Variable complexe

Examen du 22 Juin 2023
Durée : 3h

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

(1) Justifier l'existence de I.

(2) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) := \alpha e^{it}$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) := \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors

$$\int_{\gamma_R} g(z)\, dz - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\, dz = 4 \int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,.$$

(3) En déduire la valeur de I.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

(1) On suppose que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ est bien définie et *bornée* sur Ω.

(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est non-constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité $D(0, 1)$. Pour $a \in \mathbb{D}$ et pour tout $z \neq 1/\overline{a}$, on pose

$$\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

(1) Soit $a \in \mathbb{D}$. Calculer $|\varphi_a(\zeta)|$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, et en déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(2) Soit $a \in \mathbb{D}$. Montrer que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \overline{a}z|^2}\,,$$

et en déduire à nouveau qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(3) Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

(4) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(a) Soit $v \in \mathbb{D}$. Calculer $\varphi_{f(v)} \circ f \circ \varphi_v(0)$, et en déduire que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|\varphi_{f(v)} \circ f \circ \varphi_v(z)| \leqslant |z|$.

(b) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{D}$, on a

$$\left| \frac{f(v) - f(u)}{1 - \overline{f(v)} f(u)} \right| \leqslant \left| \frac{v - u}{1 - \overline{v} u} \right|.$$

Exercice 4. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1 - n < \alpha < 1$. En considérant les domaine élémentaires $K_{\varepsilon,R} := \left\{ re^{i\theta};\ \varepsilon \leqslant r \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n} \right\}$, où $0 < \varepsilon < 1 < R$, calculer l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (1 + x^n)}.$$

Exercice 5. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ existe, au sens où $\int_0^X f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $X \to \infty$. On ne suppose *pas* que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose

$$\Omega := \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}\,.$$

(1) Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) := \int_x^\infty f(t)dt$. Quelle est la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$?

(2) En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que : pour tous A, B tels que $0 < A < B$ et pour tout $s \in \Omega$, on a

$$\left| \int_A^B f(t) e^{-st} dt \right| \leqslant |F(B)| + |F(A)| + M\, \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\, e^{-\mathrm{Re(s)}A}.$$

(3) Déduire de (2) que pour tout $s \in \Omega$, l'intégrale $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ existe. Dans la suite, on posera

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

(4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \Omega \to \mathbb{C}$ par $L_n(s) := \int_0^n f(t)e^{-st}dt$. Montrer que L_n est holomorphe sur Ω.

(5) En utilisant (2), majorer $|L_n(s) - \mathcal{L}f(s)|$ pour $s \in \Omega$.

(6) Montrer que la fonction $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur Ω.