LA "SUMSET CONJECTURE" D'ERDŐS

ÉTIENNE MATHERON

1. Introduction

1.1. **Ce dont il s'agit.** La plupart des lecteurs de la Gazette ont certainement entendu parler du *Théorème de van der Waerden* : si on partitionne $\mathbb{N}$ en un nombre fini de morceaux $A_1, \dots, A_r$, alors l'un des A_i doit contenir des progressions arithmétiques arbitrairement longues, *i.e.* des ensembles de la forme $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+ld\}$ avec $d \geq 1$ et l arbitrairement grand. Ce théorème date de 1927. C'est l'une des trois "perles" rassemblées dans [9], et un résultat assez emblématique de ce qu'on appelle communément la "théorie de Ramsey".

Un résultat beaucoup plus fort a été démontré par Szemerédi [13] en 1975 : si A est un ensemble d'entiers *de densité supérieure strictement positive*, alors A contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Dire que A est de densité supérieure strictement positive signifie qu'il existe des intervalles d'entiers $[\![0, N]\!]$ arbitrairement grands dans lesquels on trouve toujours (au moins) une certaine proportion fixe et non nulle d'éléments de A ; autrement dit, que

$$\overline{d}(A) := \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|A \cap [\![0, N]\!]|}{N+1} > 0.$$

Le Théorème de van der Waerden se déduit immédiatement du Théorème de Szemerédi, car si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$ alors l'un des A_i est certainement de densité supérieure strictement positive.

Les preuves originales de van der Waerden et Szemerédi étaient purement combinatoires. Grâce à Furstenberg, on sait depuis les années 1980 qu'il est possible de démontrer énormément de résultats de ce type par des méthodes de dynamique topologique ou de théorie ergodique : ceci est magnifiquement expliqué dans [5], un livre à emporter sur l'île déserte. En ce qui concerne l'approche topologique, il y a deux façons de faire : ou bien se servir de résultats de dynamique topologique formulés dans un langage "classique", ou bien utiliser ces objets assez peu mainstream qu'on appelle les *ultrafiltres* (voir par exemple [14], un autre livre à emporter sur l'île déserte).

Voici un autre résultat de théorie de Ramsey particulièrement célèbre, démontré par Hindman [7] en 1974 : si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$, alors l'un des A_i contient ce qu'on appelle un *ensemble IP*, c'est-à-dire l'ensemble constitué par toutes les sommes d'éléments deux à deux distincts d'un certain ensemble infini D. En particulier : si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$, alors l'un des A_i contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis (couper l'ensemble D en 2 morceaux infinis).

Il est naturel de se demander si le Théorème de Hindman peut se renforcer "à la Szemerédi" de la même façon que le Théorème de van der Waerden ; autrement dit, si tout ensemble d'entiers de densité supérieure strictement positive contient nécessairement un ensemble IP. C'est clairement faux : l'ensemble des nombres impairs pose problème. Cependant, tous les enfants savent bien que l'ensemble des nombres impairs contient la somme de deux ensembles infinis (la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair). Ceci mène à la question suivante, qui a été posée par Erdős en 1977.

Question. Est-il vrai que si $A \subseteq \mathbb{N}$ vérifie $\overline{d}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis ?

C'est assurément une très jolie question, intrigante, facile à comprendre, et potentiellement difficile à résoudre. Pourtant, force est de constater que, contrairement à d'autres “conjectures d'Erdős”, elle n'a pas franchement passionné les foules. Straus a montré en 1977 qu'il *n'est pas vrai* que tout ensemble A de densité supérieure strictement positive contienne un ensemble de la forme $B + C$ où B est infini et C est un translaté de B. Nathanson [12] a montré en 1980 que si $\overline{d}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ où $\overline{d}(B) > 0$ et C est un ensemble *fini* de cardinalité aussi grande qu'on veut. Et puis... plus rien jusqu'en 2015, où Di Nasso, Goldbring, Jin, Leth, Lupini et Mahlburg [2] ont montré que la réponse à la question est positive si on suppose que $\overline{d}(A) > 1/2$.

En 2019, Moreira, Richter et Robertson [11] ont montré que la réponse à la question d'Erdős est positive en toute généralité. Ils obtiennent en fait un résultat plus fort, énoncé plus bas.

La démonstration donnée dans [11] est longue et utilise sans modération les ultrafiltres. Très peu de temps après [11], Host [8] a donné une démonstration beaucoup plus courte basée sur des idées “classiques” de dynamique topologique et de théorie ergodique. Dans cet article, je voudrais tenter d'expliquer ces deux preuves.

1.2. **L'énoncé précis.** On a besoin de savoir ce qu'est une *suite de Følner*. Si on veut briller en société, on peut expliquer que les suites de Følner sont des objets très importants car intimement liés à la notion de *moyennabilité* ; voir par exemple [6]. Pour nous, une suite de Følner sera simplement une suite $\mathbf{F} = (F_N)_{N\geq 0}$ de parties finies (non vides) de $\mathbb{N}$ possédant la propriété suivante : pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite translatée $a + \mathbf{F} := (a + F_N)_{N\geq 0}$ est “asymptotiquement proche” de $\mathbf{F}$. De façon précise, en notant $A\Delta B$ la différence symétrique de deux parties de $\mathbb{N}$, on dira que $\mathbf{F} = (F_N)$ est une suite de Følner si, pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|(a + F_N)\Delta F_N|}{|F_N|} \to 0 \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

L'exemple le plus important est le suivant : toute suite d'*intervalles* (F_N) dont la longueur tend vers l'infini est une suite de Følner. C'est évident puisque si F est un intervalle et si $a \in \mathbb{N}$, alors $(a + F)\Delta F$ ne contient que $2a$ points, quelle que soit la longueur de F. Si on ne veut pas s'encombrer l'esprit avec la définition générale, on peut parfaitement considérer qu'une suite de Følner *est* une suite d'intervalles dont la longueur tend vers l'infini. Cela ne nuit en rien à la compréhension de ce qui suit (au contraire, peut-être) ; et c'est d'ailleurs ce que fait Host dans [8].

Une raison pour laquelle les suites de Følner sont intéressantes est qu'elles permettent d'obtenir des *mesures invariantes*. Détaillons un peu. Soit X un espace topologique compact, et soit $T : X \to X$ une application continue. Si on fixe un point $x_0 \in X$ et si on se donne une suite de Følner $\mathbf{F} = (F_N)$, on peut considérer les mesures de probabilités μ_N sur X définies par

$$\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} \delta_{T^n x_0}.$$

Le fait que (F_N) soit une suite de Følner assure que toute valeur d’adhérence de la suite (μ_N) est une mesure invariante par la transformation T, *i.e.* $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Pour le voir, on considère une fonction continue quelconque $f : X \to \mathbb{R}$, et on montre que $\int_X (f \circ T)\, d\mu = \int_X f\, d\mu$ en observant que $\int_X (f \circ T)\, d\mu_N = \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in 1+F_N} f(T^n x_0)$ pour tout $N \geq 0$.

Si $\mathbf{F} = (F_N)$ est une suite de Følner, on définit la “$\mathbf{F}$-densité supérieure” d’un ensemble d’entiers A comme on l’imagine :

$$\overline{d_{\mathbf{F}}}(A) := \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|A \cap F_N|}{|F_N|}.$$

Si la limite supérieure est en fait une vraie limite, on parle de “$\mathbf{F}$-densité” et on écrit $d_{\mathbf{F}}(A)$ au lieu de $\overline{d_{\mathbf{F}}}(A)$.

Le résultat de Moreira, Richter et Robertson s’énonce alors comme suit.

Théorème 1.1. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. S’il existe une suite de Følner $\mathbf{F}$ telle que $\overline{d_{\mathbf{F}}}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis.*

Pourquoi embêter les gens avec des suites de Følner alors que la question initiale était très bien comme elle était ? Une mauvaise réponse est que “ça ne coûte pas plus cher” de démontrer le résultat plus général. Une réponse peut-être meilleure est qu’en fait, il est *plus facile* de démontrer le résultat général que la conjecture initiale, car sa formulation ouvre des perspectives. Si on sait dire des petites choses sur les suites de Følner quelconques, on peut espérer démontrer un résultat difficile en jouant avec ces suites : on peut construire de nouvelles suites de Følner à partir d’une suite donnée (par exemple en translatant), extraire autant de sous-suites qu’on veut (toute sous-suite d’une suite de Følner est évidemment encore une suite de Følner)... et on va voir que cette flexibilité est bien utile. Enfin, il convient d’ajouter que dans [11], Moreira, Richter et Robertson obtiennent une version de la conjecture d’Erdős valable pour n’importe quel groupe G dénombrable et moyennable (ce qui revient à dire qu’il existe au moins une suite de Følner dans G ; voir [6]).

2. Le “socle commun”

La preuve de Moreira-Richter-Robertson et celle de Host sont d’aspects fort différents ; mais elles présentent quand même certaines similitudes.

2.1. **Un critère général.**

On peut faire reposer en partie les deux preuves sur le critère suivant pour contenir un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis. La dépendance est explicite dans [11], où il est dit que le critère doit énormément à [2]. Dans [8], Host dit qu’il pourrait utiliser le critère mais qu’il préfère s’en passer. Pour tout ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ et pour pour tout $r \in \mathbb{N}$, on posera

$$E - r := \{n \in \mathbb{N};\ n + r \in E\}.$$

Critère MRR. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. On suppose qu’il existe une suite de Følner $\mathbf{F}$, un ensemble $L \subseteq \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $d_{\mathbf{F}}\big((A - m) \cap L\big)$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et, pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, il existe une infinité d’entiers $m \in \bigcap_{l \in I}(A - l)$ tels que $d_{\mathbf{F}}\big((A - m) \cap L\big) \geq \varepsilon$. Alors on peut conclure que A contient $B + C$ avec B et C infinis.*

Passée la minute de perplexité devant l’alternance de quantificateurs, la preuve n’est pas si compliquée. L’hypothèse permet de construire une suite strictement croissante d’entiers $(m_i)_{i\geq 1}$ telle que les choses suivantes aient lieu : $d_{\mathbf{F}}\big((A - m_i) \cap L\big) \geq \varepsilon$ pour tout

$i \geq 1$ et, pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, on a $m_i \in \bigcap_{l\in I}(A-l)$ à partir d'un certain rang. On utilise alors un lemme dû à Bergelson [1] : comme $d_{\mathbf{F}}\big((A-m_i)\cap L\big) \geq \varepsilon$ pour tout $i \geq 1$, la suite (m_i) possède une sous-suite (m'_i) telle que $d_{\mathbf{F}}\big((A-m'_1)\cap\cdots\cap(A-m'_r)\cap L\big) > 0$ pour tout $r \geq 1$. En posant $M := \{m'_i;\ i \geq 1\}$, on se trouve ainsi dans la situation suivante : $\bigcap_{l\in I}(A-l)\cap M$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, et $\bigcap_{m\in J}(A-m)\cap L$ est infini pour tout ensemble fini $J \subseteq M$. De là, il n'est pas difficile de construire les ensembles $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ et $C = \{c_0, c_1, \dots\}$: on démarre avec $b_0 \in L$, puis on choisit successivement $c_0 \in (A - b_0) \cap M$; $b_1 > b_0$ tel que $b_1 \in (A - c_0) \cap L$; $c_1 > c_0$ tel que $c_1 \in (A - b_0) \cap (A - b_1) \cap M$; etc.

Même si la preuve du critère MRR n'est pas très difficile, l'énoncé lui même est sans doute assez peu intuitif, et donc facile à oublier. Si on relit la preuve, on constate que les hypothèses sont faites pour assurer, *via* le lemme de Bergelson (qui est utilisé dans [11] comme dans [8]), l'existence de deux ensembles infinis L et M tels que $\bigcap_{l\in I}(A-l)\cap M$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq L$ et $\bigcap_{m\in J}(A-m)\cap L$ est infini pour tout ensemble fini $J \subseteq M$. En ce sens là au moins, le critère est donc “naturel”. On peut aussi observer qu'un cas très particulier du critère, celui où l'ensemble L est égal $\mathbb{N}$, parait raisonnablement intuitif : dans ce cas, le critère dit que si $d_{\mathbf{F}}(A) > 0$ pour une certaine suite de Følner $\mathbf{F}$ et si de plus $\bigcap_{l\in I}(A-l)$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq \mathbb{N}$, alors A contient $B + C$ avec B et C infinis.

2.2. **Un autre point commun.** Il y a un autre élément commun présent en filigrane dans [11] et [8] : c'est ce qu'on appelle la *décomposition de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw* associée à une isométrie agissant sur un espace de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert, et soit $V : H \to H$ une isométrie. Par exemple, on peut penser à la situation suivante : on a un espace de probabilité $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, une application mesurable $T : X \to X$ qui préserve la mesure μ, et V est l'*opérateur de Koopman* $V_T : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ associé à la transformation T,

$$V_T f := f \circ T.$$

La décomposition de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw associé à V est simplement la décomposition orthogonale

$$H = \mathcal{E}_V \oplus \mathcal{E}_V^{\perp},$$

où $\mathcal{E}_V$ est le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs propres de V.

Très bien. Mais pourquoi donner un nom ronflant à une chose aussi simple ? La réponse est que les vecteurs de $\mathcal{E}_V$ et de $\mathcal{E}_V^{\perp}$ peuvent se caractériser de manière non triviale par le comportement de leurs orbites sous l'action de V (voir par exemple [10]).

- Un vecteur x appartient à $\mathcal{E}_V$ si et seulement si x est un *vecteur compact* pour V, ce qui signifie que son orbite sous l'action de V est précompacte.
- Un vecteur y appartient à $\mathcal{E}_V^{\perp}$ si et seulement y est un *vecteur faiblement mélangeant* pour V, ce qui signifie ceci : pour toute suite de Følner $\mathbf{F} = (F_N)$ et pour tout $z \in H$, on a

$$d_{\mathbf{F}}\left(\big\{n \in \mathbb{N};\ |\langle V^n y, z\rangle| \geq \varepsilon\big\}\right) = 0 \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0;$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{1}{|F_N|}\sum_{n\in F_N} |\langle V^n y, z\rangle| \to 0 \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

Avec des notations évidentes, la décomposition de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw peut donc s'écrire

$$H = \mathcal{E}_{\mathrm{comp}} \oplus \mathcal{E}_{\mathrm{wm}}.$$

L'intérêt de cette écriture par rapport à la précédente est qu'elle a cessé d'être hilbertienne. Et de fait, il existe une version très générale de la décomposition de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw, valable pour des semi-groupes d'opérateurs agissant sur un espace de Banach ; voir [10] ou [3].

3. La preuve de Moreira-Richter-Robertson

3.1. **Ultrafiltres.**

Il n'y a pas lieu de s'affoler : on n'aura besoin de savoir que peu de choses sur les ultrafiltres.

3.1.1. *Définitions.* On ne considérera que des filtres de parties de $\mathbb{N}$; un *filtre* sera donc une famille $\mathcal{F}$ de parties non vides de $\mathbb{N}$, co-héréditaire (si $I \in \mathcal{F}$ et $J \supseteq I$, alors $J \in \mathcal{F}$) et stable par intersections finies. Par exemple, $\mathcal{F} := \{\mathbb{N}\}$ est un filtre. Plus intéressant : l'ensemble des parties *cofinies* de $\mathbb{N}$ est un filtre, qu'on appelle habituellement le *filtre de Fréchet.*

Il n'est pas déraisonnable d'interpréter les filtres comme des *quantificateurs de type universel.* N'importe quelle famille $\mathcal{F}$ de parties de $\mathbb{N}$ peut être considérée comme un quantificateur : étant donné une propriété $\mathrm{P}(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$, on peut si on en a envie écrire "$\mathcal{F}n \ : \ \mathrm{P}(n)$" pour signifier que l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{P}(n)$ est vraie appartient à $\mathcal{F}$; ou, de manière plus imagée, que $\mathrm{P}(n)$ est vraie *pour $\mathcal{F}$ - presque tout $n \in \mathbb{N}$*. Appelons *acceptable* tout quantificateur $\mathcal{F}$ qui est "plus fort" que le quantificateur existentiel $\exists$, *i.e.* $\big(\mathcal{F}n \ : \ \mathrm{P}(n)\big) \implies \big(\exists n \ : \ \mathrm{P}(n)\big)$ pour toute propriété P, et compatible avec l'implication logique : si $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{Q}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\big(\mathcal{F}n \ : \ \mathrm{P}(n)\big) \implies \big(\mathcal{F}n \ : \ \mathrm{Q}(n)\big)$. Avec cette terminologie, dire que $\mathcal{F}$ est un filtre signifie que $\mathcal{F}$ est un quantificateur acceptable qui commute avec la conjonction : pour toutes propriétés P et Q, on a l'équivalence

$$\big(\mathcal{F}n \, : \, \mathrm{P}(n) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}n \, : \, \mathrm{Q}(n)\big) \iff \mathcal{F}n \, : \, \big(\mathrm{P}(n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(n)\big).$$

Par exemple, le quantificateur universel $\forall$ correspond au filtre $\mathcal{F} := \{\mathbb{N}\}$; mais le quantificateur existentiel $\exists$ ne correspond pas à un filtre.

Un *ultrafiltre* est un filtre $\mathcal{U}$ qui est maximal pour l'inclusion (le seul filtre contenant $\mathcal{U}$ est $\mathcal{U}$ lui même). La définition n'est pas toujours très manipulable et il vaut parfois mieux utiliser la caractérisation suivante : un filtre $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si, pour tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$, ou bien $I \in \mathcal{U}$ ou bien $\mathbb{N}\backslash I \in \mathcal{U}$. Une autre caractérisation (essentiellement la même) : un ultrafiltre est un quantificateur acceptable $\mathcal{U}$ possédant la propriété magique de commuter à la fois avec la conjonction et avec la disjonction : pour toutes propriétés P et Q relatives aux entiers, on a les deux équivalences

$$\mathcal{U}n \, : \, \Big(\mathrm{P}(n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(n)\Big) \iff \Big(\mathcal{U}n \, : \, \mathrm{P}(n)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\mathcal{U}n \, : \, \mathrm{Q}(n)\Big),$$

$$\mathcal{U}n \, : \, \Big(\mathrm{P}(n) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Q}(n)\Big) \iff \Big(\mathcal{U}n \, : \, \mathrm{P}(n)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\mathcal{U}n \, : \, \mathrm{Q}(n)\Big).$$

Par exemple, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\mathcal{U}_{n_0} := \{I \subseteq \mathbb{N}; \ I \ni n_0\}$ est un ultrafiltre. Un ultrafiltre de cette forme est dit *trivial.* Personne n'a jamais vu un ultrafiltre non-trivial ; mais grâce au Lemme de Zorn, on sait que tout filtre $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre. Les ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet sont précisément les ultrafiltres non-triviaux.

3.1.2. *Convergence.* A tout filtre $\mathcal{F}$ est naturellement associée une notion de convergence pour les suites : on dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vivant dans un espace topologique X *converge le long de* $\mathcal{F}$ vers un point $a \in X$ si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in V\}$ appartient à $\mathcal{F}$; autrement dit $\mathcal{F}n\ :\ a_n \in V$. Quand l'espace X est séparé on a unicité de la limite, et on peut donc écrire $a = \mathcal{F}\text{-}\lim a_n$. Par exemple, la convergence au sens usuel est la convergence le long du filtre de Fréchet. Exemple diamétralement opposé : si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) converge le long de l'ultrafiltre trivial $\mathcal{U}_{n_0}$, avec $\mathcal{U}_{n_0}\text{-}\lim a_n = a_{n_0}$.

Un des grands intérêts des ultrafiltres est qu'ils font converger beaucoup de suites : si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, alors toute suite vivant dans un espace topologique *compact* converge le long de $\mathcal{U}$. C'est essentiellement "évident par définition" : si (a_n) ne converge pas le long de $\mathcal{U}$, on peut recouvrir l'espace X par des ouverts V pour lesquels il n'est pas vrai que $\mathcal{U}n\ :\ a_n \in V$; on extrait alors un sous-recouvrement fini, et la propriété magique de $\mathcal{U}$ mène à une contradiction.

3.1.3. *L'espace des ultrafiltres.* L'ensemble de tous les ultrafiltres se note habituellement $\beta\mathbb{N}$. On munit $\beta\mathbb{N}$ d'une topologie en décrétant que si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, alors une base de voisinage de $\mathcal{U}$ est formée par les ensembles $\beta I := \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N};\ \mathcal{V} \ni I\}$, où I décrit $\mathcal{U}$. Il est facile de vérifier que $\beta\mathbb{N}$ est un espace topologique compact, que l'injection canonique $n \mapsto \mathcal{U}_n$ est un homéomorphisme de $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète sur son image, et que $\mathbb{N}$ est dense dans $\beta\mathbb{N}$; donc $\beta\mathbb{N}$ est un *compactifié* de $\mathbb{N}$. Enfin, le fait que les ultrafiltres fassent converger les suites vivant dans un compact signifie que pour tout espace topologique compact X, toute fonction (nécessairement continue) $f : \mathbb{N} \to X$ peut se prolonger continûment à $\beta\mathbb{N}$ par la formule $f(\mathcal{U}) := \mathcal{U}\text{-}\lim f(n)$. En termes savants, tout cela signifie que $\beta\mathbb{N}$ est le *compactifié de Stone-Čech* de l'espace topologique discret $\mathbb{N}$.

En particulier, toute fonction bornée $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\beta\mathbb{N}$. Donc l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ s'identifie à $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, l'espace des fonctions continues sur $\beta\mathbb{N}$.

Signalons quand même que la topologie de $\beta\mathbb{N}$ est assez bizarre. L'espace $\beta\mathbb{N}$ est compact, mais les seules suites convergentes sont celles qui sont constantes à partir d'un certain rang ; donc $\beta\mathbb{N}$ est fort peu métrisable. Autre bizarrerie : l'adhérence dans $\beta\mathbb{N}$ de tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ est un ouvert fermé ; en fait cette adhérence est, presque par définition, égale à βI. Et encore une autre, assez plaisante : si $I_1, \dots, I_r$ sont des parties de $\mathbb{N}$, alors l'adhérence dans $\beta\mathbb{N}$ de l'intersection des I_k est égale à l'intersection des adhérences.

3.1.4. *Le "Lemme d'intersection de Bergelson".* À titre d'illustration, voyons comment on peut utiliser l'espace $\beta\mathbb{N}$ pour démontrer le lemme de Bergelson dont il a été question dans la preuve du critère MRR. Soit $\mathbf{F}$ une suite de Følner, et soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$ telle que $d_{\mathbf{F}}(A_i)$ existe pour tout i et $d_{\mathbf{F}}(A_i) \geq \varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe une sous-suite (A'_i) de (A_i) telle que $\overline{d_{\mathbf{F}}}\big(A'_1 \cap \cdots \cap A'_r\big) > 0$ pour tout $r \geq 1$. Considérons les mesures de probabilité $\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} \delta_n$. Ce sont des mesures sur $\mathbb{N}$, donc on peut les voir comme des mesures sur $\beta\mathbb{N}$. Comme $\beta\mathbb{N}$ est compact, elles ont au moins une valeur d'adhérence μ, qui est une mesure de probabilité sur $\beta\mathbb{N}$. Pour $i \geq 1$, notons E_i l'adhérence de A_i dans $\beta\mathbb{N}$. Les E_i sont des ouverts fermés de $\beta\mathbb{N}$, et on voit sans mal que $\mu(E_i) = d_{\mathbf{F}}(A_i)$. De plus, pour tout ensemble fini d'indices J, le fait que l'adhérence de $\bigcap_{j\in J} A_j$ dans $\beta\mathbb{N}$ soit égale à $\bigcap_{i\in J} E_j$ entraine que $\overline{d_{\mathbf{F}}}\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \geq \mu\big(\bigcap_{j\in J} E_j\big)$. On voit ainsi qu'on s'est ramené à prouver le lemme suivant : *Soit* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, et soit* $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ensembles mesurables. On suppose que* $\mathbb{P}(E_i)$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $i \to \infty$. *Alors il existe une suite d'entiers strictement croissante* $(j_k)_{k\geq 1}$ *telle que* $\forall k \geq 1\ :\ \mathbb{P}\big(E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_k}\big) > 0$. C'est un bon exercice de théorie de la mesure. Une solution possible : on commence par montrer (par l'absurde) qu'il existe j_1 tel que $\mathbb{P}(E_{j_1}\cap E_i)$ ne tend pas vers 0 quand $i \to \infty$; et on continue.

3.1.5. *Addition.* Maintenant qu'on sait que les fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un espace compact se prolongent continûment à $\beta\mathbb{N}$, on peut s'amuser à additionner les ultrafiltres. Cela se fait en 2 étapes. On définit d'abord $n+\mathcal{U}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}$: la fonction $f(m) := n+m$ est à valeurs dans $\mathbb{N}\subseteq\beta\mathbb{N}$, donc on peut poser

$$n+\mathcal{U} := \mathcal{U}\text{-}\lim\,(n+m).$$

Puis, pour $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{V}+\mathcal{U} := \mathcal{V}\text{-}\lim\,(n+\mathcal{U}).$$

Cela parait simple, et d'une certaine façon ça l'est. Mais il faut quand même se méfier et vérifier qu'on a bien compris le sens de ces jolies notations. La définition de l'ultrafiltre $n+\mathcal{U}$ dit qu'un ensemble $I\subseteq\mathbb{N}$ appartient à $n+\mathcal{U}$ si et seulement si l'ensemble $\{m\in\mathbb{N};\ n+m\in I\}$ appartient à $\mathcal{U}$. De même, dire que $I\in\mathcal{V}+\mathcal{U}$ signifie ceci : l'ensemble des entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers $m\in\mathbb{N}$ pour lesquels $n+m\in I$ appartient à $\mathcal{U}$... appartient à $\mathcal{V}$. Pas si simple, finalement.

C'est sans doute plus clair avec l'interprétation des filtres comme des quantificateurs : pour tout ensemble $I\subseteq\mathbb{N}$,

$$I\in n+\mathcal{U} \iff \mathcal{U}m\ :\ n+m\in I,$$

$$I\in \mathcal{V}+\mathcal{U} \iff \mathcal{V}n\,\mathcal{U}m\ :\ n+m\in I.$$

Comme il n'y a aucune raison de pouvoir intervertir des quantificateurs, cette façon d'écrire les choses rend assez apparent le fait que, n'en déplaise au symbole "+", l'addition de $\beta\mathbb{N}$ est hautement non-commutative.

Une dernière notation : pour tout ensemble $A\subseteq\mathbb{N}$ et pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, on pose

$$A-\mathcal{U} := \{n\in\mathbb{N};\ A-n\in\mathcal{U}\}.$$

Autrement dit :

$$n\in A-\mathcal{U} \iff \mathcal{U}m\ :\ n+m\in A.$$

3.2. **L'objectif à atteindre.** Le lemme suivant fixe le cap dans la preuve de Moreira-Richter-Robertson.

Lemme 3.1. *Soit* $A\subseteq\mathbb{N}$. *On suppose qu'il existe une suite de Følner* $\mathbf{F}$ *et un ultrafiltre non-trivial* $\mathcal{U}$ *tels que* $d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap(A-\mathcal{U})\big)$ *existe pour tout* $m\in\mathbb{N}$ *et*

$$\mathcal{U}\text{-lim } d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap(A-\mathcal{U})\big) > 0.$$

Alors on peut conclure que A *contient* $B+C$ *avec* B *et* C *infinis.*

C'est une conséquence très facile du Critère MRR. Choisissons un nombre ε tel que $0<\varepsilon<\mathcal{U}\text{-lim } d_{\mathbf{F}}\big((A-n)\cap(A-\mathcal{U})\big)$. Alors, si on pose $L := A-\mathcal{U} = \{l\in\mathbb{N};\ A-l\in\mathcal{U}\}$ et si on relit la définition de la limite selon un filtre, on voit que pour tout ensemble fini $I\subseteq L$, l'ensemble $\bigcap_{l\in I}(A-l)\cap\big\{m\in\mathbb{N}\ :\ d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap L\big)\geq\varepsilon\big\}$ appartient à $\mathcal{U}$.

En particulier, tous ces ensembles sont infinis puisque $\mathcal{U}$ est non-trivial ; donc on peut appliquer le Critère MRR.

3.3. **Le détail de la preuve.** Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\overline{d_{\mathbf{F}_0}}(A) > 0$ pour une certaine suite de Følner $\mathbf{F}_0$. Quitte à extraire une sous-suite de $\mathbf{F}_0$, on peut supposer que $d_{\mathbf{F}_0}(A)$ existe. Il s'agit de se mettre en situation d'appliquer le Lemme 3.1.

Il ne va malheureusement pas être possible de donner énormément de détails. Je vais me contenter d'indiquer quelques étapes clés, en remuant beaucoup les mains.

3.3.1. *Une reformulation "fonctionnelle".* Soit $\mathbf{F} = (F_N)$ une suite de Følner. Si $m \in \mathbb{N}$ et si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, alors on a par définition (et pourvu que cela ait un sens) :

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap(A-\mathcal{U})\big) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} \mathbf{1}_A(n+m)\,\mathbf{1}_A(n+\mathcal{U}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} \tau^m \mathbf{1}_A(n)\,\tau^{\mathcal{U}}\mathbf{1}_A(n), \end{aligned}$$

où on a noté τ^m et $\tau^{\mathcal{U}}$ les opérateurs de "translation par m" et de "translation par $\mathcal{U}$" agissant sur $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$.

Ceci incite à poser, pour des fonctions quelconques $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$:

$$\langle f, g\rangle_{\mathbf{F}} := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} f(n)\,\overline{g(n)}.$$

(Évidemment, f et g ne sont pas tout à fait quelconques : il faut que la limite existe.)

Avec cette notation, on a donc

$$d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap(A-\mathcal{U})\big) = \langle \tau^m\mathbf{1}_A, \tau^{\mathcal{U}}\mathbf{1}_A\rangle_{\mathbf{F}}.$$

La notation $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\mathbf{F}}$ est faite pour suggérer un produit scalaire. Il est donc tentant de poser

$$\|f\|_{\mathbf{F}}^2 := \langle f, f\rangle_{\mathbf{F}} := \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n\in F_N} |f(n)|^2$$

pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, et de définir

$$L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F}) := \big\{f;\ \|f\|_{\mathbf{F}} < \infty\big\}.$$

On voit ainsi apparaitre quelque chose qui a envie de ressembler à un espace de Hilbert. Malheureusement, ce n'en est pas tout à fait un : c'est bien un espace vectoriel (qui est grès gros car il contient toute les fonctions bornées), on a bien une inégalité de Cauchy-Schwarz, et même une inégalité de Bessel ; mais la "norme" est juste une semi-norme (par exemple, $\|f\|_{\mathbf{F}} = 0$ dès que f tend vers 0 à l'infini) et l'espace n'est pas complet. Plus perversement, il peut y avoir des fonctions f, g appartenant toutes les deux à $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ pour lesquelles $\langle f, g\rangle_{\mathbf{F}}$ n'est pas défini. *Cependant*, il est possible de démontrer les choses suivantes.

- Si $f, g \in L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, alors il existe une sous-suite $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ telle que $\langle f, g\rangle_{\mathbf{F}'}$ est bien défini.
- Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, alors il existe une sous-suite $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ et une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F}')$ telle que (f_n) converge vers f dans $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F}')$.

En simplifiant à l'extrême, on a donc envie de dire que quitte à extraire des sous-suites de Følner, on peut essentiellement faire comme si $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ était réellement un espace de Hilbert. Les choses sont évidemment un peu plus compliquées. Il vaut en fait mieux se dire que c'est *la famille de tous les espaces* $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, où $\mathbf{F}$ varie dans les sous-suites d'une suite de Følner donnée, qui se comporte dans sa globalité comme une sorte d'espace de Hilbert.

Quoi qu'il en soit, on a un peu avancé : en remplaçant les parties de $\mathbb{N}$ (plus exactement, leurs fonctions indicatrices) par des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ générales, on a grandement élargi l'horizon et on voit l'analyse fonctionnelle pointer le bout de son nez.

Revenons à notre ensemble A tel que $d_{\mathbf{F}_0}(A) > 0$, et écrivons $\mathbf{F}_0 = (F_N)_{N \geq 0}$. Comme

$$d_{\mathbf{F}_0}(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \mathbf{1}_A(n) = \langle 1, \mathbf{1}_A \rangle_{\mathbf{F}_0}$$

et que $d_{\mathbf{F}}\big((A-m) \cap (A-\mathcal{U})\big) = \langle \tau^m \mathbf{1}_A, \tau^{\mathcal{U}} \mathbf{1}_A \rangle_{\mathbf{F}}$ pour toute suite de Følner $\mathbf{F}$ telle que cela ait un sens, on voit maintenant que, pour être en mesure d'appliquer le Lemme 3.1, il suffit de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive et bornée. Si $\langle 1, f \rangle_{\mathbf{F}_0}$ existe et $\langle 1, f \rangle_{\mathbf{F}_0} > 0$, alors il existe une sous-suite $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}_0$ et un ultrafiltre non-trivial $\mathcal{U}$ tels que $\langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}}$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} > 0$.*

C'est donc notre nouvel objectif ; mais on en est encore loin. Pour pouvoir l'atteindre, on va avoir besoin d'utiliser de "bonnes décompositions" pour les fonctions des espaces $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, qui font l'objet de la section suivante.

3.3.2. *Décompositions de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw.* Pour toute suite de Følner $\mathbf{F}$, Il y a une isométrie naturelle qui agit sur $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$: c'est l'opérateur de "translation par 1",

$$\tau f(n) := f(n+1).$$

Comme on se souvient de ce qui a été dit plus haut sur les isométries d'un espace de Hilbert, il est parfaitement légitime de se demander s'il existe quelque chose comme une décomposition de Jacobs - Glicksberg - de Leeuw associée à τ pour l'espace $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$. Moreira, Richter et Robertson réussissent à montrer que c'est effectivement le cas ; mais la situation est plus compliquée que pour les isométries sur les vrais espaces de Hilbert. D'une part, comme en s'en doute, on va devoir extraire des sous-suites de Følner. Et d'autre part, il va y avoir en fait... deux décompositions, qui ne sont pas les mêmes. La raison est que le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ engendré par les fonctions propres de τ – notons le provisoirement $\mathcal{E}_\tau(\mathbf{F})$ – est strictement contenu dans le sous-espace $\mathcal{E}_{\mathrm{comp}}(\mathbf{F})$ constitué par les fonctions "compactes" (qu'on n'a pas encore définies).

Voyons à quoi ressemblent les fonctions de $\mathcal{E}_\tau(\mathbf{F})$. Il est très facile de voir que les fonctions propres de τ sont les fonctions de la forme $f(n) = c\,\lambda^n$, où c est une constante non nulle et $\lambda \in \mathbb{T}$. Donc, une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ appartient à $\mathcal{E}_\tau(\mathbf{F})$ si et seulement si c'est une limite – au sens de $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ – de "polynômes trigonométriques", *i.e.* de fonctions de la forme

$$p(n) = \sum_{\text{finie}} c_k e^{in\theta_k}.$$

Pour cette raison, les fonctions de $\mathcal{E}_\tau(\mathbf{F})$ sont dites $\mathbf{F}$-*presque périodiques au sens de Besicovitch* ; et en suivant [11] à la lettre, on utilisera maintenant la notation $\mathcal{E}_{\rm Bes}(\mathbf{F})$ au lieu de $\mathcal{E}_\tau(\mathbf{F})$.

Un mot également sur les fonctions "compactes" : une fonction $f\in L^2(\mathbb{N},\mathbf{F})$ est dite $\mathbf{F}$-*compacte* si, pour tout $\varepsilon>0$, la τ-orbite de f peut être recouverte par un nombre fini de $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$-boules de rayon ε. Par analogie avec ce qui précède, il est tentant de parler plutôt de fonctions $\mathbf{F}$-*presque périodiques au sens de Bohr*, et d'écrire $\mathcal{E}_{\rm Bohr}(\mathbf{F})$ au lieu de $\mathcal{E}_{\rm comp}(\mathbf{F})$.

il n'est pas trop difficile de voir que toute fonction presque périodique au sens de Besicovitch est presque périodique au sens de Bohr. Mais la réciproque n'est pas vraie ; ce qui fait une grosse différence avec le cas "vraiment hilbertien". Retenons l'inclusion

$$\mathcal{E}_{\rm Bes}(\mathbf{F})\subset\mathcal{E}_{\rm Bohr}(\mathbf{F}).$$

Un mot enfin sur les fonctions "faiblement mélangeantes" : une fonction $f\in L^2(\mathbb{N},\mathbf{F})$ sera dite *faiblement mélangeante le long de* $\mathbf{F}$ si, pour toute fonction bornée $g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ et pour toute sous-suite $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ telle que $\langle\tau^n f,g\rangle_{\mathbf{F}'}$ est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$d_{\mathbf{F}'}\left(\left\{n\in\mathbb{N};\ |\langle\tau^n f,g\rangle_{\mathbf{F}'}|\geq\varepsilon\right\}\right)=0\qquad\text{pour tout }\varepsilon>0;$$

ou, de manière équivalente :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|F'_N|}\sum_{n\in F'_N}|\langle\tau^n f,g\rangle_{\mathbf{F}'}|=0.$$

Un point important : il n'est pas trop difficile de montrer que si $u\in\mathcal{E}_{\rm wm}(\mathbf{F})$ et $v\in\mathcal{E}_{\rm Bohr}(\mathbf{F})$, alors $\langle u,v\rangle_{\mathbf{F}}=0$. Autrement dit,

$$\mathcal{E}_{\rm wm}(\mathbf{F})\perp\mathcal{E}_{\rm Bohr}(\mathbf{F}).$$

Voici maintenant ce que Moreira, Richter et Robertson arrivent à montrer.

Étant donné une suite de Følner $\mathbf{F}$ *et une fonction* $f\in L^2(\mathbb{N},\mathbf{F})$*, il existe une sous-suite* $\mathbf{F}'$ *de* $\mathbf{F}$ *telle que la fonction* f *peut se décomposer à la fois sous la forme*

$$f=f_{\rm Bes}+f_{\rm Bes^\perp}\qquad\textit{où}\quad f_{\rm Bes}\in\mathcal{E}_{\rm Bes}(\mathbf{F}')\ \textit{et}\ f_{\rm Bes^\perp}\in\mathcal{E}_{\rm Bes}(\mathbf{F}')^\perp,$$

et sous la forme

$$f=f_{\rm Bohr}+f_{\rm wm}\qquad\text{où}\quad f_{\rm Bohr}\in\mathcal{E}_{\rm Bohr}(\mathbf{F}')\ \text{et}\ f_{\rm wm}\in\mathcal{E}_{\rm wm}(\mathbf{F}').$$

De plus, si f *est réelle et bornée, alors les fonction intervenant dans ces décompositions le sont aussi.*

Je ne donnerai aucun détail sur la façon d'obtenir cela. Disons simplement que la preuve de la première décomposition est très astucieuse mais d'une certaine façon "élémentaire" ; tandis que pour la 2ème décomposition, on a besoin d'utiliser de la dynamique topologique et de la théorie ergodique.

3.3.3. *La fin de la preuve.* Rappelons notre objectif (Proposition 3.2) : on se donne une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ positive et bornée telle que $\langle 1, f\rangle_{\mathbf{F}_0} > 0$, et il s’agit de voir qu’il existe une sous-suite $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}_0$ et un ultrafiltre non-trivial $\mathcal{U}$ tels que $\langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}}$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} > 0.$$

Commençons par fixer une sous-suite $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_0$ telle que, dans $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F}_1)$, on puisse écrire les deux décompositions

$$f = f_{\text{Bes}} + f_{\text{Bes}^\perp} \qquad \text{et} \qquad f_{\text{Bohr}} + f_{\text{wm}}.$$

Maintenant, soit $\mathbf{F}$ une sous-suite quelconque de $\mathbf{F}_1$, et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre également quelconque. Soit aussi $\varepsilon > 0$ à choisir. Écrivons

$$\begin{aligned}\langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} &= \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} \\ &= \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}}.\end{aligned}$$

Comme les fonctions f_{Bohr} et f_{Bes} sont “presque périodiques”, on peut raisonnablement espérer que si $\mathbf{F}$ est bien choisie et si l’ultrafiltre $\mathcal{U}$ n’y met pas de mauvaise volonté, alors $\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}}$ est quasiment égale à f_{Bes} du point de vue de l’espace $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, disons $\|\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}} - f_{\text{Bes}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$; et de même $\|\tau^m f_{\text{Bohr}} - f_{\text{Bohr}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, au moins pour $\mathcal{U}$-presque tout $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l’inégalité de Cauchy-Schwarz et en supposant que $\|f\|_{\mathbf{F}} = 1$ (ce qui entraine que $f_{\text{Bes}}, f_{\text{Bes}^\perp}, f_{\text{Bohr}}, f_{\text{wm}}$ sont toutes de norme au plus 1 par Pythagore), on en déduit

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} \geq \mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} + \langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}} - 3\varepsilon.$$

De plus, comme la fonction f_{wm} est faiblement mélangeante, on sait que pour tout $\delta > 0$, l’ensemble $I_\delta := \{m \in \mathbb{N};\ |\langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}}| \geq \delta\}$ a une $\mathbf{F}$-densité égale à 0. Si on suppose que $\mathbf{F}$ et $\mathcal{U}$ sont tels que $\overline{d_{\mathbf{F}}}(I) > 0$ pour tout $I \in \mathcal{U}$, les ensembles I_δ n’appartiennent alors pas à $\mathcal{U}$, et donc $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} = 0$. On obtient ainsi

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} \geq \langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}} - 3\varepsilon.$$

Maintenant, on se souvient que f_{Bohr} est la “projection orthogonale” de f sur $\mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F})$ et que f_{Bes} est la “projection orthogonale” de f sur le sous-espace $\mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F})$, qui est contenu dans $\mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F})$. On a donc $\langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} = \|f_{\text{Bes}}\|^2_{\mathbf{F}}$. Par Cauchy-Schwarz, on en déduit $\langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} \geq \langle \mathbf{1}, f_{\text{Bes}}\rangle^2_{\mathbf{F}}$. Comme $\langle \mathbf{1}, f_{\text{Bes}}\rangle_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{1}, f\rangle_{\mathbf{F}}$ puisque f_{Bes} est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F})$ et que $\mathbf{1} \in \mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F})$, on a donc

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} \geq \langle \mathbf{1}, f\rangle^2_{\mathbf{F}} + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}} - 3\varepsilon.$$

Supposons enfin qu’en plus des hypothèses précédentes, l’ultrafiltre $\mathcal{U}$ ait le bon goût d’être tel que $\langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}} \geq 0$. Alors, comme $\langle \mathbf{1}, f\rangle_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{1}, f\rangle_{\mathbf{F_0}} > 0$, on voit qu’il suffit de choisir ε assez petit au départ pour conclure que $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f\rangle_{\mathbf{F}} > 0$.

En résumé, j’espère avoir à peu près justifié que la preuve sera définitivement terminée si, étant donné $\varepsilon > 0$, on est capable de montrer qu’il existe une sous-suite $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}_1$ et un ultrafiltre non-trivial $\mathcal{U}$ tels que les choses suivantes aient lieu :

- $\overline{d_{\mathbf{F}}}(I) > 0$ pour tout $I \in \mathcal{U}$;
- $\|\tau^m f_{\text{Bohr}} - f_{\text{Bohr}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$ pour $\mathcal{U}$-presque tout $m \in \mathbb{N}$;
- $\|\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}} - f_{\text{Bes}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$;
- $\langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp}\rangle_{\mathbf{F}} \geq 0$.

C'est en réalité la partie la plus délicate de la preuve, et je serais bien incapable de l'expliquer en quelques lignes. Je me contenterai donc de dire que... c'est possible, en se fatiguant beaucoup et en faisant usage d'une artillerie topologico-ergodique assez lourde.

Juste un mot concernant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$: on ne va pas le sortir du chapeau. Ce qu'on montre en fait est qu'il existe une sous-suite $\mathbf{F} = (F_N)$ de $\mathbf{F}_1$ telle que l'ensemble $\mathfrak{G}$ constitué par tous les ultrafiltres $\mathcal{U}$ satisfaisant aux 4 conditions ci-dessus est "gros" au sens suivant : on a $\mu(\mathfrak{G}) > 0$ pour toute mesure de probabilité μ sur $\beta\mathbb{N}$ qui est un point d'accumulation des mesures $\mu_N := \frac{1}{|F_N|}\sum_{n\in F_N}\delta_n$. Difficile de ne pas être sensible à la poésie d'un tel énoncé !

4. La preuve de Host

Comme indiqué dans l'introduction, la preuve de Host est sur le papier beaucoup plus courte que celle de Moreira, Richter et Robertson. Cependant, elle suppose une certaine familiarité avec la théorie ergodique. Je présente donc par avance mes excuses à celles et ceux qui trouveraient – à juste titre – que dans cette partie, les choses vont parfois un peu vite.

4.1. Systèmes dynamiques.

On va considérer des systèmes dynamiques *topologiques* (en abrégé : `sdt`) et des systèmes dynamiques *mesurés* (`sdm`). Un `sdt` sera la donnée d'un espace topologique X compact métrisable et d'une application continue $T : X \to X$. Un `sdm` sera la donnée d'un espace de probabilité $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ et d'une application mesurable $T : X \to X$ qui préserve la mesure μ. Un `sdtm` est ce qu'on imagine.

Étant donné $T : X \to X$, un point $x \in X$ et un ensemble $W \subseteq X$, on notera $\mathcal{N}_T(x, W)$ l'ensemble des temps de visite de la T-orbite de x à l'ensemble W :

$$\mathcal{N}_T(x, W) := \{n \in \mathbb{N};\ T^n x \in W\}.$$

Une remarque importante (et évidente) est que si $\mathbf{F} = (F_N)$ est une suite de Følner, alors

$$\overline{d_{\mathbf{F}}}\big(\mathcal{N}_T(x, W)\big) = \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{|F_N|}\sum_{n\in F_N} \mathbf{1}_W(T^n x).$$

Autrement dit : s'intéresser à la densité d'un ensemble d'entiers de la forme $\mathcal{N}_T(x, W)$, c'est la même chose que regarder les moyennes ergodiques partant de x pour la fonction $f = \mathbf{1}_W$. Ceci est particulièrement intéressant, car il se trouve que *n'importe quel* ensemble d'entiers A peut s'écrire sous la forme $A = \mathcal{N}_T(x, W)$: c'est le point de départ de l'approche "dynamique" initiée par Furstenberg pour traiter certaines questions de combinatoire des entiers. Voir le début de la section 4.4 pour plus de détails.

4.2. Points génériques.

Pour la preuve du résultat qui nous intéresse, un rôle essentiel va être joué par la notion de *point générique*.

Soit (X, T) un `sdt`. Étant donné une mesure μ sur X (le mot "mesure" sera toujours synonyme de "mesure de probabilité borélienne") et une suite de Følner $\mathbf{F} = (F_N)$, on dit qu'un point $x_0 \in X$ est (T, μ)-*générique le long de* $\mathbf{F}$ si, pour toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, les "$\mathbf{F}$-moyennes ergodiques" pour f définies à partir du point x_0 tendent vers l'intégrale de f :

$$\frac{1}{|F_N|}\sum_{n\in F_N} f(T^n x_0) \to \int_X f\, d\mu \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

Par exemple, si $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ est un `sdtm` *ergodique* (*i.e.* si les ensembles T-invariants sont tous de mesure 0 ou 1), alors presque tout point $x_0 \in X$ est (T, μ)-générique le long de la suite de Følner “canonique” $(\llbracket 0, N \rrbracket)$: cela découle du Théorème ergodique ponctuel et de la séparabilité de l’espace de fonctions continues $\mathcal{C}(X)$. Donnons un peu plus de détails. Le Théorème ergodique dit que si $f \in L^1(\mu)$, alors $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f(T^n x) \to \int_X f\,d\mu$ pour presque tout $x \in X$. Le “presque tout” dépend évidemment de f ; mais si on se donne une famille *dénombrable* $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$, la convergence des moyennes ergodiques a lieu sur un ensemble de probabilité 1 indépendant de $f \in \mathcal{F}$. En appliquant cela à une suite (f_k) dense dans $\mathcal{C}(X)$, on en déduit facilement la conclusion annoncée.

On aura besoin des faits suivants concernant les points génériques.

- *Si x_0 est (T, μ)-générique le long d’une certaine $\mathbf{F}$, alors la mesure μ est T-invariante et le support topologique de μ est contenu dans l’adhérence de la T-orbite de x_0.*
- *Si x_0 est (T, μ)-générique le long de $\mathbf{F}$, alors $\overline{d_{\mathbf{F}}}\big(\mathcal{N}_T(x_0, W)\big) \geq \mu(W)$ pour tout ouvert $W \subseteq X$; et $d_{\mathbf{F}}\big(\mathcal{N}(x_0, W)\big) = \mu(W)$ si W est ouvert fermé.*
- *Pour tout point $x_0 \in X$ et pour toute suite de Følner $\mathbf{F}$, il existe une mesure μ et une sous-suite $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ telles que x_0 est (T, μ)-générique le long de $\mathbf{F}'$.*
- *Si $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ est un* `sdtm` *ergodique, alors toute suite de Følner $\mathbf{F}$ possède une sous-suite $\mathbf{F}'$ le long de laquelle μ-presque tout point $x \in X$ est (T, μ)-générique.*

Le 1er point est facile à vérifier. Le 2ème point est évident si W est ouvert fermé puisque la fonction $f := \mathbf{1}_W$ est alors continue ; et pour un ouvert W quelconque, il faut utiliser le fait que $\mathbf{1}_W$ est semi-continue supérieurement, donc limite simple d’une suite croissante de fonctions continues. Pour le 3ème point, il suffit de prendre pour μ une valeur d’adhérence de la suite $\mu_N := \frac{1}{|F_N|}\sum_{n \in F_N} \delta_{T^n x_0}$. Pour le 4ème point, utiliser le Théorème ergodique en moyenne (convergence L^2 des moyennes ergodiques, valable pour n’importe quelle suite de Følner), le fait que toute suite convergeant en norme L^2 possède une sous-suite qui converge presque partout, et la séparabilité de $\mathcal{C}(X)$.

4.3. **L’objectif à atteindre.** Le lemme suivant joue dans l’approche de [8] le rôle que joue le Lemme 3.1 dans l’approche de [11] : il fixe le cap.

Lemme 4.1. *Soit (X, T) un système dynamique topologique, soit $x_0 \in X$, et soit W un ouvert fermé de X. On suppose qu’il existe $x_1 \in X$, une mesure ν sur $X \times X$, une suite de Følner $\mathbf{F}$, une suite strictement croissante d’entiers (m_i) et $\varepsilon > 0$ tels que*

- *(x_0, x_1) est $(T \times T, \nu)$-générique le long de $\mathbf{F}$;*
- *$T^{m_i} x_0 \to x_1$ quand $i \to \infty$;*
- *$\nu\big(T^{-m_i}(W) \times W\big) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Alors l’ensemble $A := \mathcal{N}_T(x_0, W)$ contient $B + C$ avec B et C infinis.

Une preuve possible consiste à appliquer le Critère MRR avec $L := \mathcal{N}_T(x_1, W)$.

Si $m \in \mathbb{N}$, on voit sans peine que

$$(A - m) \cap L = \mathcal{N}_{T \times T}\Big((x_0, x_1), T^{-m}(W) \times W\Big).$$

Comme (x_0, x_1) est $(T\times T, \nu)$ - générique le long de $\mathbf{F}$ et que W est ouvert fermé, on en déduit que $d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap L\big)$ existe pour tout $m\in\mathbb{N}$ et est égale à $\nu\,(T^{-m}(W)\times W)$. En particulier, on a $d_{\mathbf{F}}\big((A-m_i)\cap L\big)\geq\varepsilon$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.

Par ailleurs, comme $T^{m_i}x_0$ tend vers x_1 et que W est ouvert, il est assez clair que si $l\in L$, alors $l+m_i\in A$ pour tous les m_i sauf un nombre fini.

On voit ainsi que pour tout ensemble fini $I\subseteq L$, il existe une infinité d'entiers $m\in\bigcap_{l\in I}(A-l)$ tels que $d_{\mathbf{F}}\big((A-m)\cap L\big)\geq\varepsilon$, à savoir tous les m_i à partir d'un certain rang. Donc on peut en effet appliquer le Critère MRR.

4.4. **Le détail de la preuve.** Soit $A\subseteq\mathbb{N}$ tel que $\overline{d_{\mathbf{F}_0}}(A)>0$ pour une certaine suite de Følner $\mathbf{F}_0$. Quitte à extraire une sous-suite de $\mathbf{F}_0$, on peut supposer que $d_{\mathbf{F}_0}(A)$ existe. Il s'agit de se mettre en situation d'appliquer le Lemme 4.1.

Pour cela on commence par construire un `sdt` (X,T), un ouvert fermé $W\subseteq X$, un point x_0, une mesure μ sur X et une suite de Følner $\mathbf{F}$ tels que

(i) $A=\mathcal{N}_T(x_0,W)$;

(ii) $\mu(W)>0$;

(iii) $\big(X,\mathfrak{B}_X,\mu,T\big)$ est un `sdm` ergodique ;

(iv) x_0 est (T,μ)-générique le long de $\mathbf{F}$;

Le démarrage est parfaitement classique. Soit $\Delta:=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 et de 1, qui est un très bel espace compact métrisable quand on le munit de la topologie produit ; et soit $B:\Delta\to\Delta$ l'application de décalage vers la gauche :

$$B\big(z(0),z(1),z(2),\dots\big):=\big(z(1),z(2),z(3),\dots\big).$$

Posons $x_0:=\mathbf{1}_A\in\Delta$ et $W_0:=\{z\in\Delta;\ z(0)=1\}$. Alors W_0 est ouvert fermé dans Δ, et on a tout fait pour s'assurer que $A=\mathcal{N}_B(x_0,W_0)$. On préfère cependant avoir un espace dans lequel l'orbite de x_0 est dense. Donc on pose $X:=\overline{\{B^kx_0;\ k\in\mathbb{N}\}}$, $T:=B_{|X}$ et $W:=W_0\cap X$. Alors W est ouvert fermé dans X et (i) est vérifiée.

Soient $\mathbf{F}_0'$ une sous-suite de $\mathbf{F}_0$ et μ_0 une mesure sur X telles que x_0 est (T,μ_0)-générique le long de $\mathbf{F}_0'$. La mesure μ_0 est invariante par T ; et comme W est ouvert fermé, on a $\mu_0(W)=d_{\mathbf{F}_0'}(A)=d_{\mathbf{F}_0}(A)>0$. Donc (ii) et (iv) sont vérifiées.

Maintenant, on applique le *Théorème de décomposition ergodique*, qui dit que la mesure invariante μ_0 peut s'écrire comme une intégrale de mesures ergodiques : il existe un espace de probabilité $(S,\mathfrak{T},\nu)$ et une application mesurable $S\ni s\mapsto\mu_s$, où μ_s est une mesure de probabilité sur X ergodique pour la transformation T, tels que $\mu=\int_S\mu_s\,d\nu(s)$ (voir par exemple [4]). Comme $\mu_0(W)=\int_S\mu_s(W)\,d\nu(s)>0$, il existe ainsi une mesure $\mu=\mu_s$ telle que $\big(X,\mathfrak{B}_X,\mu,T\big)$ est un `sdm` ergodique et $\mu(W)>0$. Alors (ii) est toujours vérifiée, et on a fait ce qu'il fallait pour avoir (iii) ; mais comme on a changé de mesure, il n'y a plus de raison que x_0 soit (T,μ) - générique le long de $\mathbf{F}_0'$: on a perdu (iv).

Cependant, comme $\big(X,\mathfrak{B}_X,\mu,T\big)$ est ergodique et que $\mu(W)>0$, on peut trouver un point $x\in W$ qui est (T,μ) - générique le long de la suite de Følner canonique $\big([\![0,N]\!]\big)$. Comme de plus $X=\overline{\{T^kx_0;\ k\in\mathbb{N}\}}$, on peut trouver une suite d'entiers (k_N) telle que pour tout $N\geq0$, les points $T^{k_N}x_0,T^{k_N+1}x_0,\dots,T^{k_N+N}x_0$ soient très proches des points $x,Tx,\dots,T^Nx$, disons "proches à 2^{-N} près". Alors, pour toute fonction (uniformément) continue $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\Big|f(T^{k_N+n}x_0) - f(T^n x)\Big| \to 0 \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

Donc, x_0 est (T,μ)-générique le long de la suite de Følner $\mathbf{F} := \big([\![k_N, k_N+N]\!]\big)$: on a retrouvé (iv).

Soit x_1 un point quelconque de X. Quitte à extraire une sous-suite de la suite de Følner $\mathbf{F}$ (ce qui ne fait pas perdre (iv)), on peut supposer qu'il existe une mesure ν sur $X \times X$ telle que

(v) (x_0, x_1) est $(T \times T, \nu)$-générique le long de $\mathbf{F}$.

Par le Lemme 4.1, il ne reste plus maintenant qu'une dernière chose à faire : montrer que si on choisit bien le point x_1, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(m_i) \to \infty$ tels que $T^{m_i}x_0 \to x_1$ et $\nu\big(T^{-m_i}(W) \times W\big) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. C'est la partie délicate de la preuve, pour laquelle il ne va pas être possible de donner tous les détails.

Imaginons cependant que par un hasard invraisemblable, X soit un *groupe abélien compact*, que T soit une translation de X, et que μ soit la mesure de Haar de X. On va voir que dans ce cas, n'importe quel point x_1 convient.

Comme l'adhérence de la $(T \times T)$-orbite de (x_0, x_1) contient le support topologique de la mesure ν et que T est une translation, on voit que ν est portée par l'ensemble $\{(x,x') \in X \times X;\ x' - x = x_1 - x_0\}$; autrement dit : on a $x' = x + x_1 - x_0$ pour ν-presque tout $(x,x') \in X \times X$. Comme de plus l'image de ν par la 1ère application coordonnée $p : X \times X \to X$ est la mesure μ (par (iv) et (v)), on en déduit sans mal la chose suivante : pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\nu\big(T^{-m}(W) \times W\big) = \int_X \mathbf{1}_W(T^m x)\mathbf{1}_W(x + x_1 - x_0)\, d\mu(x).$$

En utilisant l'invariance de μ par translations et le fait que T est une translation, cela s'écrit encore

$$\nu\big(T^{-m}(W) \times W\big) = \int_X \mathbf{1}_W(x + T^m x_0)\mathbf{1}_W(x + x_1)\, d\mu(x).$$

Si $T^m x_0$ était égal à x_1, le second membre serait égal à $\mu(W)$ puisque μ est invariante par translations. Par continuité des translations sur $L^2(X,\mu)$, on en déduit que

$$\nu\big(T^{-m}(W) \times W\big) \geq \varepsilon := \mu(W)/2 \qquad \text{dès que } T^m x_0 \text{ est assez proche de } x_1.$$

On est maintenant presque au bout du chemin. Comme μ est la mesure de Haar de X, son support topologique est égal à X tout entier. Donc,

(vi) le point x_1 appartient au support de μ.

On a ainsi $\mu(V) > 0$ pour tout voisinage V de x_1 ; et comme x_0 est (T,μ)-générique le long de $\mathbf{F}$, on en déduit que

$$d_{\mathbf{F}}\big(\mathcal{N}_T(x_0, V)\big) > 0 \qquad \text{pour tout voisinage ouvert } V \text{ de } x_1.$$

De là, il est très facile de construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers (m_i) telle que $T^{m_i}x_0 \to x_1$. On aura alors "gratuitement" $\nu\big(T^{-m_i}(W) \times W\big) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, puisqu'évidemment $T^{m_i}x_0$ sera suffisamment proche de x_1.

Malheureusement, la vie n'est pas aussi facile : il n'y a pas de raison que X soit un groupe, que T soit une translation et que μ soit la mesure de Haar de X.

Cependant, on peut contourner cette difficulté en utilisant ce qu'on appelle le *facteur de Kronecker* du `sdm` (X, μ, T). Sans entrer dans les détails (pour lesquels on peut par exemple consulter [4]), disons que ce facteur de Kronecker est un `sdm` de la forme (G, m_G, R) où G est un groupe abélien compact, m_G est la mesure de Haar de G et R est une translation. C'est effectivement un facteur de (X, μ, T) au sens habituel : il existe une application mesurable $\pi : X \to G$ qui envoie μ sur m_G – on appelle cela un homomorphisme d'espaces mesurés – et qui entrelace T et R, *i.e.* $R \circ \pi = \pi \circ T$. Sa propriété essentielle est que l'homomorphisme $\pi : (X, \mu, T) \to (G, m_G, R)$ "encode" toutes les fonctions propres de la transformation T : le sous-espace fermé de $L^2(X, \mu)$ engendré par les fonctions propres de T est exactement le sous-espace $\mathcal{E}_\pi$ constitué par les fonctions π-mesurables. En mélangeant cela avec la décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw de l'opérateur de Koopman $V_T : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$, on en déduit la chose suivante : si $f \in L^2(X, \mu)$ et si on note $\mathbb{E}_\pi f$ la projection orthogonale de f sur $\mathcal{E}_\pi$ (autrement dit, l'espérance conditionnelle de f relativement à la tribu engendrée par π) alors, pour toute $g \in L^2(X, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite de Følner $\mathbf{F}$, on a

$$d_{\mathbf{F}}\left(\big\{n \in \mathbb{N};\ |\langle f \circ T^n, g\rangle - \langle (\mathbb{E}_\pi f) \circ T^n, g\rangle| \geq \varepsilon\big\}\right) = 0.$$

En forçant un peu le trait, cela signifie que du point de vue des suites de Følner, tout se passe essentiellement comme si toute fonction $f \in L^2(X, \mu)$ était π-mesurable, *i.e.* de la forme $f = u \circ \pi$ où $u \in L^2(G, m_G)$.

Sachant cela, on conçoit qu'en "descendant" dans le facteur de Kronecker (G, m_G, R) *via* l'homomorphisme π, on puisse espérer parvenir à reproduire dans le cas général le raisonnement fait dans le cas d'un groupe. C'est un peu technique, mais on y arrive. Le point x_1 ne peut cependant pas être quelconque : on a besoin de supposer que

(vii) x_1 est (T, μ)-générique le long de $\mathbf{F}$.

Si on est prêt à admettre que les choses se passent aussi bien que possible, on obtient ceci : il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble $M \subseteq \mathbb{N}$ tels que $d_{\mathbf{F}}(M) = 1$ et $\nu\big(T^{-m}(W) \times W\big) \geq \varepsilon$ pour tout $m \in M$ tel que $T^m x_0$ est assez proche de x_1. On peut alors conclure comme plus haut en construisant la suite (m_i) un peu plus soigneusement, *i.e.* en faisant attention à prendre les m_i dans le gros ensemble M.

En résumé : pour en avoir *vraiment* terminé, il suffit maintenant de montrer qu'on peut trouver un point $x_1 \in X$ vérifiant les conditions (vi) et (vii). Pour cela, on se souvient que toute suite de Følner possède une sous-suite le long de laquelle μ-presque tout point $x \in X$ est (T, μ)-générique. Donc, quitte à extraire une sous-suite de $\mathbf{F}$, on peut supposer que μ-presque tout point $x \in X$ est (T, μ)-générique le long de $\mathbf{F}$; et il est alors évident qu'on peut trouver le point x_1.

5. Et ensuite ?

Maintenant qu'on sait que la réponse à la question d'Erdős est positive, il est naturel de se demander si on ne peut pas aller plus loin. Par exemple, est-il vrai que si A est un ensemble d'entiers de densité strictement positive, alors A contient la somme de 3 ensembles infinis, voire la somme d'une nombre fini quelconque d'ensembles infinis ?

On n'en sait rien.

Une stratégie *a priori* raisonnable serait d’essayer de montrer que si $\overline{d}\,(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B+A'$ avec B infini et $\overline{d}\,(A') > 0$. Malheureusement, cela ne peut pas marcher : Host montre dans [8] qu’il existe un ensemble A pour lequel on ne pourra jamais faire ça. L’exemple n’est même pas compliqué : on part d’un `sdt` (X,T) possédant une seule mesure invariante μ et tel que le `sdm` (X,μ,T) soit *mélangeant* (ça existe), on choisit un ouvert $W \subseteq X$ tel que $\mu(W) > 0$ et $\mu(\overline{W}) < 1$, et on pose $A := \mathcal{N}_T(x_0,W)$ pour n’importe quel point $x_0 \in X$.

Dans une toute autre direction, si on a en tête le Théorème de Green-Tao, il est très naturel de se demander si la conjecture dErdős est vraie “dans les nombres premiers” ; autrement dit, si tout ensemble de densité positive relativement à l’ensemble des nombres premiers contient la somme de deux ensembles infinis.

En conclusion : il reste encore des choses à faire...

Références

[1] V. Bergelson, *Sets of recurrence of* $\mathbb{Z}^m$ *- actions and properties of sets of differences in* $\mathbb{Z}^m$. J. London Math. Soc. **31** (1985), 295–304.

[2] M. Di Nasso, I. Goldbring, R. Jin, S. Leth, M. Lupini et K. Mahlburg, *On a sumset conjecture of Erdős.* Canad. J. Math. **67** (2015), 790–809.

[3] T. Eisner, *Stability of operators and operator semigroups.* Operator Theory Advances and Applications **209**, Birkhäuser (2010).

[4] M. Einsiedler et T. Ward, *Ergodic theory.* Graduate Texts in Mathematics **259**, Springer (2011).

[5] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* M. B. Porter Lectures, Princeton University Press (1981).

[6] F. P. Grenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications.* Mathematical Studies **16**, Van Nostrand (1969).

[7] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$. J. Combin. Theory **17** (1974), 1–11.

[8] B. Host, *A short proof of a conjecture of Erdős proved by Moreira, Richter and Robertson.* Discrete Analysis, paper 19 (2019).

[9] A. Y. Khinchin, *Three pearls of number theory.* Dover (1952).

[10] U. Krengel, *Ergodic theorems.* Studies in Mathematics **6**, De Gruyter (1985).

[11] J. Moreira, F. Richter et D. Robertson, *A proof of a sumset conjecture of Erdős.* Ann. Math. **89** (2019), 605–652.

[12] M. B. Nathanson, *Sumsets contained in infinite sets of integers.* J. Combin. Theory **28** (1980), 150–155.

[13] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Acta Arithmetica (1975), 199–245.

[14] S. Todorcevic, *Topics in topology.* Lecture Notes in Mathematics **1652**, Springer (1997).

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d’Artois, rue Jean Souvraz S. P. 18, 62307 Lens (France).

E-mail address: `etienne.matheron@univ-artois.fr`