à l'étude d'une notion de continuité intermédiaire entre la continuité au sens usuel et la continuité uniforme. Enfin, la quatrième partie concerne la dynamique des opérateurs linéaires.

On regroupe ici un très petit nombre de définitions et de notations qui seront constamment utilisées par la suite.

Un *espace Polonais* est un espace topologique séparable et complètement métrisable. Si X est un espace Polonais, on note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X, et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X. On munit $\mathcal{K}(X)$ de la topologie dite de Vietoris, engendrée par les ensembles du type $\{K \in \mathcal{K}(X);\ K \subset U\}$ et $\{K \in \mathcal{K}(X);\ K \cap U \neq \emptyset\}$, où U est un ouvert de X. Cette topologie est Polonaise. On munit $\mathcal{F}(X)$ de la *structure borélienne d'Effros*, qui est la tribu engendrée par les ensembles du type $\{F \in \mathcal{F}(X);\ F \cap U \neq \emptyset\}$. Cette structure fait de $\mathcal{F}(X)$ un espace borélien standard ; autrement dit, il existe une topologie Polonaise sur $\mathcal{F}(X)$ telle que la structure borélienne d'Effros est exactement la structure borélienne associée à cette topologie.

Si X est un espace métrique séparable, on note $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ ou simplement $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ les classes additives de boréliens de X, et $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ les classes multiplicatives. Ainsi, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ est la famille des ouverts de X, $\mathbf{\Pi}^0_1$ la famille des fermés, $\mathbf{\Sigma}^0_2$ la famille des F_σ, et $\mathbf{\Pi}^0_2$ la famille des G_δ. On s'intéressera plus particulièrement aux classes $\mathbf{\Sigma}^0_3 = G_{\delta\sigma}$ et $\mathbf{\Pi}^0_3 = F_{\sigma\delta}$. On note $\mathbf{\Delta}^0_\xi$ les classes boréliennes "ambiguës" $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi$.

Une partie A d'un espace Polonais X est dite *analytique* ($\mathbf{\Sigma}^1_1$) si A est la projection d'un borélien d'un espace produit $X \times Z$, où Z est un espace Polonais. Autrement dit, A est analytique si on peut écrire

$$x \in A \Leftrightarrow \exists z \ \ R(x,z),$$

où R est une relation borélienne en (x,z). On dit que A est *coanalytique* ($\mathbf{\Pi}^1_1$) si $X \setminus A$ est analytique, autrement dit si on peut écrire

$$x \in A \Leftrightarrow \forall z \ \ R(x,z),$$

pour une certaine relation borélienne R. Ces notions ont bien sûr un sens dans tout espace borélien standard, en particulier dans $\mathcal{F}(X)$ si X est un espace Polonais.

Soit $\mathbf{\Gamma}$ l'une des classes $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ ou $\mathbf{\Pi}^1_1$. On dit qu'une partie A d'un espace Polonais X est un *vrai* $\mathbf{\Gamma}$ si $A \in \mathbf{\Gamma}$ et $X \setminus A \notin \mathbf{\Gamma}$. On dit que A est $\mathbf{\Gamma}$-*dur* si A est "au moins de complexité $\mathbf{\Gamma}$", autrement dit si, pour tout tout ensemble B de classe $\mathbf{\Gamma}$ dans un espace Polonais Y de dimension 0, il existe une application continue $f : Y \to X$ telle que $f^{-1}(A) = B$. On dit que A est $\mathbf{\Gamma}$-*complet* si A est $\mathbf{\Gamma}$-dur et de classe $\mathbf{\Gamma}$. Par définition, tout ensemble $\mathbf{\Gamma}$-complet est un vrai $\mathbf{\Gamma}$, et la réciproque est vraie si $\mathbf{\Gamma}$ est une classe borélienne. Notons que pour une classe borélienne, la définition de "vrai $\mathbf{\Gamma}$" a un sens dans tout espace métrisable X.

Chapitre 1

Analyse harmonique et théorie descriptive des ensembles

Dans ce chapitre, tous les groupes localement compacts considérés seront supposés commutatifs et à base dénombrable d'ouverts (autrement dit Polonais). La lettre G désignera toujours un tel groupe. Les résultats présentés ici se situent à la frontière entre l'analyse harmonique et la théorie descriptive des ensembles. On trouve d'une part des extensions à tous les groupes localement compacts de résultats connus dans le cas du cercle $\mathbb{T}$, et d'autre part la mise en évidence d'un phénomène "descriptif" assez surprenant : l'abondance de familles naturelles d'ensembles "mince" qui sont exactement de troisième classe de Borel additive.

1.1 Ensembles d'unicité

Notons Γ le groupe dual de G. Par transformation de Fourier, on identifie $L^1(\Gamma)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(G)$, notée $A(G)$. Le dual de $A(G)$ est l'espace des *pseudo-mesures* sur G, et se note $PM(G)$. Ainsi, $PM(G)$ s'identifie à $L^\infty(\Gamma)$, et toute mesure sur G est une pseudo-mesure. Une *pseudo-fonction* sur G est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini.

On dit qu'un fermé $E \subset G$ est un **ensemble d'unicité** s'il ne porte aucune pseudo-fonction non nulle. Dans le cas où $G = \mathbb{T}$, il revient au même de dire que E est un ensemble d'unicité pour les séries trigonométriques, autrement dit que la seule série trigonométrique convergeant vers 0 partout en dehors de E est la série nulle ; d'où la terminologie employée. On dit qu'un fermé $E \subset G$ est un ensemble **d'unicité au sens large** s'il ne porte aucune *mesure* pseudo-fonction non nulle ; dans le cas du cercle, les ensembles d'unicité sont donc les fermés d'unicité pour les séries de Fourier-Stieltjes. On note U la famille des fermés d'unicité, et U_0 la famille des fermés d'unicité au sens large. Enfin, on pose $M = \mathcal{F}(G) \setminus U$ (*ensembles de multiplicité*) et $M_0 = \mathcal{F}(G) \setminus U_0$ (ensembles de multiplicité *au sens strict*).

Les familles U et U_0 sont toutes les deux des **σ-idéaux** de fermés : si (E_n) est une suite de fermés de type U (resp. U_0) et si E est un fermé contenu dans $\bigcup_n E_n$, alors $E \in U$ (resp. U_0). C'est immédiat pour U_0, et relativement facile à montrer pour U. De plus, on vérifie sans difficulté que U et U_0 sont des parties coanalytiques de $\mathcal{F}(G)$. En 1983-1984, Solovay et Kaufman ([Kau2], [Kau3]) ont montré indépendemment que U et U_0 sont $\mathbf{\Pi}^1_1$-complets, et ne sont donc pas boréliens dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$. Cela "expliquait" en un certain sens les difficultés rencontrées depuis toujours pour caractériser de façon simple les ensembles d'unicité du cercle. Ce résultat a montré l'utilité potentielle de la théorie descriptive des ensembles pour l'étude de certaines questions d'analyse harmonique ; et inversement, l'analyse harmonique a en partie motivé l'étude systématique des σ-idéaux de compacts menée par Kechris, Louveau et Woodin dans [KeLW]. Le théorème de Solovay et Kaufman a été étendu par Valérie Tardivel ([Ta]) à tous les groupes localement compacts.

En 1987, Debs et Saint Raymond ont résolu un vieux problème de Nina Bary en prouvant que tout ensemble borélien d'unicité pour les séries de Fourier-Stieltjes est maigre dans $\mathbb{T}$. Plus précisément, ils montrent dans [DebStR] que le σ-idéal U_0 possède la **propriété de recouvrement** : si $A \subset \mathbb{T}$ est un ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_1$ dont tous les sous-fermés sont d'unicité au sens large, alors A est recouvrable par une suite de fermé d'unicité au sens large. Dans le même article, ils montrent également qu'en plus de ne pas être borélien, le σ-idéal U ne possède même pas de **base** borélienne : autrement dit, il n'existe pas de partie borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ telle que les ensembles d'unicité soient exactement les compacts réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{B}$. En ce sens, le σ-idéal $U(\mathbb{T})$ est plus compliqué que $U_0(\mathbb{T})$ qui, lui, possède une base borélienne ([DebStR], [KeL2]).

Ces deux résultats découlent de certaines propriétés "structurelles" de U et U_0 et d'un théorème général concernant la propriété de recouvrement pour les σ-idéaux de fermés. Un des points clés était de prouver une version "locale" du théorème de Solovay et Kaufman. Dans [3], j'ai établi cette version locale pour tous les groupes localement compacts.

Théorème 1.1.1 *Soit E un fermé de G.*
(1) *Si $E \notin U$, alors $U \cap \mathcal{F}(E)$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.*
(2) *Si $E \notin U_0$, alors $U_0 \cap \mathcal{F}(E)$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.*

Le résultat principal de [3] est en fait beaucoup plus précis ; voir 1.3.6 et 1.3.8.

En reprenant la méthode de Debs et Saint Raymond, le théorème 1.1.1 permet d'obtenir les deux résultats suivants.

Corollaire 1.1.2 *Le σ-idéal $U_0(G)$ possède la propriété de recouvrement.*

Corollaire 1.1.3 *Le σ-idéal $U(G)$ ne possède pas de base borélienne.*

1.2 Synthèse harmonique

1.2.1 Ensembles de synthèse

On dit qu'un fermé $E \subset G$ est un **ensemble de synthèse** (harmonique) si toute pseudo-mesure portée par E peut être approchée au sens de la topologie préfaible de $PM(G)$ par des *mesures* portées par E. Par dualité, il revient au même de dire que toute fonction $f \in A(G)$ nulle sur E peut être approchée au sens de la norme de $A(G)$ par des fonctions nulles *au voisinage* de E. On notera $SYNTH(G)$ la famille des ensembles de synthèse.

Il n'est pas difficile de voir que $SYNTH(G)$ est une partie coanalytique de $\mathcal{F}(G)$. On observe pour cela qu'un fermé E est de synthèse si et seulement si, pour tout compact $K \subset E$, toute fonction $f \in A(G)$ nulle sur E peut être approchée au sens de la norme de $A(G)$ par des fonctions nulles au voisinage de K : cela découle du fait que $A(G)$ possède une unité approchée formée de fonctions à support compact. Par suite, un fermé $E \subset G$ est de synthèse si et seulement si

$$\begin{gathered}\forall (f, K) \in A(G) \times \mathcal{K}(G) \\ \Big\{ (f \equiv 0 \text{ sur } E \text{ et } K \subset E) \Longrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists g \in A(G) \;\; g \equiv 0 \text{ au voisinage de } K \text{ et } ||g - f||_A < \varepsilon) \Big\} .\end{gathered}$$

La relation $\mathcal{R}(f, K, E)$ entre accolades étant borélienne dans $A(G) \times \mathcal{K}(G) \times \mathcal{F}(G)$, cela prouve que $SYNTH(G)$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$.

De plus, on dispose d'un $\mathbf{\Pi}^1_1$-rang très naturel sur $SYNTH(G)$. Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \subset PM(G)$, notons $\mathcal{M}'$ l'ensemble des pseudo-mesures $S \in PM(G)$ qui sont limites préfaible d'une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. Partant de $\mathcal{M}^{(0)} := \mathcal{M}$, on définit par induction sur l'ordinal ξ un sous-espace $\mathcal{M}^{(\xi)} \subset PM(G)$ en posant $\mathcal{M}^{(\xi+1)} = \big(\mathcal{M}^{(\xi)}\big)'$ et $\mathcal{M}^{(\xi)} = \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{M}^{(\eta)}$ si ξ est limite. D'après le théorème de Banach-Dieudonné, il existe un ordinal dénombrable tel que $\mathcal{M}^{(\xi)}$ est l'adhérence préfaible de $\mathcal{M}$ dans $PM(G)$. Le *rang* d'un ensemble de synthèse $E \subset G$ est alors défini par

$$r(E) = \min\{\xi \in \omega_1;\; PM(E) = M(E)^{(\xi)}\} ,$$

où $M(E) \subset PM(G)$ est l'ensemble des mesures portées par E. Kechris et Solovay ont montré que r est un $\mathbf{\Pi}^1_1$-rang sur $SYNTH(G)$.

Katznelson et McGehee ([KatMcG]) ont montré que le rang r n'est pas borné sur $SYNTH(\mathbb{T})$, ce qui, d'après le théorème de la borne pour les $\mathbf{\Pi}^1_1$-rangs, prouve que $SYNTH(\mathbb{T})$ n'est pas borélien dans $\mathcal{F}(\mathbb{T})$. Dans [5], j'ai étendu ce résultat à un groupe G quelconque.

Théorème 1.2.1 *$SYNTH(G)$ n'est pas borélien dans $\mathcal{F}(G)$.*

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes. On montre d'abord, par la méthode des algèbres tensorielles de Varopoulos (voir [LdP]), qu'il suffit de traiter le cas où G est le groupe de Cantor 2^ω. De façon précise, on montre le résultat suivant.

Lemme 1.2.2 *Il existe une application borélienne* $\Phi : \mathcal{K}(2^\omega) \to \mathcal{F}(G)$ *telle que* $\Phi^{-1}(SYNTH(G)) = SYNTH(2^\omega)$ *.*

On montre ensuite que le rang r n'est pas borné sur $SYNTH(2^\omega)$ en s'inspirant de la méthode de Katznelson et McGehee. D'après le théorème de la borne, cela montre que $SYNTH(2^\omega)$ n'est pas borélien, ce qui termine la preuve du théorème. □

On ne connait pas d'autre démonstration du fait que $SYNTH$ n'est pas borélien. En particulier, on ne sait pas si $SYNTH$ est en fait $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.

1.2.2 Pseudo-fonctions synthétisables

On dit qu'une pseudo-mesure $S \in PM(\mathbb{T})$ est **synthétisable** si S est dans l'adhérence préfaible des mesures portées par son support. La famille des pseudo-mesures synthétisables est étudiée en détail par Kechris, Louveau et Tardivel dans [KeLT].

Notons $\mathcal{S}$ la famille des pseudo-mesures synthétisables de norme au plus égale à 1. Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{S}$ est une partie coanalyique de $(B_1(PM), w^*)$. Dans [KeLT] , il est montré que le rang $\rho : \mathcal{S} \to \omega_1$ défini par

$$\rho(S) = \min\{\xi < \omega_1;\ S \in M(\text{supp}(S))^{(\xi)}\}$$

est un $\mathbf{\Pi}^1_1$-rang sur $\mathcal{S}$, et que ce rang n'est pas borné. Ainsi, $\mathcal{S}$ n'est pas borélien dans $B_1(PM)$.

Il est naturel de se demander ce qu'il en est pour les *pseudo-fonctions* synthétisables. Cette question est également examinée dans [KeLT], où elle est reliée à une classe d'ensembles minces intermédiaire entre U et U_0 : la classe U_1 de Piatetski-Shapiro. On dit qu'un fermé $E \subset \mathbb{T}$ est **de type** U_1 si l'idéal

$$I(E) = \{f \in A(\mathbb{T});\ f \equiv 0 \text{ sur } E\}$$

est préfaiblement dense dans $A(\mathbb{T}) = PF(\mathbb{T})^*$. Si on remplace $I(E)$ par l'idéal $J(E)$ des fonctions nulles au voisinage de E, on obtient la classe U, et on obtient U_0 en remplaçant $I(E)$ par le cône $I^-(E) = \{f \in A(\mathbb{T});\ \text{Re}(f) \leq 0 \text{ sur } E\}$. La classe U_1 semble encore plus mystérieuse que U, et a fortiori que U_0. Dans [KeLT], il est montré que les énoncés suivants sont équivalents.

(1) Le rang ρ est borné sur $\mathcal{S} \cap PF$, autrement dit $\mathcal{S} \cap PF$ est borélien.
(2) U_1 est $\mathbf{\Pi}^1_1$.
(3) Le σ-idéal U_1^* engendré par U_1 est $\mathbf{\Pi}^1_1$.

On dit qu'un fermé $E \subset \mathbb{T}$ est **de type** U_1' si $I(E)$ est préfaiblement *séquentiellement* dense dans $A(\mathbb{T})$. Il est facile de voir que la classe U_1' est $\mathbf{\Sigma}_1^1$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$, et on sait que U_1' est une base pour le σ-idéal U_1^* ([PS]). Par conséquent, si U_1' est borélien dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$, alors les trois énoncés précédents sont vrais. Remarquons au passage que les familles correspondantes U' et U_0' sont toutes les deux $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$, que U_0' est une base de U_0 ([DebStR], [KeL2]), mais que U' n'est pas une base de U puisque U ne possède pas de base borélienne.

Il est très probable que le rang ρ n'est pas borné sur $\mathcal{S} \cap PF$, et donc que U_1' n'est pas borélien. Dans [4], j'ai obtenu deux résultats très partiels pointant dans cette direction.

Proposition 1.2.3

(1) *Il existe des pseudo-fonctions synthétisables qui ne sont pas de rang 1.*

(2) *La classe U_1' n'est ni $\mathbf{\Pi}_3^0$, ni $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$.*

1.3 Vrais $\mathbf{\Sigma}_3^0$ en analyse harmonique

Les résultats présentés ici illustrent tous un phénomène “descriptif” assez étonnant : l'abondance, en analyse harmonique, de famille naturelles d'ensembles “minces” qui sont exactement de troisième classe de Borel additive. On a cité plus haut les familles U' et U_0', et on va en évoquer deux autres ici : la famille des ensembles de type H, et la famille des ensembles de Helson.

Définition 1.3.1 *On dit qu'un compact $E \subset \mathbb{T}$ est un* **ensemble de type** *H s'il existe un voisinage V de 0 tel que $nE \cap V = \emptyset$ pour une infinité d'entiers n.*

On notera H la famille des ensembles de type H. Il est bien connu que tout ensemble de type H est un ensemble d'unicité, et très facile de voir que H est une partie $\mathbf{\Sigma}_3^0$ de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$. Dans [Ln], T. Linton a montré que H est un vrai $\mathbf{\Sigma}_3^0$ de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$. Dans [1], j'ai obtenu la version “locale” suivante.

Théorème 1.3.2 *Si $E \subset \mathbb{T}$ est un compact de multiplicité, alors $H \cap \mathcal{K}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Sigma}_3^0$ de $\mathcal{K}(E)$. Plus précisément, il n'existe pas d'ensemble $\mathcal{A} \in \mathbf{\Pi}_3^0$ tel que $H \cap \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{A} \subset U$.*

En particulier, si $E \in M$, alors $U \cap \mathcal{K}(E)$ n'est pas G_δ, et n'est donc pas borélien d'après le théorème de dichotomie pour les σ-idéaux de compacts ([KeLW]). On retrouve ainsi (dans le cas du cercle) la version locale du théorème de Solovay et Kaufman, avec une preuve relativement simple.

Définition 1.3.3 *On dit qu'un compact $K \subset G$ est un* **ensemble de Helson** *si toute fonction continue sur K est la restriction d'une fonction de $A(G)$.*

On notera $HELS$ la famille des ensembles de Helson. Un argument de dualité montre qu'un compact $K \subset G$ est un ensemble de Helson si et seulement si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$||\mu||_{PM} \geq \alpha \, ||\mu||_M$$

pour toute mesure μ portée par K. La plus grande constante possible s'appelle la **constante de Helson** de K ; on la notera $\alpha(K)$.

Il n'est pas difficile de montrer que pour $\alpha > 0$ donné, la famille $HELS_\alpha$ des ensembles de Helson de constante au moins égale à α est une partie G_δ de $\mathcal{K}(G)$. En effet, on a $\alpha(K) \geq \alpha$ si et seulement si

$$\forall \mu \in M(G) \quad (supp(\mu) \subset K \text{ et } \|\mu\| > 1 \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma \ \ |\hat{\mu}(\gamma)| > \alpha) \ .$$

La condition entre parenthèses est G_δ dans $(M(G), w^*) \times \mathcal{K}(G)$. Comme $M(G)$ est préfaiblement K_σ, cela prouve que $HELS_\alpha$ est G_δ. On en déduit immédiatement que $HELS$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$ dans $\mathcal{K}(G)$. Dans [2], j'ai obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.3.4 *La famille des ensembles de Helson parfaits est un vrai* $\mathbf{\Sigma}^0_3$ *de* $\mathcal{K}(\mathbb{T})$.

J'ai également montré que le même résultat est vrai si on ne considère cette fois que des ensembles dénombrables. Ainsi, même si on sait qu'un compact est dénombrable, il n'est pas plus facile de décider s'il est ou non de Helson.

Théorème 1.3.5 $HELS \cap \mathcal{K}_\omega(\mathbb{T})$ *est un vrai* $\mathbf{\Sigma}^0_3$ *de* $\mathcal{K}_\omega(\mathbb{T})$*, l'ensemble des compacts dénombrables de* $\mathbb{T}$.

Les méthodes de [3] m'ont permis de généraliser assez sensiblement le théo- rème 1.3.4. Dans ce qui suit, une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(G)$ est dite **héréditaire** si elle est close par en dessous pour l'inclusion, autrement dit si les conditions $K \subset L$ et $L \in \mathcal{A}$ entraînent $K \in \mathcal{A}$. D'autre part, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{K}(X)$, on note $\tilde{\mathcal{A}}_f$ l'ensemble des compacts de G qui sont réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. Enfin, on dit qu'un fermé $E \subset G$ est *partout de type* M_0 si $\overline{V \cap E} \in M_0$ pour tout ouvert V rencontrant E. Dans [3], j'ai obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.3.6 *Soit* E *un fermé partout de type* M_0*. Si* $\mathcal{G}$ *est un* G_δ *dense héréditaire de* $\mathcal{K}(G)$*, alors il n'existe pas d'ensemble* $\mathcal{A} \in \mathbf{\Pi}^0_3$ *tel que* $\tilde{\mathcal{G}}_f \cap \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{A} \subset U_0$.

Comme $HELS$ est stable par réunion finie d'après un résultat célèbre de Varopoulos (voir [LdP]), on retrouve ainsi 1.3.4 en prenant par exemple pour $\mathcal{G}$ la famille des ensembles de Kronecker contenus dans E. On déduit également de 1.3.6 que les familles U' et U'_0 sont des vrais $\mathbf{\Sigma}^0_3$ de $\mathcal{K}(G)$. Enfin, on obtient aussi le résultat suivant, dû à Kechris dans le cas du cercle ([Ke1]). Compte tenu du théorème de dichotomie pour les σ-idéaux de compacts, c'est une forme forte de 1.1.1, (2).

Corollaire 1.3.7 *Si $E \subset G$ est un fermé partout de type M_0, il n'existe pas de σ-ideal G_δ dense dans $\mathcal{K}(E)$ et contenu dans U_0.*

Voici enfin un autre résultat du même type, également démontré dans [3], qui est la version précise de 1.1.1, (1) mentionnée plus haut. Pour l'énoncer, on a besoin d'une dernière définition : on dit qu'un compact $K \subset G$ est un **ensemble de Dirichlet** s'il existe une suite de caractères de G tendant vers l'infini et convergeant uniformément vers 1 sur K. Il est bien connu que tout ensemble de Dirichlet est d'unicité. On note D la famille des ensembles de Dirichlet de G.

Théorème 1.3.8 *Si E est un fermé de multiplicité, il n'existe pas d'ensemble $\mathcal{A} \in \mathbf{\Pi}^0_3$ tel que $\tilde{D}_f \cap \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{A} \subset U$.*

Comme conséquence inattendue de ce théorème, on obtient le résultat suivant, dû à Körner ([Kö3]) dans le cas du cercle. Bien entendu, Körner utilisait une construction directe, tandis que l'argument donné ici est purement "descriptif".

Corollaire 1.3.9 *Il existe un compact $K \subset G$ qui est à la fois de Dirichlet et de Helson, mais qui n'est pas de synthèse harmonique.*

Preuve. D'après un résultat fondamental de Körner et Kaufman ([Kö2], [Kau2]) étendu par Saeki au cas des groupes localement compacts ([Sae]), il existe un compact $E \subset G$ qui est à la fois de Helson et de multiplicité. Comme E est de Helson, il existe une constante C telle que $||\mu||_M < C\,||\mu||_{PM}$ pour toute mesure $\mu \neq 0$ portée par E ; et d'autre part, un compact $K \subset E$ est de synthèse harmonique si et seulement si il est *sans vraies pseudo-mesures*, autrement dit toute pseudo-mesure portée par K est en fait une mesure. En choisissant un ensemble dénombrable M dense dans $A(G)$ formé de fonctions ne s'annulant pas sur E, on en déduit qu'un compact $K \subset E$ est de synthèse harmonique si et seulement si

$$\forall f \in M \;\; \forall S \in B_1(PM) \quad \big(supp(S) \subset K \Rightarrow |\langle S, f\rangle| < C||f||_{C(K)}\big)\ .$$

Comme la boule unité de PM est préfaiblement compacte et que la relation entre parenthèse est ouverte en $(S,K) \in PM \times \mathcal{K}(G)$, on en déduit que $SYNTH \cap \mathcal{K}(E)$ est G_δ dans $\mathcal{K}(E)$. Comme $SYNTH \cap \mathcal{K}(E) = HELS \cap SYNTH \cap \mathcal{K}(E)$ est également stable par réunion finie d'après le théorème de Varopoulos, il découle donc de 1.3.8 que $SYNTH \cap \mathcal{K}(E)$ ne contient pas $D \cap \mathcal{K}(E)$. $\square$

Chapitre 2

Familles héréditaires de compacts

Les résultats décrits ici sont motivés par ceux du chapitre 1. Toutefois, il s'agit ici uniquement de théorie descriptive des ensembles, l'analyse harmonique n'apparaissant plus explicitement.

Dans tout ce qui suit, la lettre X désigne un espace Polonais, et on note comme toujours $\mathcal{K}(X)$ l'espace des compacts de X. Pour éviter des complications vides, on dira qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(X)$ est *non maigre* si $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ est non maigre dans $\mathcal{K}(X)$ au sens habituel.

2.1 Complexité des idéaux de compacts

Un **idéal** de compacts de X est une partie $\mathcal{I}$ de $\mathcal{K}(X)$ héréditaire pour l'inclusion et stable par réunion finie. Par exemple, les ensembles de Helson d'un groupe localement compact forment un idéal d'après le théorème de Varopoulos, de même que les ensembles de type U' ou U'_0.

Comme il est dit plus haut, j'ai montré dans [2] et [3] que si G est un groupe localement compact, alors $HELS$, U' et U'_0 sont des vrais $\mathbf{\Sigma}^0_3$ de l'espace des compacts de G. Les démonstrations étaient cependant un peu trop "terre à terre", obscurcies par l'utilisation systématique de constructions d'analyse harmonique certes classiques, mais relativement techniques. Dans [6], j'ai montré un résultat du même type pour une classe très générale d'idéaux de compacts.

Le résultat principal de [6] peut essentiellement s'énoncer comme suit. Rappelons que si $\mathbf{\Gamma}$ est une classe borélienne, une partie A d'un espace Polonais Z est dite **$\mathbf{\Gamma}$-dure** lorsque pour tout espace Polonais Y de dimension 0 et tout ensemble $B \subset Y$ de classe $\mathbf{\Gamma}$, il existe une application continue $f : Y \to Z$ telle que $f^{-1}(A) = B$.

Théorème 2.1.1 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{K}(X)$. On fait les hypothèses suivantes.*

(1) *Il existe une suite* $(\mathcal{A}_p)$ *de parties héréditaires de* $\mathcal{K}(X)$ *telle que*
(i) $\mathcal{I} = \bigcup_p \mathcal{A}_p$
(ii) $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(V) \neq \mathcal{A}_p \cap \mathcal{K}(V)$ *pour tout ouvert non vide* $V \subset X$ *et pour*
tout p.

(2) $\mathcal{I}$ *contient un* G_δ *dense héréditaire de* $\mathcal{K}(X)$.

Alors on peut conclure que l'idéal $\mathcal{I}$ *est* $\mathbf{\Sigma}^0_3$*-dur.*

Comme tout idéal G_δ est un σ-idéal d'après un résultat de Dougherty (voir [Ke1] ou [12]), on en déduit immédiatement :

Corollaire 2.1.2 *Soit* $\mathcal{I}$ *un idéal de* $\mathcal{K}(X)$. *On fait les hypothèses suivantes :*
(1) $\mathcal{I}$ *est réunion d'une suite de* G_δ *héréditaires ;*
(2) $\mathcal{I}$ *contient un* G_δ *dense héréditaire.*
Alors ou bien $\mathcal{I}$ *est* $\mathbf{\Sigma}^0_3$*-complet, ou bien il existe un ouvert non vide* $V \subset X$ *tel que* $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(V)$ *est un* σ*-idéal* G_δ*,*

Ce dernier résultat est dans la pratique tout à fait efficace pour montrer qu'un idéal de compacts est $\mathbf{\Sigma}^0_3$-complet. Par exemple, dans le cas des ensembles de Helson, $HELS$ est la réunion de la suite de G_δ héréditaires $(\mathcal{A}_p)$, où $\mathcal{A}_p$ est la famille des compacts ayant une constante de Helson au moins égale à $\frac{1}{p}$, et $HELS$ contient la famille des ensembles de Kronecker, qui est un G_δ dense héréditaire. Comme $HELS$ n'est nulle part un σ-idéal, on peut appliquer 2.1.2. On peut aussi appliquer directement 2.1.1 sans passer par le théorème de Dougherty.

Il est clair cependant que l'énoncé de 2.1.2 n'est pas entièrement satisfaisant : il semblerait bien plus naturel de remplacer (2) par l'hypothèse que $\mathcal{I}$ est comaigre dans $\mathcal{K}(X)$, et (1) simplement par l'hypothèse que $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$. Avec S. Solecki et M. Zelený, nous avons obtenu dans [12] un résultat plus convaincant, qui exhibe une “trichotomie” intéressante vérifiée par les idéaux de compacts suffisamment “riches”. Pour l'énoncer, on a besoin de la définition suivante.

Définition 2.1.3 *Soit* $\mathcal{I}$ *une partie de* $\mathcal{K}(X)$. *On dit qu'un point* $x \in \mathcal{I}$ *est un* **point de concentration** *de* $\mathcal{I}$ *s'il existe un ensemble dense* $D \subset X$ *tel que la propriété suivante ait lieu : pour toute suite* (x_n) *de points de* D *convergeant vers* x, *on a* $\{x\} \cup \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$. *On dit que* $\mathcal{I}$ *est* **riche en suites** *si* $\bigcup \mathcal{I} \neq \emptyset$ *et si tout point* $x \in \bigcup \mathcal{I}$ *est un point de concentration de* $\mathcal{I}$.

Au premier abord, cette définition peut sembler quelque peu artificielle. Le théorème suivant montre que la “richesse en suites” est en fait très liée aux notions classiques de “non-maigritude” et de “comaigritude”.

Théorème 2.1.4 *Soit* $\mathcal{I}$ *une partie de* $\mathcal{K}(X)$.

(1) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal comaigre, alors l'ensemble des points concentration de $\mathcal{I}$ est comaigre dans X. Si $\mathcal{I}$ est un idéal non maigre, alors l'ensemble des points de concentration de $\mathcal{I}$ non maigre dans X.*
(2) *On suppose que $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$ et héréditaire. Si l'ensemble des points de concentration de $\mathcal{I}$ est non maigre dans X, alors $\mathcal{I}$ est non maigre dans $\mathcal{K}(X)$.*

A propos de (2), il faut noter que la conclusion ne peut pas être améliorée si on suppose que l'ensemble des points de concentration de $\mathcal{I}$ est comaigre : on ne peut pas conclure dans ce cas que $\mathcal{I}$ est comaigre dans $\mathcal{K}(X)$. Il suffit pour cela de considérer $X = X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont deux parfaits disjoints de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{I} = \{K \in \mathcal{K}(X);\ K \cap X_1 \text{ ou } K \cap X_2 \text{ est fini}\}$. La situation est cependant plus favorable si $\mathcal{I}$ est un idéal :

Corollaire 2.1.5 *Un idéal $\mathbf{\Sigma}^0_3$ est comaigre dans $\mathcal{K}(X)$ si et seulement si l'ensemble de ses points de concentration est comaigre dans X.*

Dans ce corollaire, il est essentiel de supposer que l'idéal est $\mathbf{\Sigma}^0_3$. Par exemple, l'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R})$ constitué par les compacts n'ayant qu'un nombre fini de points d'accumulation est $\mathbf{\Sigma}^0_4$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ et tout point $x \in \mathbb{R}$ est un point de concentration de $\mathcal{I}$, mais $\mathcal{I}$ est maigre dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

On peut maintenant énoncer le résultat de trichotomie obtenu dans [12]. Rappelons qu'une partie A d'un espace Polonais Z est dite **universellement Baire** si, pour toute application continue $f : Y \to Z$ d'un espace Polonais Y dans Z, l'ensemble $f^{-1}(A)$ possède la propriété de Baire dans Y.

Théorème 2.1.6 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{K}(X)$ universellement Baire, et soit $x \in X$. On suppose que x est un point de concentration de $\mathcal{I}$. Alors on est dans l'un des trois cas suivants.*
(1) *$\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$-dur.*
(2) *$\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$-dur.*
(3) *Il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(V)$ est un σ-idéal.*

Comme première conséquence de 2.1.6, voici un résultat de trichotomie "global". On l'obtient en remarquant que si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{K}(X)$ qui est un σ-idéal au voisinage de chaque point de $\bigcup \mathcal{I}$, alors $\mathcal{I}$ est un σ-idéal.

Corollaire 2.1.7 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{K}(X)$. On suppose que $\mathcal{I}$ est riche en suites et universellement Baire. Alors ou bien $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$-dur, ou bien $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$-dur, ou bien $\mathcal{I}$ est un σ-idéal.*

Il n'est pas difficile de voir (sans utiliser le théorème de Dougherty) que tout idéal G_δ et dense dans $\mathcal{K}(X)$ est riche en suites. D'autre part, on sait ([KeLW]) qu'un σ-idéal $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est nécessairement G_δ. On déduit donc immédiatement de 2.1.7 le résultat suivant, qui illustre nettement l'interdépendance entre les propriétés "structurelles" d'un idéal et ses propriétés decriptives.

Corollaire 2.1.8 *Si $\mathcal{I}$ est une partie dense de $\mathcal{K}(X)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\mathcal{I}$ est G_δ et est un idéal;*

(ii) *$\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Delta}^0_3$ et est un idéal riche en suites;*

(iii) *$\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^1_1$ et est un σ-idéal.*

Comme autre conséquence de 2.1.6, on obtient une généralisation satisfaisante et très naturelle de 2.1.2.

Corollaire 2.1.9 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{K}(X)$. On suppose que $\mathcal{I}$ est non maigre dans $\mathcal{K}(X)$, et universellement Baire. Alors ou bien $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^0_3$-dur, ou bien $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$-dur, ou bien il existe un ouvert non vide $V \subset X$ tel que $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(V)$ est un σ-idéal.*

Notons qu'on ne peut pas ici obtenir mieux qu'une trichotomie "locale" : il suffit de considérer le cas où $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{I}$ est l'idéal des parties finies de X. Par ailleurs, si l'idéal $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$, on peut remplacer "σ-idéal" par "σ-idéal G_δ" dans le troisième cas, d'après le théorème de dichotomie pour les σ-idéaux de compacts. On peut aussi le faire si $\mathcal{I}$ est $\mathbf{\Sigma}^1_1$ puisque tout σ-idéal $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est G_δ. Voici pour finir une conséquence très simple de 2.1.9.

Corollaire 2.1.10 *Si $\mathcal{I}$ est un idéal $\mathbf{\Delta}^0_3$ et comaigre dans $\mathcal{K}(X)$, alors il existe un ouvert dense $V \subset X$ tel que $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(V)$ est un σ-idéal G_δ.*

2.2 Ensembles comaigres et super-comaigres

La notion suivante joue un rôle techniquement important dans [6] (cf 2.1.1). Rappelons qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(X)$ est dite **héréditaire** si $\mathcal{A}$ est close par en dessous pour l'inclusion.

Définition 2.2.1 *On dira qu'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$ est* **super-comaigre** *si $\mathcal{A}$ contient un G_δ dense héréditaire de $\mathcal{K}(X)$.*

Bien entendu, tout ensemble super-comaigre est comaigre. Le problème suivant semble très naturel.

Problème 2.2.2 *Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(X)$ à la fois comaigre et héréditaire est-elle nécessairement super-comaigre ?*

Il est facile de voir que pour résoudre positivement ce problème, il suffit de le faire pour tous les ensembles comaigres héréditaires et $\mathbf{\Sigma}^1_1$. En effet, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$ est comaigre, alors $\mathcal{A}$ contient un G_δ dense $\mathcal{G}$. La clôture héréditaire de $\mathcal{G}$, définie par

$$\mathrm{her}(\mathcal{G}) = \{K \in \mathcal{K}(X);\ \exists L \in \mathcal{G}\ \ K \subset L\}$$

est alors un ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_1$ comaigre héréditaire, et si $\mathcal{A}$ est héréditaire, on a $\mathrm{her}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}$. Si on sait résoudre positivement 2.2.2 pour les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$, on sait donc le faire en général.

Ce problème est étudié dans [10], où on établit le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 *Toute partie de $\mathcal{K}(X)$ comaigre, héréditaire* et $\mathbf{\Pi}_1^1$ *est super-comaigre.*

La preuve de ce théorème repose sur la caractérisation suivante des ensembles super-comaigres. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des compacts de X possèdant au plus n éléments. On dira qu'un fermé $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$ est **absolument rare** si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_n$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 2.2.4 *Un fermé $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$ est absolument rare si et seulement si il existe un ouvert dense héréditaire $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}(X)$ tel que $\mathcal{U} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Par conséquent, un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$ est super-comaigre si et seulement si $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{A}$ peut être recouvert par une suite de fermés absolument rares.*

Grâce à ce lemme, démontrer le théorème 2.2.3 revient à prouver que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$ est $\mathbf{\Pi}_1^1$, comaigre et héréditaire, alors $\mathcal{Z} = \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{A}$ peut être recouvert par une suite de fermés absolument rares. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant que tel n'est pas le cas. Comme $\mathcal{Z}$ est $\mathbf{\Sigma}_1^1$, il découle d'un théorème de Solecki ([So1]) que $\mathcal{Z}$ contient un G_δ qui n'est pas non plus recouvrable par une suite de fermés absolument rares. On peut donc essentiellement se ramener au cas où $\mathcal{Z}$ est G_δ. On parvient alors à montrer que le joueur **I** possède une stratégie gagnante dans le jeu de Banach-Mazur $G(\mathcal{Z}, \mathcal{K}(X))$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{Z}$ est maigre dans $\mathcal{K}(X)$. $\square$

En combinant 2.2.3 et 1.3.6, on obtient le résultat suivant, qui montre que U_0 ne contient essentiellement pas d'idéal $\mathbf{\Pi}_3^0$. C'est une amélioration sensible de 1.3.7. Comme toujours, les groupes localement compacts sont supposés non discrets, commutatifs et Polonais.

Corollaire 2.2.5 *Soit G un groupe localement compact. Si $E \subset G$ est un fermé partout de type M_0, alors il n'existe pas d'idéal $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathcal{K}(E)$ non maigre dans $\mathcal{K}(E)$ et contenu dans U_0.*

Il est très probable que moyennant une hypothèse ad hoc de théorie des ensembles, la réponse au problème 2.2.2 est en fait négative. Une réponse positive est cependant plausible, comme le montre le résultat suivant. Si $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, on note ω_1^x le plus petit ordinal non dénombrable dans le modèle $L(x)$.

Théorème 2.2.6 *On suppose qu'on a $\omega_1^x < \omega_1$ pour tout $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Alors tout ensemble comaigre héréditaire est super-comaigre.*

2.3 Ensembles de Rudin

On dit qu'une partie A d'un groupe localement compact G est un ensemble **indépendant** si tous les éléments de A sont d'ordre $q(G)$, l'ordre topologique de G, et si les seules relations de $\mathbb{Z}$-dépendance entre éléments de A sont les relations triviales : si $x_1 \ldots, x_k$ sont des éléments de A deux à deux distincts et si $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers vérifiant $\sum_1^k n_i x_i = 0$, alors $n_i x_i = 0$ pour tout i. Rudin a montré ([Ru]) qu'il existe dans $\mathbb{T}$ des compacts de type M_0 indépendants. De tels ensembles sont appelés **ensembles de Rudin**.

Le résultat de Rudin est formellement analogue au théorème de Debs et Saint Raymond évoqué au chapitre 1 (cf 1.1.2). En effet, compte tenu du théorème de Solecki mentionné plus haut, on peut reformuler le résultat de Debs et Saint Raymond comme suit : *Si E est un fermé partout de type M_0, alors tout G_δ dense de E contient un compact de type M_0*. Dans les deux cas, on a affaire à une famille de "petits" ensembles (la famille des compacts indépendants, ou la famille des compacts contenus dans un G_δ donné), et à une famille de "gros" ensembles (la famille des compacts de type M_0). La conclusion est qu'il existe un "gros" ensemble qui est également "petit". De plus, dans les deux cas la famille de "petits ensembles" est comaigre (et même G_δ dense) dans l'espace des compacts de G, et elle est déterminée par les ensembles finis : un compact est "petit" si et seulement si tous ses compacts finis le sont. Quant à la famille de "gros" ensembles, elle est du type

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}} = \{K;\ K \text{ porte une mesure } \mu \in \mathbf{B}\}\,,$$

où $\mathbf{B}$ est une certaine famille de mesures de probabilité, en l'occurence la famille des **mesures de Rajchman** sur $\mathbb{T}$, les mesures dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini. La démonstration originale de Rudin repose sur un argument probabiliste, et n'a donc aucun point commun avec celle de Debs et Saint Raymond. On va voir qu'il est cependant possible d'obtenir ces deux résultats comme cas particuliers d'un théorème "abstrait".

Dans ce qui suit, on note $\mathbf{P}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur l'espace Polonais X, et τ la topologie de la convergence étroite sur $\mathbf{P}(X)$.

Il est bien connu que la famille $\mathbf{R}$ des mesures de Rajchman de $\mathbb{T}$ est **héréditaire** pour l'absolue continuité : si $\mu \in \mathbf{R}$ et si $\nu << \mu$, alors $\nu \in \mathbf{R}$. D'autre part, $\mathbf{R}$ est évidemment fermée en norme dans $\mathbf{P}(\mathbb{T})$, et est également $\mathbf{\Pi}_3^0$ pour la topologie de la convergence étroite τ. En effet, la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathbf{P}(\mathbb{T}) \to B_{l^\infty(\mathbb{Z})}$ est (τ, w^*)-continue et on a $\mathcal{F}^{-1}(c_0) = \mathbf{R}$, d'où le résultat car $c_0(\mathbb{Z})$ est de manière évidente préfaiblement $\mathbf{\Pi}_3^0$ dans $l^\infty(\mathbb{Z})$. Comme autres exemples de familles de mesures de probabilités $\mathbf{B}$ vérifiant ces propriétés, on peut par exemple citer la famille des mesures diffuses, la famille des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, ou la famille $\mathbf{P}(A)$ des mesures concentrées sur un ensemble $A \in$

$\mathbf{\Pi}^0_3$. Les familles $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ associées sont respectivement l'ensemble des compacts non dénombrables, l'ensemble des compacts de mesure de Lebesgue non nulle, et l'ensemble des compacts rencontrant A. On voit ainsi que le résultat du type Rudin-Debs-Saint Raymond correspondant est vrai dans le premier cas, faux dans le deuxième cas, et faux en général dans le troisième cas.

Il faut donc imposer d'autres conditions à la famillle de mesures $\mathbf{B}$ pour obtenir un résultat du type Rudin-Debs-Saint Raymond. De façon assez surprenante, il se trouve qu'une propriété d'apparence anodine est en fait suffisante. Pour motiver la définition qui va suivre, rappelons d'abord que d'après un résultat classique de Hahn (voir [Kö1]), la boule unité de $c_0(\mathbb{N})$ est une partie $\mathbf{\Pi}^0_3$-complète de $(B_{l^\infty(\mathbb{N})}, w^*)$. Ainsi, pour tout ensemble $B \in \mathbf{\Pi}^0_3$ dans un espace Polonais Y, il existe une application continue $\Phi : Y \to (B_{l^\infty}, w^*)$ telle que $\Phi^{-1}(c_0) = B$.

Définition 2.3.1 *On dira qu'une partie* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{P}(X)$ *est* **de type** c_0 *s'il existe une application* $\Phi : \mathbf{P}(X) \to B_{l^\infty}$ *à la fois* (τ, w^*)*-continue et* $(\|\ \|, \|\ \|)$*-lipschitzienne telle que* $\Phi^{-1}(c_0) = \mathbf{B}$.

Par exemple, la famille des mesures de Rajchman d'un groupe localement compact (non discret, commutatif, Polonais) est de type c_0.

Notons qu'un ensemble de type c_0 doit être à la fois fermé en norme et étroitement $\mathbf{\Pi}^0_3$, et compte tenu de résultat de Hahn mentionné plus haut, on pourrait penser que la réciproque est vraie. Le théorème qui va suivre montre en particulier qu'il n'en est rien. Notons également que d'après un résultat de Debs ([Deb2]), toute *bande* de mesures $\mathbf{B}$ borélienne et fortement convexe est de type c_0 en un sens à la fois plus fort et plus faible : il existe un filtre borélien $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}$ et une application affine continue $\Phi : \mathbf{P}(X) \to B_{l^\infty(\mathbb{N})}$ telle que $\mathbf{B} = \Phi^{-1}(c_{\mathcal{F}})$, où $\mathcal{F} = \{x \in l^\infty;\ \lim_{\mathcal{F}} x_n = 0\}$.

On peut maintenant énoncer le théorème "abstrait" obtenu dans [10].

Théorème 2.3.2 *Soit* $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}(X)$. *On suppose que* $\mathbf{B}$ *est héréditaire et de type* c_0, *et que* X *est le support d'une mesure diffuse* $\mu \in \mathbf{B}$. *Si* $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$ *est* $\mathbf{\Pi}^1_1$, *héréditaire et non maigre, alors il existe un compact* $K \in \mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ *dont toutes les parties finies appartiennent à* $\mathcal{I}$

Comme expliqué plus haut, ce résultat permet de retrouver simultanément les théorèmes de Rudin et Debs-Saint Raymond :

Corollaire 2.3.3 *Soit* G *un groupe localement compact.*

(1) *Tout fermé* $E \subset G$ *de type* M_0 *contient un compact indépendant de type* M_0.

(2) *Si* $E \subset G$ *est un fermé partout de type* M_0, *alors tout ensemble* $A \subset E$ *possèdant la propriété de Baire et dont tous les sous-fermés sont d'unicité au sens large est maigre dans* E.

On peut également déduire de 2.3.2 des généralisations de résultats classiques dûs à Mycielski ([My]), affirmant l'existence de compacts non dénombrables vérifiant certaines conditions de "petitesse". Le théorème 2.3.2 montre que dans ce type de résultats, on peut en fait remplacer "non dénombrable" par "de type $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$", où $\mathbf{B}$ est une famille de mesures héréditaire et de type c_0. Ainsi, on obtient par exemple le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.4

(1) *Si H est un G_δ dense de $\mathbb{R}$ contenant* 0*, alors il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ de type M_0 vérifiant les propriétés suivantes : K est algébriquement indépendant et le groupe engendré par K est contenu dans H.*

(2) *Il existe un compact de type M_0 dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ qui rencontre chaque hyperplan affine en au plus n points.*

De la preuve du théorème 2.3.2, on déduit aussi que si $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}(X)$ est une famille de mesures de type c_0, alors le σ-idéal polaire

$$\mathcal{I}_{\mathbf{B}} := \{K \in \mathcal{K}(X);\ \mu(K) = 0 \text{ pour toute } \mu \in \mathbf{B}\} = \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{M}_{\mathbf{B}}$$

n'est pas "mince" :

Corollaire 2.3.5 *Soit $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}(X)$. On suppose que $\mathbf{B}$ est héréditaire et de type c_0, et contient une mesure diffuse. Alors il existe une famille non dénombrable de compacts de type $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ deux à deux disjoints. En particulier, $\mathbf{B}$ n'est pas séparable en norme.*

Ce résultat montre en particulier que si λ est une mesure de probabilité diffuse sur X, alors $\mathbf{B}_\lambda = L^1(\lambda) \cap \mathbf{P}(X)$ n'est pas de type c_0, même si $\mathbf{B}_\lambda$ est fermée en norme et étroitement $\mathbf{\Pi}^0_3$. On pouvait également déduire ce fait directement du théorème 2.3.2. Un autre exemple est $\mathbf{B} = \mathbf{P}(A)$, où $A \subset X$ est la réunion d'une suite de parfaits d'intérieur vide deux à deux disjoints.

Dans 2.3.2, on ne peut en général pas conclure que $\mathcal{I}$ contient un compact de type $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$: il suffit de considérer le cas où $\mathcal{I} = U_0$ et $\mathbf{B}$ est la famille des mesures de Rajchman. On peut toutefois le faire si la famille de mesures $\mathbf{B}$ est G_δ.

Proposition 2.3.6 *Soit $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}(X)$ héréditaire et étroitement G_δ. On suppose que X est le support d'une mesure de $\mathbf{B}$. Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$, héréditaire et non maigre, alors $\mathcal{I}$ contient un compact de type $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$.*

La preuve est beaucoup plus simple que celle de 2.3.2 : compte tenu du théorème 2.2.3, c'est une application assez directe du théorème de Baire. $\square$

2.4 Exemples de vrais $\mathbf{\Pi}_3^0$

Certaines méthodes de [10] permettent également de donner des exemples naturels d'ensembles exactement de troisième classe de Borel *multiplicative*.

La proposition suivante généralise un résultat récent de Balcerzak et Darji. La preuve donnée dans [10] est très différente de celle de [BalDj], et assez nettement plus simple. Une autre preuve de ce résultat figure également dans [12]. Si $\mathcal{I}$ est une partie héréditaire de $\mathcal{K}(X)$, on note $\mathcal{I}^{\text{perf}}$ l'ensemble des compacts $K \subset X$ tels que $\overline{V \cap K} \notin \mathcal{I}$ pour tout ouvert non vide V rencontrant K.

Proposition 2.4.1 *Soit $\mathcal{I}$ une partie héréditaire de $\mathcal{K}(X)$ possèdant la propriété de Baire. Si $\mathcal{I}$ est non maigre et si $\mathcal{I}^{\text{perf}}$ est dense dans $\mathcal{K}(X)$, alors $\mathcal{I}^{\text{perf}}$ n'est pas $\mathbf{\Sigma}_3^0$.*

La proposition s'applique par exemple avec $\mathcal{I} = \{K;\ \lambda(K) = 0\}$, où λ est une mesure de probabilité ayant pour support X, ou encore en supposant X localement compact sans point isolé et en prenant pour $\mathcal{I}$ la famille des compacts maigres de X. Dans les deux cas, on obtient que $\mathcal{I}^{\text{perf}}$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathcal{K}(X)$.

Voici enfin un résultat concernant certaines familles de mesures.

Proposition 2.4.2 *Soit $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}(X)$ héréditaire et stable par combinaisons convexes infinies. On suppose que le σ-idéal polaire $\mathcal{I}_{\mathbf{B}}$ est non maigre dans $\mathcal{K}(X)$, et que $X \in \mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\text{perf}}$. Alors $\mathbf{B}$ n'est pas $\mathbf{\Sigma}_3^0$.*

Par exemple, on obtient ainsi que si X n'a pas de point isolé, alors, pour toute mesure de probabilité λ ayant pour support X, la famille $\mathbf{B}_\lambda = L^1(\lambda) \cap \mathbf{P}(X)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathbf{P}(X)$. De même, la famille des mesures de Rajchman d'un groupe localement compact G est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathbf{P}(G)$.

Chapitre 3

Continuité séquentielle forte

3.1 Fonctions lisses sur c_0

Il est bien connu que tout espace de Banach séparable Y est un quotient de $l^1(\mathbb{N})$; autrement dit, il existe une surjection linéaire continue de l^1 sur Y. Cette propriété de l^1 n'est évidemment pas satisfaite par tous les espaces de Banach. Cependant, Bates a démontré que si X est un espace de Banach de dimension infinie, alors on peut construire une surjection de classe $\mathcal{C}^1$ de X sur n'importe quel espace de Banach séparable Y ([Bts]). Pour $X = c_0$, Hájek ([Há1], [Há2]) a montré qu'une telle surjection ne peut en général pas être choisie plus régulière. Convenons de dire qu'une application entre espaces de Banach est **lisse** si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et à dérivée uniformément continue sur les bornés.

Théorème 3.1.1 (Hájek) *Soit Y un espace de Banach. On suppose que Y est de type fini, ou bien que Y ne contient pas c_0 et possède une base inconditionnelle. Alors toute application lisse $f : c_0 \to Y$ est* **compacte** *: l'image de toute partie bornée de c_0 est relativement compacte dans Y. En particulier, il n'existe pas de surjection lisse de c_0 sur Y si Y est de dimension infinie.*

Au vu de ce résultat, il est très naturel de conjecturer que si Y est un espace de Banach ne contenant pas c_0, alors toute application lisse de c_0 dans Y est compacte. Comme toute suite bornée dans c_0 possède une sous-suite faiblement de Cauchy, on est donc conduit au problème suivant.

Problème 3.1.2 *Une application lisse de c_0 dans un espace de Banach ne contenant pas c_0 change-t-elle nécessairement les suites faiblement de Cauchy en suites convergentes ?*

Ce problème est la motivation principale de [7], où on obtient quelques indications positives partielles. Remarquons d'abord qu'une application $f : c_0 \to Y$ change les suites faiblement de Cauchy en suites convergentes si et seulement si f est uniformément continue sur les bornés pour la topologie faible de c_0, ce qui revient à dire que si (h_i) est une suite convergeant faiblement vers 0 dans c_0, alors $f(x+h_i)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur les bornés ; a fortiori, la convergence a lieu au sens de Cesàro. Même sans la condition d'uniformité, la continuité de $f_{|B_{c_0}}$ pour la topologie faible entraîne que $f(\partial B_{c_0})$ est nécessairement dense dans $f(B_{c_0})$. Dans [7], on obtient deux résultats compatibles avec ces remarques.

Théorème 3.1.3 *Soient X et Y deux espaces de Banach ; on suppose que Y est de cotype fini et que X n'est pas de cotype fini. Si $f : X \to Y$ est une application lisse, alors, pour tout ouvert borné $\Omega \subset X$, $f(\partial\Omega)$ est dense dans $f(\overline{\Omega})$.*

Ainsi, les applications lisses d'un espace de cotype trivial dans un espace de cotype non trivial ont un comportement "harmonique". Des résultats analogues sont démontrés par exemple dans [BoF] et [DevGZ] ; voir également [BeLind]. Bien entendu, il est très tentant de conjecturer qu'il existe des formules de représentation intégrale, par exemple pour les fonctions lisses sur B_{c_0}. Mais ceci est une autre histoire.

Proposition 3.1.4 *Soit Y un espace de Banach de cotype fini, et soit $f : c_0 \to Y$ une fonction lisse. Si (h_i) est une suite convergeant faiblement vers 0 dans c_0, alors $f(x+h_i)$ tend vers $f(x)$* au sens de Cesàro*, uniformément sur les bornés. Plus précisément, la quantité*

$$\sup\left\{ \left\| \frac{1}{n} \sum_{i\in F} [f(x+h_i) - f(x)] \right\| \; ; \; F \subset \mathbb{N},\ |F| = n \right\}$$

tend vers 0 uniformément sur les bornés.

Ce dernier résultat a été récemment amélioré par Deville et Hàjek ([DevH]) : *la réponse au probleme 3.1.2 est positive si l'espace de Banach Y est de cotype fini.*

3.2 Fonctions FSC

Dans la preuve du théorème de Hájek 3.1.1, et également dans [DevH], le point clé est le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 (Hájek) *La réponse au problème 3.1.2 est positive pour $Y = \mathbb{R}$. Autrement dit : si $f : c_0 \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, alors f change les suites faiblement de Cauchy en suites convergentes.*

La preuve donnée par Hájek est assez alambiquée, et l'une des motivations de [7] était de tenter de la comprendre un peu mieux. Les efforts faits dans cette direction ont mis en évidence le rôle joué par une notion de continuité intermédiaire entre la continuité et la continuité uniforme, qu'on a appelé la *continuité séquentielle forte.*

Soit $f : c_0 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, et soit (h_i) une suite convergeant faiblement vers 0 dans c_0. Si on applique 3.1.4 avec $Y = \mathbb{R}$, on voit que la quantité

$$\inf\{|f(x+h_i) - f(x)|;\ i \leq n\}$$

tend vers 0 uniformément sur toute partie bornée de c_0. Cela justifie la définition suivante.

Définition 3.2.2 *Soit G un groupe topologique commutatif, et soit (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une application $f : G \to Y$ est* **fortement séquen- tiellement continue** *(FSC) sur un ensemble $B \subset G$ si pour toute suite (h_i) tendant vers 0 dans G, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{i\leq n} d(f(x+h_i), f(x)) = 0$$

uniformément *sur B.*

L'utilité de cette notion réside dans le lemme suivant qui, compte tenu de 3.1.4, entraîne immédiatement le résultat de Hàjek énoncé plus haut.

Lemme 3.2.3 *Si $f : G \to Y$ est FSC sur un ensemble B, alors f change les suites de Cauchy d'éléments de B en suites convergentes.*

La continuité séquentielle forte était purement instrumentale dans [7], mais il était naturel d'étudier cette notion plus en détail. C'est ce qu'on a fait dans [8]. Dans tout ce qui suit, la lettre G désigne un groupe topologique commutatif.

Bien entendu, toute fonction FSC sur G est séquentiellement continue, et toute fonction séquentiellement uniformement continue est FSC. La plus grande partie de [8] est consacrée à étudier dans quelle mesure ces implications admettent des réciproques. S'il est à peu près clair qu'une fonction séquentiellement continue n'a en général aucune raison d'être FSC, il n'est a priori pas évident qu'il puisse exister des fonctions FSC qui ne soient pas séquentiellement uniformément continues. On dira que le groupe G est un **bon groupe** si toute fonction FSC $f : G \to \mathbb{R}$ est séquentiellement uniformément continue, et que G est un **mauvais groupe** dans le cas contraire.

Le lemme 3.2.3 permet de donner immédiatement des exemples de bons groupes. En effet, il découle de 3.2.3 que si B est une partie de G telle que toute suite d'éléments de G possède une sous-suite de Cauchy, alors toute fonction FSC sur B est séquentiellement uniformément continue sur B. En particulier, tout groupe métrisable et précompact est un bon groupe.

Les deux théorèmes suivants montrent que tout groupe raisonnablement "complet" est un bon groupe.

Théorème 3.2.4 *Si G est métrisable et est un espace de Baire, alors G est un bon groupe.*

Corollaire 3.2.5 *Tout groupe complètement métrisable est un bon groupe. En particulier, $\mathbb{R}$ est un bon groupe.*

La preuve de 3.2.4 repose de manière essentielle sur le lemme suivant, dont la preuve est presque immédiate. On reparlera de ce lemme plus loin.

Lemme 3.2.6 *Soit (V_n) une suite d'ouverts de G. On suppose qu'il existe une suite (x_n) tendant vers 0 telle que $G = V_n \cup (V_n + x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si G est un espace de Baire, alors il existe un point $x \in G$ appartenant à une infinité d'ensembles V_n.*

Sans aucune hypothèse sur G, la conclusion du lemme reste valable si on suppose que la série $\sum x_n$ est **inconditionnellement convergente**, ce qui signifie que toutes ses sous-séries convergent dans G. La même méthode fournit alors le théorème suivant.

Théorème 3.2.7 *Si toute suite (h_n) tendant vers 0 dans G possède une sous-suite (k_n) telle que la série $\sum k_n$ est inconditionnellement convergente, alors G est un bon groupe.*

Si on n'exige pas d'inconditionnalité dans la propriété de G décrite plus haut, on obtient ce qu'on appelle la **propriété (K)**, introduite par Kliś dans [Kl]. On sait ([BurKL]) qu'un groupe métrisable possèdant la propriété (K) est nécessairement un espace de Baire. Par conséquent, le théorème 3.2.7 ne présente un intérêt que pour un groupe G non métrisable. Comme exemples de groupes auxquels 3.2.7 s'applique, on peut citer les groupes du type $G = (X, w)$, où X est un espace de Banach possédant la *propriété de Schur* (toute suite faiblement convergente converge en norme), ou $G = \mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions "test" sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant exhibe une classe générale de mauvais groupes. Rappelons qu'un *caractère* de G est un homomorphisme continu $\gamma : G \to \mathbb{T}$.

Définition 3.2.8 *On dira que le groupe G est* **de type Dirichlet** *s'il existe une suite (γ_n) de caractères de G vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *(γ_n) "tend vers l'infini" au sens suivant : il existe une suite (h_n) tendant vers 0 dans G telle que $\gamma_n(h_n)$ reste à distance positive de 1.*

(ii) *(γ_n) converge simplement vers 1 sur G.*

Par exemple, tout sous-groupe dénombrable dense de $\mathbb{R}$ est de type Dirichlet ; plus généralement tout sous groupe dense de $\mathbb{R}$ engendré par une suite croissante d'ensembles de Dirichlet est de type Dirichlet. Tout espace vectoriel normé de dimension algébrique dénombrable est de type Dirichlet. Tout groupe du type $G = (X, w)$, où X est un espace de Banach ne possédant pas la propriété de Schur, est de type Dirichlet. Notons enfin que pour les sous-groupes de $\mathbb{T}$, la notion de “type Dirichlet” remonte à Arbault ([Arb]).

Théorème 3.2.9 *Si G est de type Dirichlet et n'est pas précompact, alors G est un mauvais groupe.*

Comme conséquence des deux théorèmes précédents, on obtient une caractérisation amusante de la propriété de Schur.

Proposition 3.2.10 *Soit X un espace de Banach séparable, et soit $G = (X, w)$ l'espace X muni de sa topologie faible. Alors G est un bon groupe si et seulement si X possède la propriété de Schur.*

En particulier, ce résultat montre que la classe des espaces de Banach X pour lesquels $G = (X, w)$ est un bon groupe est stable par produit. La situation est complètement différente si on considère des parties *bornées* d'un espace de Banach X. En effet, si X est un espace de Banach possèdant la propriété de Schur, *ou bien* un espace de Banach ne contenant pas l^1, alors toute fonction $f : (X, w) \to \mathbb{R}$ FSC sur la boule unité de X est uniformément séquentiellement continue sur (B_X, w) : dans le premier cas, cela vient d'une variante du théorème 3.2.4, et dans le deuxième cas, cela découle du lemme 3.2.3 combiné au théorème l^1 de Rosenthal. Le résultat suivant peut donc sembler quelque peu surprenant.

Proposition 3.2.11 *Si $X = c_0 \times l^1$, alors il existe une fonction FSC sur (X, w) qui n'est pas séquentiellement uniformément continue sur la boule unité de X.*

Il y a certainement encore des questions intéressantes concernant les bons groupes et les mauvais groupes. Par exemple, on ne sait pas si un groupe *compact* (non métrisable) est nécessairement un bon groupe, et on ignore également si la classe des bons groupes est stable par produit.

Voici enfin deux résultats de nature plus élémentaire. Les démonstrations ne sont pas difficiles, mais celle de 3.2.12 semble tout de même nécessiter le théorème de Ramsey pour les paires d'entiers. Notons au passage que la preuve du lemme 3.2.3 donnée dans [7] utilise le théorème de Ramsey pour les *triplets* d'entiers.

Proposition 3.2.12 *La somme de deux fonctions FSC est FSC. Le produit de deux fonctions FSC bornées est FSC.*

Proposition 3.2.13 *Soit G un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. Si $f : G \to \mathbb{R}$ est FSC mais non uniformément continue, alors f est* oscillante à l'infini *au sens suivant : il existe une constante $a > 0$ telle que pour tous nombres positifs K, ε et pour tout entier N, on peut trouver $x_1, \ldots, x_{2N} \in G$ tels que $K < x_1 < \ldots < x_{2N}$ et*
(i) $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$ *pour tout $i < 2N$;*
(ii) $f(x_{2k}) - f(x_{2l-1}) \geq a$ *pour tous $k, l \leq N$.*

3.3 Un lemme simplificateur

Comme indiqué plus haut, un cas particulier du lemme suivant joue un rôle central dans la preuve du théorème 3.2.7. Rappelons qu'une série à termes dans G est dite *inconditionnellement convergente* si toutes ses sous-séries convergent dans G.

Lemme 3.3.1 *Soit G un groupe topologique commutatif, et soit (A_n) une suite de boréliens de G. On suppose qu'il existe une suite (x_n) de points de G telle que les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(1) *La série $\sum x_n$ converge inconditionnellement dans G.*
(2) *$G = A_n \cup (A_n + x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Alors il existe un point $x \in G$ appartenant à une infinité d'ensembles A_n.

Il se trouve que ce lemme possède également une autre vertu : on peut l'utiliser pour donner des preuves très simples et presque identiques de plusieurs résultats classiques d'analyse fonctionnelle, comme le théorème l^1 de Schur, la continuité "automatique" des applications linéaires boréliennes, les théorèmes de Vitali-Hahn-Sacks et Nikodym, ou le théorème d'Orlicz-Pettis. Cela est expliqué dans [9]. Voici à titre d'exemple une preuve d'un résultat de type "Orlicz-Pettis" dû à Kalton ([Kal]).

Théorème 3.3.2 (Kalton) *Soit G un groupe commutatif muni de deux topologies de groupe τ_1 et τ_2, avec τ_2 plus fine que τ_1. On fait les hypothèses suivantes.*
(1) *(G, τ_2) possède une base de voisinages de 0 formée d'ensembles τ_1-fermés.*
(2) *(G, τ_2) est séparable.*
Alors toute série convergeant inconditionnellement dans (G, τ_1) converge aussi inconditionnellement dans (G, τ_2).

Preuve. En utilisant (1), on voit facilement qu'il suffit de montrer que si une série $\sum x_n$ converge inconditionnellement dans (G, τ_1), alors x_n tend vers 0 pour τ_2. Fixons une telle série $\sum x_n$, et supposons que x_n ne tende pas vers 0 pour τ_2. Quitte à extraire une sous-suite, il existe donc un τ_2-voisinage de 0, noté U, tel que $x_n \notin U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (1), on peut trouver un τ_2-voisinage de 0 symétrique, noté V, qui vérifie $V + V \subset U$ et est de plus τ_1-fermé. Alors, pour tout point $a \in G$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ x_n - a \in V\}$ est fini : en effet, cet ensemble est vide si $a \in V$, et si $a \notin V$ le résultat suit car

$G \setminus V$ est τ_1-ouvert et $x_n - a$ tend vers $-a \in G \setminus V$ pour τ_1. Soit maintenant (F_n) une suite croissante de parties finies de G telle que $\bigcup_n F_n$ est dense dans (G, τ_2). En utilisant la remarque précédente, on construit par récurrence une sous-suite (z_n) de (x_n) telle que $z_n \notin F_n - F_n + V$ pour tout n. Soit alors W un τ_2-voisinage de 0 symétrique, τ_1-fermé, tel que $W + W \subset V$. Les ensembles $A_n = G \setminus (F_n + W)$ sont τ_1-ouverts, et on a $G = A_n \cup (z_n + A_n)$ pour tout n par le choix de z_n. D'après 3.3.1 appliqué à (G, τ_1), on peut donc trouver un point $z \in G$ tel que $z_n \notin F_n + W$ pour une infinité d'entiers n, et donc pour tout n puisque la suite (F_n) est croissante. Cela contredit la densité de $\bigcup_n F_n$ dans (G, τ_2). $\square$

Un point amusant est que 3.3.1 peut dans certains cas se substituer au théorème de Baire, alors que la preuve de ce lemme donnée dans [9] est basée sur un argument de théorie de la mesure. Todorcevic a observé qu'on peut également démontrer ce lemme en utilisant le théorème de Ramsey infini (voir [ArgTo]).

Chapitre 4

Dynamique linéaire

La dynamique des opérateurs linéaires est un domaine de recherche assez récent, qui s'est considérablement développé depuis une quinzaine d'années. Mon intérêt pour ces questions est lui aussi récent, et certains des résultats décrits ici sont encore très partiels. On peut donc voir une partie de ce chapitre comme un programme de recherche à court ou moyen terme.

Si T est un opérateur linéaire continu sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique X, on note $O_T(x)$ l'orbite d'un vecteur $x \in X$ sous l'action de T,

$$O_T(x) = \{T^n(x);\ n \in \mathbb{N}\} .$$

L'opérateur T est dit **cyclique** s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'espace vectoriel engendré par $O_T(x)$ est dense dans X, **hypercyclique** s'il existe un vecteur x tel que $O_T(x)$ est dense dans X, et **supercyclique** s'il existe un vecteur x tel que $\mathbb{K}\, O_T(x) := \{\lambda T^n(x);\ n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est dense dans X.

Les exemples "historiques" d'opérateurs hypercycliques habituellement cités sont les opérateurs de translation sur l'espace des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (Birkhoff [Bi]), l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (McLane [McL]), et les opérateurs du type $T = \lambda\, B$, où B est le "backward shift" usuel sur $l^2(\mathbb{N})$ et $\lambda > 1$ (Rolewicz [Ro]). La supercyclicité a été introduite par Hilden et Wallen ([HiW]) en 1973. Bien entendu, la notion de cyclicité est beaucoup plus ancienne.

4.1 Formes faibles de supercyclicité

Dans [11], on étudie deux formes faibles de supercyclicité. Dans ce qui suit, la lettre X désigne un espace de Banach complexe, séparable et de dimension infinie. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est **faiblement supercyclique** s'il est supercyclique pour la topologie faible de X, autrement dit s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $\mathbb{C}O_T(x)$ est faiblement dense dans X. On dit que T est **N-supercyclique** ($N \geq 1$) s'il existe un sous-espace vectoriel $E \subset X$ de dimension N tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n(E)$ est dense dans X.

Dans [Sal2], Salas donne une caractérisation de la supercyclicité pour les shifts à poids sur $X = c_0(\mathbb{Z})$ ou $l^p(\mathbb{Z})$. En utilisant cette caractérisation, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.1.1 *Si un shift à poids est N-supercyclique pour un certain entier N, alors il est supercyclique.*

Hilden et Wallen ont remarqué dans [HiW] qu'un opérateur normal n'est jamais supercyclique. Ce résultat très simple a été étendu de deux manières différentes par Bourdon ([Bou]) et Feldman ([Fel]). Bourdon a montré qu'un opérateur *hyponormal* (c'est-à-dire vérifiant $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in X$) n'est jamais supercyclique, et Feldman a montré qu'un opérateur normal n'est jamais N-supercyclique. Dans [11], on généralise ces deux résultats.

Théorème 4.1.2 *Un opérateur hyponormal n'est jamais N-supercyclique.*

L'idée de la preuve est de se ramener au résultat de Feldman en montrant que si un opérateur hyponormal est N-supercyclique pour un certain entier N, alors il est en fait normal. Pour cela, on utilise le lemme suivant, qui peut avoir un intérêt propre. Un opérateur S sur un espace de Banach Y est dit N-**multicyclique** s'il existe un sous-espace $F \subset Y$ de dimension N tel que l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n(F)$ est dense dans Y.

Lemme 4.1.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, et soient $\omega_1, \ldots, \omega_p$ des rationnels de $\mathbb{T}$ deux à deux distincts. Si T est N-supercyclique, alors l'opérateur $S = \omega_1 T \oplus \ldots \oplus \omega_p T$ est N-multicyclique.*

Grâce à ce lemme, on peut utiliser un théorème classique de Berger et Shaw pour montrer que si T est un opérateur N-supercyclique et hyponormal, alors l'opérateur positif $T^*T - TT^*$ est un opérateur à trace de trace nulle, autrement dit T est normal. $\square$

L'argument qui vient d'être expliqué est inspiré de celui utilisé dans [Bou], où Bourdon se ramène à la remarque de Hilden et Wallen en montrant qu'un opérateur hyponormal et supercyclique est nécessairement normal. La preuve de Bourdon ne semble pas pouvoir s'adapter au cas de la supercyclicité faible, mais l'approche précédente permet d'obtenir le même résultat dans ce cas aussi. On peut en fait aller un peu plus loin et obtenir le théorème suivant.

Théorème 4.1.4 *Tout opérateur hyponormal et faiblement supercyclique est multiple d'un opérateur unitaire.*

Pour la preuve, on procède comme suit. Ayant montré comme plus haut qu'un opérateur T hyponormal et faiblement supercyclique est nécessairement normal, on peut considérer T comme un opérateur de multiplication par une certaine fonction bornée, agissant sur un espace L^2. Pour conclure, on montre que cette fonction est de module constant à l'aide du lemme suivant.

Lemme 4.1.5 *Soient S_1 et S_2 deux opérateurs sur des espaces de Banach X_1 et X_2. Si on a* $\sup\{|z_1|;\ z_1 \in \sigma(S_1)\} < \inf\{|z_2|;\ z_2 \in \sigma(S_2)\}$*, alors $S = S_1 \oplus S_2$ n'est pas faiblement supercyclique.*

Au vu de 4.1.4, il est bien sûr naturel de se demander si un opérateur *unitaire* peut être faiblement supercyclique. De façon assez surprenante, c'est effectivement le cas.

Théorème 4.1.6 *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}$, et notons M_z l'opérateur de multiplication par z agissant sur $L^2(\mu)$.*

(1) *On suppose que pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{T}$ tel que $\mu(A) = 1$, il existe un rationnel $\omega \in \mathbb{T}$, $\omega \neq 1$, tel que $A \cap \omega A \neq \emptyset$. Alors M_z n'est pas faiblement supercyclique. C'est le cas en particulier si μ n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

(2) *Si le support de μ est un ensemble de Helson de constante égale à 1, alors M_z est faiblement supercyclique.*

Ce théorème suggère un certain nombre de questions. Par exemple, on ne sait pas si la conclusion de (2) reste valable lorsque le support de la mesure μ est un ensemble de Helson de constante non nécessairement égale à 1. De même, il doit pouvoir être possible d'exhiber une classe de mesures plus générale que celle donnée par (1), pour lesquelles l'opérateur M_z n'est pas faiblement supercyclique. Un candidat naturel aurait pu être la classe des mesures de Rajchman, mais S. Shkarin a construit très récemment une mesure de Rajchman μ pour laquelle l'opérateur M_z est faiblement supercyclique ([Sh]). Incidemment, ce résultat montre qu'il existe des mesures de Rajchman ne vérifiant pas la condition (1) ci-dessus, ce qui est compatible avec l'existence d'ensembles de Rudin. Notons également que si μ est une mesure de Rajchman, alors z^n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mu)$, donc il ne peut pas exister de fonction $f \in L^2(\mu)$ telle que $\mathbb{C}O_{M_z}(f)$ soit faiblement *séquentiellement* dense dans $L^2(\mu)$. Ainsi, dans l'exemple de Shkarin, l'opérateur M_z est faiblement supercyclique mais pas faiblement "séquentiellement supercyclique". Dans [Sh], Shkarin montre que le shift bilatéral sur $l^p(\mathbb{Z})$ vérifie lui aussi cette propriété si $p > 2$.

Au vu de ce qui précède, le problème suivant est très naturel.

Problème 4.1.7 *Peut-on caractériser "simplement" les mesures de probabilités sur $\mathbb{T}$ pour lesquelles l'opérateur M_z est faiblement supercyclique ?*

Ce problème est peut-être du ressort de la théorie descriptive des ensembles. En écrivant la définition, on voit que la famille des mesures pour lesquelles l'opérateur M_z est faiblement supercyclique est une partie coanalytique de l'espace des mesures sur $\mathbb{T}$, et il est tout à fait possible qu'on ait affaire à un vrai coanalytique.

4.2 Taille de l'ensemble des vecteurs hypercycliques

Cette section concerne un travail en cours avec Frédéric Bayart ([15]), directement motivé par les résultats de ([Bay1]). Pour le moment, les améliorations apportées à [Bay1] ne sont pas assez significatives pour être considérées comme satisfaisantes.

Il est facile de voir que si T est un opérateur hypercyclique sur un espace de Fréchet X, alors l'ensemble $HC(T)$ des vecteurs hypercycliques pour T est un G_δ dense de X. Ainsi, l'ensemble $X \setminus HC(T)$ est "petit" au sens de Baire. Il est naturel de chercher à voir ce qu'il en est pour d'autres notions de "petitesse". On s'intéresse ici à la σ-porosité et à la Haar-négligeabilité.

Dans un espace métrique (E, d), un ensemble A est dit **poreux** si, pour tout point $x \in A$, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que la propriété suivante ait lieu : toute boule ouverte $B = B(x, r)$ centrée en x contient une boule B' de rayon λr telle que $B' \cap A = \emptyset$. Cette notion a été introduite par Dolženko ([Dol]) en 1967, et abondamment étudiée depuis (voir par exemple [Za] et [ZaZe]). Un ensemble est dit **σ-poreux** s'il est réunion dénombrable d'ensembles poreux. Dans $\mathbb{R}^n$, tout ensemble σ-poreux est à la fois d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle.

Dans [Bay1], il est montré que si B est le "backward shift" usuel sur $X = l^2(\mathbb{N})$, alors $X \setminus HC(2B)$ n'est pas σ-poreux. Ce résultat peut être généralisé comme suit.

Théorème 4.2.1 *Soit T un "backward shift" à poids sur $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $l^p(\mathbb{N})$. S'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $0 \notin \overline{O_T(x)}$, alors $X \setminus HC(T)$ n'est pas σ-poreux.*

On trouve également dans [Bay1] un résultat concernant l'opérateur de translation par 1 sur l'espace des fonctions entières sur $\mathbb{C}$, muni de la distance d définie par

$$d(f, g) = \sum_0^\infty 2^{-n} \min(1, ||f - g||_n) ,$$

où $||u||_n = \sup\{|u(z)|;\ |z| \leq n\}$. Plus généralement, on peut considérer sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ des distances du type

$$d_{\overline{\varepsilon}}(f, g) = \sum_0^\infty \varepsilon_n \min(1, ||f - g||_n) ,$$

où $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)$ est une suite sommable de réels strictement positifs. On obtient alors le théorème suivant, qui est une forme un peu plus générale du résultat de [Bay1].

Théorème 4.2.2 *Soit T un opérateur de translation sur $X = \mathcal{H}(\mathbb{C})$. S'il existe une constante $c > 0$ telle que $\varepsilon_n \leq c \sum_{k>n} \varepsilon_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X \setminus HC(T)$ est σ-poreux pour la distance $d_{\overline{\varepsilon}}$.*

Il serait bien sûr très intéressant de savoir si la conclusion est différente lorsque la suite (ε_n) décroit très vite vers 0. Par ailleurs, on peut se poser les mêmes questions pour d'autres opérateurs naturels sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, par exemple l'opérateur de dérivation. Au vu du résultat concernant les shifts à poids, il semble raisonnable de conjecturer que dans ce cas, l'ensemble des vecteurs non hypercycliques n'est pas σ-poreux, au moins pour certaines catégories de distances $d_{\overline{\varepsilon}}$. La difficulté principale pour adapter la preuve de 4.2.1 est bien entendu l'inhomogénéité des disyances $d_{\overline{\varepsilon}}$.

Dans un groupe abélien Polonais G, un ensemble universellement mesurable A est dit **Haar-négligeable** s'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur G telle que $\mu(A + x) = 0$ pour tout $x \in G$. Cette notion a été introduite par Christensen ([Chr]) en 1972, et redécouverte 20 ans plus tard par Hunt, Sauer et Yorke ([HuSY]). Elle a depuis suscité beaucoup d'intérêt, dans des directions variées ; voir par exemple [Mat] et [So2]. Si le groupe G est localement compact, les ensembles Haar-négligeables sont exactement les ensembles négligeables pour la mesure de Haar de G. Si G n'est pas localement compact, alors tous les compacts de G sont Haar-négligeables. Les deux résultats suivants sont très simples, et certainement susceptibles d'améliorations.

Proposition 4.2.3 *Soit T un "backward shift" à poids sur $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $l^p(\mathbb{N})$, donné par une suite de poids (w_n). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n = \inf_{j \geq n} \theta_{nj}$, où $\theta_{nj} = w_j \dots w_{j-n+1}$. Si la suite $(\frac{1}{\theta_n})$ définit un élément de X, alors $X \setminus HC(T)$ n'est pas Haar-négligeable.*

L'hypothèse faite sur la suite de poids (w_n) est clairement ad hoc. Il doit pouvoir être possible d'obtenir au moins, comme dans 4.2.1, que $X \setminus HC(T)$ n'est pas Haar-négligeable dès lors que T possède au moins une orbite restant loin de 0.

Proposition 4.2.4 *Soit $X = \mathcal{H}(\mathbb{C})$, l'espace des fonctions entières sur $\mathbb{C}$. Si T est l'opérateur de dérivation sur X, ou un opérateur de translation, alors $X \setminus HC(T)$ n'est pas Haar-négligeable.*

Il est très tentant de "conjecturer" ici que le même résultat vaut pour n'importe quel opérateur T sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ qui commute avec tous les opérateurs de translation. On sait (voir [GoSh]) que les opérateurs commutant avec les translations sont du type $\Phi(D)$, où D est l'opérateur de dérivation et Φ est une fonction entière de type exponentiel. On peut en fait montrer que si les coefficients de Taylor de la fonction Φ sont tous positifs, ou plus généralement si les coefficients de Taylor des puissances de Φ peuvent se mettre sous la forme $c_k(\Phi^n) = a_n\, b_k\, p_{nk}$, avec $p_{nk} \geq 0$, alors l'ensemble des fonctions non hypercycliques pour $\Phi(D)$ n'est pas Haar-négligeable. Cela couvre les deux cas précédents ($\Phi(z) = z$ ou $\Phi(z) = e^{\alpha z}$), mais on est encore loin du cas général.

4.3 Universalité simultanée

Cette section concerne un travail très récent avec Frédéric Bayart ([13]). Le cadre est un peu plus général que celui des sections précédentes : on considère des *suites universelles* d'opérateurs sur un espace de Fréchet X. Une suite $\mathbf{T} = (T_n) \subset \mathcal{L}(X)$ est dite **universelle** s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'ensemble $\{T_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. Un tel vecteur x est dit universel pour $\mathbf{T}$, et l'ensemble des vecteurs universels pour $\mathbf{T}$ est noté $Univ(\mathbf{T})$.

Si T est un opérateur hypercyclique sur un espace de Fréchet X, alors $HC(T)$ est un G_δ dense de X. D'après le théorème de Baire, on en déduit que si $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille *dénombrable* d'opérateurs hypercycliques sur X, alors les T_λ possèdent un vecteur hypercyclique commun, en fait un G_δ dense de vecteurs hypercycliques communs. Plus généralement, si $(\mathbf{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille dénombrable de suites universelles $\mathbf{T}_\lambda = (T_{n,\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ et si tous les $T_{n,\lambda}$ commutent entre eux, alors $\bigcap_\lambda Univ(\mathbf{T}_\lambda)$ est un G_δ dense de X.

Le cas d'une famille non dénombrable de suites universelles est évidemment plus subtil. Dans [AbG], Abakumov et Gordon montrent que si B est le "backward shift" usuel sur $l^2(\mathbb{N})$, alors il existe un vecteur $x \in l^2(\mathbb{N})$ qui est hypercyclique pour tous les opérateurs λB, $\lambda > 1$. De nombreux autres exemples figurent par exemple dans [Bay2], [Bay3], [BayGr] ou [CoSam]. En particulier, on trouve dans [CoSam] un critère général d'"universalité simultanée". Ce critère concerne une famille de suites universelles $(\mathbf{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}(X)$, paramétrée par un intervalle $\Lambda \subset \mathbb{R}$. On suppose que $T_{n,\lambda}(x)$ dépend continûment du couple (λ, x), pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose également qu'il existe un ensemble dense $\mathcal{D} \subset X$ tel que chaque opérateur $T_{n,\lambda}$ possède un inverse à droite $S_{n,\lambda} : \mathcal{D} \to X$. Comme il n'y a a priori aucune structure sur $\mathcal{D}$, les applications $S_{n,\lambda}$ ne sont pas supposées linéaires, ni même continues. Le critère de Costakis et Sambarino s'énonce alors comme suit.

Théorème 4.3.1 ([CoSam]) *On suppose que pour toute semi-norme continue $\|\ .\ \|$ sur X, pour tout point $f \in \mathcal{D}$ et pour tout compact $K \subset \Lambda$, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) *Il existe une suite de nombres positifs $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

- $\sum_0^\infty c_k < \infty$;
- $\|T_{n+k,\lambda}S_{n,\alpha}(f)\| \leq c_k$ *pour tous* $n, k \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha, \lambda \in K$, $\alpha \leq \lambda$;
- $\|T_{n,\lambda}S_{n+k,\alpha}(f)\| \leq c_k$ *pour tous* $n, k \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda, \alpha \in K$, $\lambda \leq \alpha$.

(2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $\eta > 0$ *tel que*

$$0 \leq \mu - \lambda < \frac{\eta}{n} \Rightarrow \|T_{n,\lambda} S_{n,\mu}(f) - f\| < \varepsilon \,.$$

Alors $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Univ(\mathbf{T}_\lambda)$ *est un* G_δ *dense de* X.

Outre le fait qu'il permet de retrouver le résultat d'Abakumov et Gordon avec une preuve différente, ce critère s'appplique dans plusieurs cas intéressants. Par exemple, il est utilisé dans [CoSam] pour démontrer l'hypercyclicité simultanée de la famille $(\lambda D)_{\lambda > 0}$, où D est l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, et il est également appliqué à la famille $(T_\lambda)_{\lambda > 1}$, où T_λ est le "backward shift" sur $l^2(\mathbb{N})$ associé à la suite de poids $\mathbf{w}(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)_{n \geq 1}$. Cependant, la condition de sommabilite faite sur la suite (c_k) semble trop forte, ce qui rend le critère inefficace pour traiter d'autres exemples naturels. D'autre part, le critère ne couvre pas tous les exemples d'hypercyclicité simultanée traités dans [CoSam], en particulier celui des opérateurs de translations sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$; mais dans ce cas précis, la démonstration présente des similitudes évidentes avec celle du critère général, ce qui est un peu déroutant. Enfin, pour les deux exemples mentionnés plus haut (dérivation et shift à poids), la vérification des hypothèses nécessite un certain nombre de calculs un peu fastidieux.

L'article [13] est en un sens une relecture de [CoSam], où on a essayé de prendre en compte les observations précédentes. On isole d'abord un critère "mou" d'universalité simultanée pour des familles de suites d'opérateurs conti- nûment paramétrées. Ce critère est tellement général qu'il en est trivial, mais il semble toutefois possèder une certaine pertinence car met l'accent sur des propriétés communes à *tous* les exemples mentionnés plus haut. On peut considérer que ce critère indique une direction à suivre ; ensuite, il faut évidemment se donner un peu plus de mal pour obtenir des résultats concrets.

Le premier résultat principal de [13] est un critère d'hypercyclicité simultanée formellement très proche de celui de Costakis et Sambarino. Il est moins général, car il ne s'applique que dans un cadre Banachique, les conditions imposées dépendant du *type* de l'espace de Banach sous-jacent. Mais il est également plus "réaliste" car on n'impose pas de condition l^1. Cela permet par exemple d'obtenir des résultats d'hypercyclicité simultanée pour les opérateurs de translation sur certains espaces L^p à poids, et pour les opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Dans les 2 cas, on peut vérifier que le critère de Costakis et Sambarino est inapplicable.

Par ailleurs, la démonstration utilise à la fois le théorème de Baire et des outils probabilistes non triviaux, en particulier le théorème de majoration de Dudley pour les processus sous-Gaussiens. Ce mélange des genres nous a beaucoup amusés, et il y a peut-être là une piste à explorer plus longuement.

Théorème 4.3.2 *On suppose que l'espace de Banach X est de type $p \in [1;2]$, et que pour tout $f \in \mathcal{D}$ et pour tout compact $K \subset \Lambda$, on peut trouver une constante M et un réel $s > \frac{1}{p}$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites.*

(a$_1$) $\|T_\lambda^{n+k} S_\alpha^n(f)\| \leq \dfrac{M}{1+k^s}$, *pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \alpha \in K$, $\lambda \geq \alpha$;*

(a$_2$) $\|T_\lambda^n S_\alpha^{n+k}(f)\| \leq \dfrac{M}{1+k^s}$ *pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \alpha \in K$, $\lambda \leq \alpha$;*

(b$_1$) $\|(T_\lambda^{n+k} - T_\mu^{n+k})(S_\alpha^k f)\| \leq M\, \dfrac{(n+k)|\lambda-\mu|}{1+k^s}$, *pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \mu, \alpha \in K$, $\lambda, \mu \geq \alpha$;*

(b$_2$) $\|(T_\lambda^n - T_\mu^n)(S_\alpha^{n+k}(f))\| \leq M\, \dfrac{n|\lambda-\mu|}{1+k^s}$, *pour $n, k \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \mu \leq \alpha \in K$.*

Alors $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ est un G_δ dense de X.

Le deuxième résultat principal de [13] concerne des familles à 1 paramètre de shifts à poids. Dans ce qui suit, X est un espace de Fréchet possèdant une base inconditionnelle $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e_n. On appelle *suite de poids*, toute suite de nombres strictement positifs $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$. Le *shift à poids* associé à une suite de poids $\mathbf{w}$ est l'application linéaire $T_\mathbf{w} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ définie par $T(e_0) = 0$ et $T(e_n) = w_n\, e_{n-1}$, $n \geq 1$. On dit que la suite $\mathbf{w}$ est *admissible pour X* si $T_\mathbf{w}$ se prolonge en un opérateur linéaire continu sur X, encore noté $T_\mathbf{w}$.

Théorème 4.3.3 *Soit $(\mathbf{w}(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de suites de poids admissibles pour X paramétrée par un intervalle $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $T_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ le shift à poids défini par $\mathbf{w}(\lambda)$. On fait les hypothèses suivantes.*

(1) *Toutes les fonctions $w_n(\lambda)$ sont croissantes, et lipschitziennes sur les compacts.*

(2) *Pour tout intervalle compact $K \subset \Lambda$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver deux ensembles d'entiers A et B tels que*

(i) *l'ensemble B contient toutes les différences $n' - n$, où $n, n' \in A$ et*

$n' > n$;

(ii) *pour tout $\lambda \in K$, chaque série $\displaystyle\sum_{m\in B} \frac{1}{w_1(\lambda) \times \ldots \times w_{m+j}(\lambda)}\, e_{m+j}$, $j \in \{0; \ldots; p\}$ converge dans X ;*

(iii) $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+p} L_k} = \infty$, *où L_k est la constante de Lipschitz de la fonction $Log(w_k)$ sur K.*

Alors les opérateurs T_λ possèdent un G_δ dense de vecteurs hypercycliques communs.

Voici une conséquence immédiate de 4.3.3, probablement plus lisible que l'énoncé général.

Corollaire 4.3.4 *Si les propriétés suivantes sont vérifiées, alors les opérateurs T_λ possèdent un G_δ dense de vecteurs hypercycliques communs.*

(1) *Les fonctions $Log(w_n)$ sont croissantes, et lipschitziennes sur tout compact avec des constantes de Lipschitz uniformément bornées.*

(2) *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la série $\sum \frac{1}{w_1(\lambda) \times \ldots \times w_n(\lambda)} e_n$ converge dans X.*

On en déduit la généralisation suivante du résultat d'Abakumov et Gordon.

Corollaire 4.3.5 *Soit $\mathbf{w} = (w_n)$ une suite de poids admissible pour X, et posons $\lambda_{\mathbf{w}} = \inf \left\{ \lambda > 0;\ \sum_n \frac{\lambda^{-n}}{w_1 \times \ldots \times w_n} e_n \text{ converge dans } X \right\}$. Si $T_{\mathbf{w}}$ est le shift associé à $\mathbf{w}$, alors $\bigcap_{\lambda > \lambda_{\mathbf{w}}} HC(\lambda T_{\mathbf{w}})$ est un G_δ dense X.*

Le théorème 4.3.3 couvre également l'exemple de shift à poids donné dans [CoSam] ($w_n(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{n}$), avec une légère amélioration : si $X = l^p(\mathbb{N})$, on obtient l'hypercyclicité simultanée pour tous les $\lambda > \frac{1}{p}$, et si $X = c_0(\mathbb{N})$, on l'obtient pour tous les $\lambda > 0$. Si on applique 4.3.3 dans $X = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de sa “base canonique” (z^n), on retrouve également sans aucun calcul l'hypercyclicité simultanée de la famille $(\lambda D)_{\lambda > 0}$: l'opérateur λD est le shift à poids associé à $w_n(\lambda) = n\lambda$. Enfin, dans le cas trivial où l'intervalle de paramètre est réduit à 1 point, et si $X = l^p(\mathbb{N})$ ou $c_0(\mathbb{N})$, il n'est pas difficile de voir que les hypothèses de 4.3.3 se réduisent à la seule condition

$$\sup_n w_1 \times \ldots \times w_n = \infty \,,$$

qui est la condition classique d'hypercyclicité pour un shift à poids $T_{\mathbf{w}}$ ([Sal1]).

Le troisième résultat principal de [13] concerne des opérateurs de “translato-dilatation” sur l'espace des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Contrairement aux deux résultats précédents, il s'agit ici réellement de suites universelles $\mathbf{T}_\lambda = (T_{n,\lambda})$. L'espace des paramètres Λ est une partie de $\mathbb{R}^2$ et pour $\lambda = (s,t) \in \Lambda$, la suite $\mathbf{T}_\lambda \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ est donnée par

$$T_{n\lambda} f(z) = a_n(s)\, f(z + b_n(t)) \,,$$

où $a_n(s) > 0$ et $b_n(t) \in \mathbb{C}$.

Avant d'énoncer le résultat, introduisons une définition. Une paire de séries de nombres positifs $(\sum \alpha_n, \sum \beta_n)$ sera dite *fortement divergente* si la propriété suivante a lieu : pour tout $C > 0$, on peut trouver une suite de parties finies de $\mathbb{N}$ non vides $F_0 < F_1 < \ldots$ telle que

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \inf_{n \in F_k} \beta_n = \infty$;

- $\inf_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in F_k} \alpha_n > C$.

Par exemple, on voit facilement que la paire $\left(\sum \frac{1}{Log\, n}, \sum \frac{1}{n}\right)$ est fortement divergente, mais que la paire $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}, \sum \frac{1}{n}\right)$ ne l'est pas si $\alpha > 0$.

Théorème 4.3.6 *On suppose que l'espace des paramètres Λ est une réunion dénombrable de rectangles compacts $I \times J$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(1) *Toutes les fonctions $a_n(s)$, $b_n(t)$ sont lipschitziennes sur I ou J.*

(2) *Pour tout disque $E = \overline{D}(0, R) \subset \mathbb{C}$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*
   - $b_n(J) \cap E = \emptyset$ *si* $n \geq N$, *et* $(E + b_n(J)) \cap (E + b_m(J)) = \emptyset$ *si* $|n - m| \geq N$;
   - $\mathbb{C} \setminus (E + b_n(J))$ *est connexe pour tout* $n \geq N$.

(3) *En posant $\alpha_n = \frac{1}{\mathrm{Lip}(Log\, a_n)}$ et $\beta_n = \frac{1}{\mathrm{Lip}(b_n)}$, la paire $(\sum \alpha_n, \sum \beta_n)$ est fortement divergente.*

Alors $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Univ(\mathbf{T}_\lambda)$ est un G_δ dense de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

On obtient par exemple ainsi l'universalité simultanée de la famille de suites d'opérateurs définie par

$$T_{n\lambda} f(z) = c_n n^s f(z + n\zeta)\,,$$

où $\lambda = (s, \zeta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}$ et (c_n) est une suite arbitraire (mais fixée) de nombres strictement positifs. Cela généralise le résultat de [CoSam] sur les translations mentionné plus haut.

Voici pour finir quelques remarques sur le cas un peu mystérieux des sommes directes de shifts. Soit B le "backward shift" usuel sur $l^2(\mathbb{N})$. D'après le critère de Salas, l'opérateur $sB \oplus tB$ est hypercyclique sur $l^2 \times l^2$ dès que s et t sont strictement supérieurs à 1 ; on notera T_λ cet opérateur, $\lambda = (s, t) \in U :=]1; \infty[\times]1; \infty[$.

Il n'est pas très difficile de voir que si $\Lambda \subset U$ vérifie $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda) \neq \emptyset$, alors Λ est de mesure de Lebesgue nulle ; cette remarque est dûe à Sasha Borichev. A l'opposé, les méthodes de [13] permettent de montrer que si Λ peut être recouvert par une suite de graphes de fonctions lipschitziennes croissantes, alors $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ est un G_δ dense de $l^2 \times l^2$. Il est particulièrement irritant de ne pas savoir ce qu'il en est pour des graphes de fonctions lipschitziennes *décroissantes*. Par exemple, on ne sait même pas si $\bigcap_{2\leq s\leq 3} HC(T_{(s,4-s)})$ est vide ou non.

Signalons enfin qu'une application simple du théorème de Kuratowski-Ulam permet de voir qu'il existe un G_δ dense $G \subset U$ tel que $\bigcap_{\lambda\in G} HC(T_\lambda) \neq \emptyset$. Il serait intéressant de savoir à quoi peut ressembler un tel ensemble G. Il serait sans doute également intéressant de mieux comprendre la famille de compacts

$$\mathcal{I} := \left\{ K \in \mathcal{K}(U);\ \bigcap_{\lambda \in K} HC(T_\lambda) \neq \emptyset \right\},$$

qui, comme par un fait exprès, se trouve être un σ-idéal G_δ de $\mathcal{K}(U)$. Comme $\mathcal{I}$ est topologiquement très simple, il n'est pas absurde d'espérer trouver une caractérisation géométrique des éléments de $\mathcal{I}$. Et pour conclure sur le mode de la science-fiction, il n'est pas interdit de penser que ce retour “par la fenêtre” de la théorie descriptive des ensembles est moins anodin qu'il n'y paraît.

CONCLUSION

Il est difficile de prétendre qu'il existe une réelle unité dans les travaux présentés ici. En guise de conclusion, je voudrais accentuer encore un peu plus cet aspect hétéroclite (ou, si l'on préfère, cette diversité) en décrivant brièvement un travail très récent en collaboration avec Robert Deville.

Le point de départ est un résultat récent de Z. Buczolich ([Buc]), qui a construit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partout différentiable vérifiant $\nabla f(0) = 0$ et $||\nabla f(x)|| \geq 1$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$. Un tel exemple n'existe pas dans le cas d'une seule variable : c'est un résultat classique dû à Denjoy. Le problème pour les fonctions de plusieurs variables a été posé dans les années 1960 par C. E. Weil, et donc résolu par Buczolich.

La démonstration de Buczolich est extrêmement technique. La fonction f construite est la limite d'une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et une des difficultés principales consiste à assurer la différentiabilité de f en tout point. Pour cela, on doit d'une façon ou d'une autre "forcer" la suite $(\nabla f_n(x))$ à converger en tout point. Les arguments de Buczolich ont été considérablement simplifiés par J. Malý et M. Zelený ([MalZe]), qui ont pour cela introduit un *jeu* extrêmement intéressant. C'est un jeu infini à deux joueurs, **I** et **II**. Le joueur **I** joue des points $a_0, a_1, \dots$ dans la boule unité de $\mathbb{R}^2$, et le joueur **II** joue des droites $D_0, D_1, \dots$. Lorsque **I** a joué a_n, **II** doit jouer une droite D_n contenant a_n ; **I** doit alors jouer un point a_{n+1} de la droite D_n, et ainsi de suite. Le joueur **II** gagne si la suite (a_n) est convergente. Malý et Zelený ont montré que dans ce *jeu des points et des droites*, le joueur **II** possède une stratégie gagnante. C'est ce résultat qui permet de simplifier la preuve de Buczolich.

Dans [14], on étudie des généralisations du jeu des points et des droites. Au lieu de jouer dans $\mathbb{R}^2$, on peut jouer dans un espace de Banach X, et le jeu devient alors le jeu des points et des hyperplans. On peut aussi décréter que le joueur **II** doit jouer non pas des hyperplans, mais des *tranches* de la boule unité de X, ou encore des ouverts faibles de B_X. Il est très amusant de constater alors que l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur **II** est liée à des propriétés bien répertoriées de l'espace de Banach X.

Théorème 4.3.7 *Soit X un espace de Banach.*

(1) *Le joueur* **II** *a une stratégie gagnante dans le jeu des points et des tranches si et seulement si l'espace X possède la propriété de Radon-Nikodym.*

(2) *Si l'espace X est super-réflexif, alors le joueur* **II** *possède une* tactique *gagnante dans le jeu des points et des tranches.*

(3) *Le joueur* **II** *a une stratégie gagnante dans le jeu des points et des ouverts faibles si et seulement si l'espace X possède la propriété des*

points de continuité.

Rappelons la différence entre une stratégie et une tactique : dans le cas d'une stratégie, la réponse au coup a_n du joueur **I** peut éventuellement dépendre de tous les coups précédemment joués ; dans le cas d'une tactique, la réponse dépend uniquement du coup a_n qui vient d'être joué. La différence peut parfois être très subtile. Par exemple, G. Debs ([Deb1]) a construit un espace topologique complètement régulier Z vérifiant la propriété suivante : dans le jeu de Banach-Mazur pour Z, le joueur **II** possède une stratégie gagnante où à chaque étape, la réponse aux n premiers coups de **I** ne dépend que des *deux* derniers coups joués par **I** ; mais **II** ne possède néammoins pas de tactique gagnante.

On ne sait pas si le joueur **II** possède une tactique gagnante pour le jeu des points et des tranches dans le cas Radon-Nikodym, ou une tactique gagnante pour le jeu des points et des ouverts faibles dans le cas PCP. On ne sait pas non plus s'il existe une tactique *continue* dans le cas super-réflexif.

Notons que dans les cas RNP et PCP, le joueur **II** possède une stratégie gagnante d'un type très particulier : à chaque étape, la réponse de **II** aux coups $a_0, \dots, a_n$ joués par **I** dépend uniquement du dernier coup a_n et de son numéro n. Galvin et Telgársky ([GaTe]) ont montré que pour une certaine classe de jeux incluant le jeu Banach-Mazur, l'existence d'une telle stratégie entraîne l'existence d'une tactique gagnante ; mais les jeux du type points–sous-espaces ne rentrent pas dans ce cadre.

Comme expliqué plus haut, le jeu des points et des droites est utilisé par Malý et Zelený pour simplifier la construction de l'exemple de Buczolich. En utilisant la même idée, on montre dans [14] qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en tout point, dont le gradient s'annule en 0 et est cependant de norme exactement égale à 1 presque partout. Ainsi, l'équation Eikonale $\|\nabla u\| = 1$ possède des solutions pour le moins pathologiques. Plus généralement, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.3.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, et soit $x_0 \in \Omega$. Soit également U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ contenant 0. Il existe une fonction lipschitzienne $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(1) *f est bornée et différentiable en tout point de Ω, avec $\nabla f(\Omega) \subset \overline{U}$.*

(2) *$f \equiv 0$ sur $\partial\Omega$.*

(3) *$\nabla f(x_0) = 0$, et $\nabla f(x) \in \partial U$ pour presque tout $x \in \Omega$.*

Il semble très possible que l'on puisse utiliser avec profit des jeux du type "points-droites" dans d'autres situations, éventuellement pour des questions n'ayant rien à voir avec les fonctions différentiables. L'histoire n'est donc sans doute pas terminée...

Travaux personnels

[1] *On the complexity of H sets of the unit circle*. Colloq. Math **70** (1996), no. 1, 1-5.

[2] *The descriptive complexity of Helson sets*. Illinois J. Math. **39** (1995), no. 4, 608-626.

[3] *Sigma-idéaux polaires et ensembles d'unicité dans les groupes abéliens localement compacts*, Annales Inst. Fourier **46** (1996), no. 2, 493-533

[4] *Remarques sur les pseudo-fonctions synthétisables du cercle unité*. C. R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), no. 12, 1187-1190.

[5] *Complexité de la famille des ensembles de synthèse d'un groupe abélien localement compact*. Studia Math. **121** (1996), no. 2, 137-148.

[6] *How to recognize a true $\mathbf{\Sigma}_3^0$ set*. Fund. Math. **158** (1998), no. 2, 181-194.

[7] *Pyramidal vectors and smooth functions on Banach spaces* (avec R. Deville). Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 12, 3601-3608

[8] *Strongly sequentially continuous functions* (avec A. Borichev et R. Deville). Quaest. Math. **24** (2001), no. 4, 535-548.

[9] *A useful lemma concerning subseries convergence*. Bull. Austral. Math. Soc **63** (2001), no. 2, 273-277.

[10] *Rudin-like sets and hereditary families of compact sets* (avec M. Zelený). Fund. Math. **185** (2005), 97-116.

[11] *Hyponormal operators, weighted shifts, and weak forms of supercyclicity* (avec F. Bayart), Proc. Edinburgh Math. Soc. **48** (2005), 1-15.

[12] *Trichotomies for ideals of compact sets* (avec S. Solecki et M. Zelený). J. Symbolic Logic (à paraître).

Articles soumis.

[13] *How to get common universal vectors* (avec F. Bayart).

[14] *Infinite games, Banach space geometry and the Eikonal equation* (avec R. Deville).

Preprint.

[15] *Small sets and hypercyclic vectors* (avec F. Bayart).

Références

[AbG] E. Abakumov, J. Gordon, *Common hypercyclic vectors for multiples of backward shifts*. J. Funct Anal. **200** (2003), no. 2, 494-504.

[Arb] J. Arbault, *Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique*. Bull. Soc. Math. France **80** (1952), 253-317.

[ArgTo] S. A. Argyros, S. Todorcevic, *Ramsey methods in Analysis*. Advanced courses in Mathematics, CRM Barcelona. Birkhauser (2005).

[BalDj] M. Balcerzak, U. B. Darji, *Some examples of true $F_{\sigma\delta}$ sets*, Colloq. Math. **86** (2000), 203-207.

[Bts] S. M. Bates, *On smooth, nonlinear surjections of Banach spaces*, Israel J. Math. **100** (1997), 209-220.

[Bay1] F. Bayart. *Porosity and hypercyclic vectors*. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[Bay2] F. Bayart, *Common hypercyclic vectors for composition operators*. J. Operator Theory **52** (2004), no. 2, 353-370.

[Bay3] F. Bayart, *Common hypercyclic subspaces*. Integral Equations and Operator Theory (à paraître).

[BayGr] F. Bayart, S. Grivaux, *Hypercyclicity and unimodular point spectrum*, J. Funct. Anal. (à paraître).

[BeLind] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*. AMS Colloquium Publications **48** (2000).

[Bi] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[BoF] R. Bonic, J. Frampton. *Smooth functions on Banach manifolds*. J. Math. Mech **15** (1966), 877-898.

[Bou] P. Bourdon. *Orbits of hyponormal operators*. Michigan Math. J. **44** (1997), no. 2, 345-353.

[Buc] Z. Buczolich, *Solution to the gradient problem of C. E. Weil*. Rev. Mat. Ibroamericana (à paraître).

[BurKL] J. Burzyk, C. Kliś, Z. Lipecki, *On metrizable abelian groups with a completeness type property*. Colloq. Math. **49** (1984), no. 1, 33-39.

[Chr] J. P. R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. **13** (1972), 255-260.

[CoSam] G. Costakis, M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*. Adv. Math. **182** (2004), no. 2, 278-306.

[Deb1] G. Debs, *Stratégies gagnantes dans certains jeux topologiques*. Fund. Math. **126** (1985), 93-105.

[Deb2] G. Debs, *Polar σ-ideals of compact sets*. Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 1, 317-338.

[DebStR] G. Debs, J. Saint Raymond, *Ensembles boréliens d'unicité et d'unicité au sens large*. Ann. Inst. Fourier **37** (1987), no. 3, 217-239.

[DevGZ] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **64**. Longman (1993).

[DevH] R. Deville, P. Hàjek, *Smooth operators from c_0*. Preprint.

[Dol] E. P. Dolženko, *Boundary properties of arbitrary functions*. Izv. AZkad. Nauk. SSSR **31** (1967), 3-14.

[Fel] N. S. Feldman, *n-supercyclic operators*. Studia Math. **151** (2002), no. 2, 141-159.

[GaTe] F. Galvin, R. Telgársky, *Stationary strategies in topological games*. Topology Appl. **22** (1986), 51-69.

[GoSh] G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*. J. Funct. Anal. **98** (1991), no. 2, 229-269.

[Há1] P. Hájek, *Smooth functions on c_0*. Israel J. Math **104** (1998), 17-27.

[Há2] P. Hájek, *Smooth functions on $\mathcal{C}(K)$*. Israel J. Math. **107** (1998), 237-252.

[HiW] H. M. Hilden, L. J. Wallen, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators*. Indiana Univ. Math. J. **23** (1973-1974), 557-565.

[HuSY] B. R. Hunt, T. Sauer, J. A. Yorke, *Prevalence : a translation invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*. Bull. Amer. Math. Soc **27** (1992), no. 2, 217-238.

[Kal] N. J. Kalton, *Subseries convergence in topological groups and vector spaces*. Israel J. Math. **10** (1971), 402-412.

[KatMcG] Y. Katznelson, O. C. McGehee, *Some sets obeying harmonic synthesis*. Israel J. Math. **23** (1976), no. 1, 88-93.

[Kau1] R. Kaufman, *M-sets and distributions*. Astérisque, **5** (1973), 225-230.

[Kau2] R. Kaufman, *Fourier transforms and descriptive set theory*. Mathematika **31** (1984), no. 2, 336-339.

[Kau3] R. Kaufman, *Absolutely convergent Fourier series and some classes of sets*. Bull. Sci. Math. (2) **109** (1985), no. 4, 363-372.

[Ke1] A. S. Kechris, *Hereditary properties of the class of closed sets of uniqueness for trigonometric series*. Israel J. Math. **73** (1991), no. 2, 189-198.

[Ke2] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*. Graduate Texts in Mathematics **156**. Springer Verlag (1995).

[KeL1] A. S. Kechris, A. Louveau, *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness*. London Mathematical Society Lecture Note Series **128**. Cambridge University Press (1987).

[KeL2] A. S. Kechris, A. Louveau, *Covering theorems for uniqueness and extended uniqueness sets*. Colloq. Math. **59** (1990), no. 1, 63-79.

[KeLT] A. S. Kechris, A. Louveau, V. Tardivel, *The class of synthesizable pseudomeasures*, Illinois J. Math. **35** (1991), no. 1, 107-146.

[KeLW] A. S. Kechris, A. Louveau, W. H. Woodin. *The structure of σ-ideals of compact sets*. Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), no. 1, 263-288.

[Kl] C. Kliś, *An example of noncomplete normed (K) space*. Bull. Acad. Pol. Sci. **26** (1978), no. 5, 415-420.

[Kö1] T. W. Körner, *A pseudo-function on a Helson set*. Astérisque **5** (1973), 3-224 et 231-239.

[Kö2] T. W. Körner, *The behaviour of power series on their circle of convergence*. Banach spaces, Harmonic Analysis and Probability theory. Springer Lecture Notes in Mathematics **995** (1983), 56-94.

[Kö3] T. W. Körner, *A Helson set of uniqueness but not of synthesis*. Colloq. Math. **62** (1991), no. 1, 67-71.

[Ln] T. Linton, *The H-sets in the unit circle are properly $\mathbf{\Sigma}^0_3$*. Real Anal. Exchange **19** (1993-1994), 203-211.

[LdP] L. Å Lindahl, L. Poulsen (éditeurs), *Thin sets in Harmonic Analysis*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **2**. Marcel Dekker (1971).

[MalZe] J. Malý, M. Zelený, *A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem*. Preprint.

[Mat] E. Matoušková, *Translating finite sets into convex sets*. Bull. London Math. Soc. **33** (2001), no. 6, 711-714.

[McL] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*. J. Anal. Math. **2** (1952), 72-87.

[My] J. Mycielski, *Independent sets in topological algebras*. Fund. Math. **55** (1964), 139-147.

[PS] I. I. Piatetski-Shapiro, *Supplément au travail "Sur le problème de l'unicité du développement d'une fonction en série trigonométrique"*. Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. Mat **165** (1954), no. 7, 79-97.

[Ro] S. Rolewicz, *On orbits of elements*. Studia Math. **33** (1969), 17-22.

[Ru] W. Rudin, *Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets*. Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 199-202.

[Sae] S. Saeki. *Helson sets which disobey spectral synthesis*. Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 371-377.

[Sal1] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*. Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no 3, 993-1004.

[Sal2] H. N. Salas, *Supercyclicity and weighted shifts*. Studia Math. **135** (1999), no. 1, 55-74.

[Sh] S. Shkarin, *Non-sequential weak supercyclicity*. Preprint.

[So1] S. Solecki, *Covering analytic sets by families of closed sets*. J. Symbolic Logic **59** (1994), no. 3, 1022-1031.

[So2] S. Solecki, *Haar null sets and non-dominating sets*. Fund. Math. **170** (2001), no. 1-2, 197-217.

[Ta] V. Tardivel, *Fermés d'unicité dans les groupes abéliens localement compacts*. Studia Math. **91** (1988), no. 1, 1-15.

[W] C. E. Weil, *On properties of derivatives*. Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 363-376.

[Za] L. Zajiček, *Porosity and σ-porosity*. Real Anal. Exchange **13** (1987-1988), no. 2, 314-350.

[ZaZe] L. Zajiček, M. Zelený, *Inscribing compact non σ-porous sets into analytic non σ-porous sets*. Fund. Math. (à paraître).