Variable complexe

Examen du 5 Mai 2023

Durée : 3h

Cet examen est constitué uniquement de “questions de cours”

(1) On note Δ le laplacien. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\Delta|f|^2 = 4|f'|^2$.

(2) Déterminer les rayons de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^n$ et $\sum \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\sqrt{n^2+5}} z^n$.

(3) On note log la détermination principale du logarithme. Montrer que la fonction log n'est pas continue sur $\mathbb{C}^*$.

(4) Montrer que si $z = x+iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), alors $|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2+\mathrm{sh}(y)^2$.

(5) Résoudre l'équation $\cos(z) = 3$.

(6) Démontrer la formule de Green-Riemann pour un rectangle.

(7) Soit K le triangle de sommets $1 - i$, $4 + 3i$, $-2 + 3i$. Calculer l'intégrale $I := \int_{\partial K} \bar{z}\, dz$.

(8) Montrer que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $0 \leqslant y \leqslant 1$, on a $|e^{-z^4}| \leqslant e^{-x^4+6x^2}$; puis montrer à l'aide du théorème de Cauchy que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^4} dx$.

(9) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

(10) Soit f une fonction entière. On suppose qu'on a $f(0) = 0$ et $|f(z)-\sin(z)| \leqslant 44$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > 66$. Montrer que $f(z) = \sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(11) Soit φ la fonction définie par $\varphi(z) := \frac{6z-5i}{6+5iz}\cdot$ Calculer $|\varphi(\xi)|$ lorsque $|\xi| = 1$, et en déduire que si $|z| < 1$, alors $|\varphi(z)| < 1$.

(12) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z) := \frac{1}{(z-2)(z-3)(z-4)}$ dans la couronne $\{1 < |z - 2| < 2\}$.

(13) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Montrer que si $f(z) = o(1/|z|)$ quand $z \to 0$, alors f peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(14) Soit $a > 1$. Calculer l'intégrale $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$ en posant $z := e^{it}$ et en appliquant le théorème des résidus.

(15) Calculer l'intégrale $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}\cdot$

(16) Déterminer le nombre de zéros de $P(z) := z^5 - 7z^4 + 2z^3 + 9z^2 - z + 21$ dans la couronne $\{1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

(17) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω et ne prenant que des valeurs réelles ou imaginaires pures, alors f est constante.

(18) Montrer que la formule $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$.

(19) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. Montrer que la formule

$$f(z) := \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{tz} dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

(20) Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_0^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$. Montrer que le produit infini $\prod |1 + i\alpha_n|$ est convergent.