Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence-Master Maths
Module *Variable complexe*

Examen du 26 Mai 2010

Durée : 4h

Sans documents

Questions de cours.

(1) Développer $f(z) = \frac{1}{z^7(z-2)}$ en série de Laurent dans la couronne $\{0 < |z| < 2\}$.

(2) Montrer que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe, et que tout ouvert convexe de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

(3) Calculer l'intégrale $I = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z^2-3z+1}$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité $\{|z| < 1\}$.

(4) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $z^3 + 7z^2 + 10z + 3 = 0$ dans le disque $\overline{D}(0,3)$.

(5) Montrer que la formule $f(z) = \sum_0^\infty e^{inz}$ définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ est une fonction continue bornée.

(1) Soit $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. Pour $s \in \Omega$, on pose

$$L(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,.$$

Justifier la définition, et montrer que la fonction L est holomorphe sur Ω.

(2) Soit a un nombre réel strictement positif. Pour $R > 0$, on pose

$$K_R(a) = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) \geq a \text{ et } |s-a| \leq R\}\,.$$

(a) Dessiner $K_R(a)$.

(b) Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{\partial K_R(a)} L(s)\,ds$?

(3) Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, et que f' et f'' sont bornées sur $[0, \infty[$.

(a) Soit $a > 0$, et soit g_a la fonction définie par $g_a(t) = f(t)e^{-at}$. Déterminer les limites de $g_a(t)$ et $g_a'(t)$ en $+\infty$.

(b) Soit toujours $a > 0$. En exprimant $L(s)$ à l'aide de g_a et en intégrant deux fois par parties, montrer que si $s \in \Omega$ vérifie $s \neq a$ et $\mathrm{Re(s)} \geq a$, alors on peut écrire

$$L(s) = \frac{1}{s-a} f(0) + \Phi_a(s)\,,$$

où $\Phi_a(s)$ est défini par

$$\Phi_a(s) = \frac{1}{(s-a)^2}\left(g_a'(0) + \int_0^\infty g_a''(t) e^{-(s-a)t} dt\right).$$

(c) Calculer $g_a''(t)$, puis montrer qu'il existe une constante M_a telle que pour tout $s \in \Omega$ vérifiant $\mathrm{Re(s)} \geq a$ et $s \neq a$, on a

$$|\Phi_a(s)| \leq \frac{M_a}{|s-a|^2}\,.$$

(4) On se place toujours sous les hypothèses de la question (3). En utilisant (2b) et (3), montrer que pour tout $a > 0$, on a la "formule d'inversion"

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} L(a+iy)\,dy\,.$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}\,.$$

(1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. On définit une fonction F par la formule

$$F(\xi) = \frac{\operatorname{cotan}\xi}{\xi(\xi - z)}\,.$$

(a) Montrer que F est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et déterminer ses pôles ainsi que leurs multiplicités.
(b) Calculer $\mathrm{Res}(F, z)$ et $\mathrm{Res}(F, n\pi)$ pour tout entier *non nul* $n \in \mathbb{Z}$.
(c) Le but de cette question est de calculer le résidu de F en 0.
  (i) Montrer que la fonction h définie par $h(0) = 1$ et $h(\xi) = \xi \operatorname{cotan}\xi$ pour $\xi \neq 0$ est holomorphe sur le disque $D(0, \pi)$.
  (ii) Observer que h est une fonction paire, et en déduire que $h'(0) = 0$.
  (iii) Exprimer $F(\xi)$ à l'aide de $h(\xi)$, puis calculer $\mathrm{Res}(F, 0)$.

(2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note R_N le carré $[-a_N, a_N] \times [-a_N, a_N]$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$. On considère évidemment R_N comme une partie de $\mathbb{C}$.
(a) Dessiner R_N.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ intérieur à R_N, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R_N} \frac{\operatorname{cotan} \xi}{\xi(\xi - z)}\, d\xi = \frac{\operatorname{cotan} z}{z} - \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{z^2 - n^2\pi^2} \right).$$

(3) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et soit toujours $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout nombre complexe $\xi = x + iy$, on a

$$|\sin \xi|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y\,.$$

(b) Exprimer $\operatorname{cotan}^2 \xi$ en fonction de $\sin^2 \xi$, puis déduire de (a) qu'il existe une constante C indépendante de N telle que $|\operatorname{cotan} \xi| \leq C$ pour tout $\xi \in \partial R_N$.

(c) Montrer que si $N\pi \geq 2|z|$, alors

$$\forall \xi \in \partial R_N \quad : \quad \left| \frac{\operatorname{cotan} \xi}{\xi(\xi - z)} \right| \leq \frac{M}{N^2}\,,$$

où $M = 2C/\pi^2$.

(4) Déduire des questions précédentes la formule souhaitée pour $\operatorname{cotan} z$.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

(1) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas et qu'on a $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$. En considérant la fonction f/g, montrer qu'il existe une constante c telle que $f = c\, g$.

(2) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. Dans la suite, on posera

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

(3) Déterminer les zéros de f.

(4) En utilisant la formule pour $\operatorname{cotan} z$ donnée dans l'exercice 2, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \operatorname{cotan}(\pi z)\,.$$

(5) Démontrer la formule souhaitée.