Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 12 Mai 2011

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Décomposer $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z+4)}$ en éléments simples, puis déterminer le développement de Laurent de f dans la couronne $\{1 < |z-2| < 6\}$.

(2) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec $g \neq 0$.

(a) Sur quel ouvert est-on certain que la fonction f/g est bien définie et holomorphe?

(b) On suppose qu'il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ telle que $|f(z)| \leq \alpha(z)\,|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f/g se prolonge en une fonction entière.

(c) On suppose qu'on a $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante C telle que $f = C\,g$.

(3) On veut calculer les intégrales

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}.$$

(a) Justifier l'existence de I et J.

(b) On pose

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}\,(1+z^2)}\,,$$

où $\log z$ et $\sqrt{z} = z^{1/2}$ sont calculés en prenant l'argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

(i) Quel est le plus grand ouvert sur lequel f est holomorphe?

(ii) Calculer $f(-x)$ pour $x > 0$.

(iii) Déterminer les pôles de f et calculer les résidus correspondants.

(c) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ et } \varepsilon \leq |z| \leq R\}\,.$$

(d) Établir l'identité

$$(1-i)I + \pi\,J = i\,\frac{\pi^2}{2}\,e^{-i\pi/4}\,.$$

(e) Calculer les intégrales I et J.

(4) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $z^5-z^4+2z^3+3z^2+18z-10=0$ dans la couronne $\{1<|z|<3\}$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $f:[0,\infty[\to\mathbb{C}$ est une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ existe, au sens où $\int_0^X f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $X\to\infty$. **On ne suppose pas** que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose

$$\Omega=\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s)>0\}\,.$$

(1) Pour $x\geq 0$, on pose $F(x)=\int_x^\infty f(t)dt$.
  (a) Quelle est la limite de $F(x)$ quand $x\to+\infty$?
  (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tous A,B tels que $0<A<B$ et pour tout $s\in\Omega$, on a
$$\left|\int_A^B f(t)e^{-st}dt\right|\leq|F(B)|+|F(A)|+\frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\times\sup_{x\geq A}|F(x)|\,.$$
(2) Soit $s\in\Omega$. En utilisant (1) et le critère de Cauchy, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ est convergente. Dans la suite, on posera
$$\mathcal{L}f(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,.$$
(3) Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $L_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par $L_n(s)=\int_0^n f(t)e^{-st}dt$.
  (a) Montrer que L_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
  (b) Montrer qu'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que
$$|L_n(s)-\mathcal{L}f(s)|\leq|F(n)|+\frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\,\varepsilon_n$$
  pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $s\in\Omega$.
(4) Déduire de (3) que la fonction $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur Ω.
(5) Montrer qu'on a $\left|\mathcal{L}f(x)-\int_0^\infty f(t)\,dt\right|\leq 2|F(n)|+\varepsilon_n+|L_n(x)-L_n(0)|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in]0,\infty[$, et en déduire que $\mathcal{L}f(x)$ tend vers $\int_0^\infty f(t)\,dt$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}\,.$

(1) Pour $\alpha\in\mathbb{D}$ et pour $z\neq 1/\overline{\alpha}$, on pose
$$\varphi_\alpha(z)=\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}\,\cdot$$
  (a) En utilisant le principe du maximum, montrer qu'on a $|\varphi_\alpha(z)|<1$ pour tout $z\in\mathbb{D}$.
  (b) Montrer que la restriction de φ_α à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

(2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
   (a) Pour $b \in \mathbb{D}$, calculer $\varphi_{f(b)} \circ f \circ \varphi_b(0)$.
   (b) En appliquant le lemme de Schwarz, montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{D}$, on a l'inégalité
$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{1 - \overline{f(b)}f(a)}\right| \leq \left|\frac{b - a}{1 - \bar{b}a}\right|.$$
   (c) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$
   (d) Montrer que si la fonction f est une bijection de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, alors on a égalité dans (b).

(3) Pour $a, b \in \mathbb{D}$, on pose
$$\delta(a, b) = |\varphi_b(a)| = \left|\frac{b - a}{1 - \bar{b}a}\right|.$$
   (a) Exprimer les résultats de (2b) et (2d) à l'aide de δ.
   (b) Établir l'identité
$$1 - \delta(a, b)^2 = \frac{\left(1 - |b|^2\right)\left(1 - |a|^2\right)}{\left|1 - \bar{b}a\right|^2}.$$

(4) Le but de cette question est de montrer que δ est une distance sur $\mathbb{D}$.
   (a) Déduire de (3b) qu'on a $\delta(u, v) \leq \frac{|u|+|v|}{1+|u||v|}$ pour tous $u, v \in \mathbb{D}$, et en déduire l'inégalité $\delta(u, v) \leq |u| + |v|$.
   (b) Montrer que si $a, b, c \in \mathbb{D}$, alors $\delta(a, c) = \delta(\varphi_b(a), \varphi_b(c))$.
   (c) Démontrer le résultat souhaité.

(5) *Question hors-barême.* Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On suppose que $K = \overline{f(\mathbb{D})}$ est compact et contenu dans $\mathbb{D}$.
   (a) En reprenant le raisonnement de (2), montrer qu'il existe une constante $k < 1$ telle que $\delta(f(u), f(v)) \leq k\, \delta(u, v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{D}$.
   (b) Montrer que K est compact pour la distance δ, et qu'on a $f(K) \subset K$.
   (c) Montrer que f possède un unique point fixe.