Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 20 Juin 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\tan z = 2i$. (*On pourra poser* $w = e^{iz}$.)

(2) Trouver les rayons de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} \binom{5n}{n} z^n$ et $\sum_{n\geq 1} \big(3+(-1)^n\big)^n z^n$.

(3) Soient $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle (fermé) de centre $a \in \mathbb{C}$ et D un disque ouvert de centre a et contenant R. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, alors $\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial D} f(z)\, dz$.

(4) Déterminer les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f(2^{-n}) = 4^{-n}$.

(5) Soit $\mathbb{D} = D(0,1)$, et soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq (1-|z|)^{1/7}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En utilisant le principe du maximum, montrer que $f = 0$.

(6) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-3}$ dans la couronne $\{1 < |z+2| < 5\}$.

(7) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ en appliquant le théorème des résidus à des demi-disques bien choisis.

(8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, déterminer le résidu de $f(z) = \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}$ au point $z = 0$; puis calculer l'intégrale $\int_{\partial \mathbb{D}} f(z)\, dz$, où $\mathbb{D} = D(0,1)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt$.

(9) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'on a $|f(z) - (z-4)| \leq 1,99$ pour tout $z \in \overline{D}(5,3)$. Montrer que f s'annule exactement une fois dans le disque $D(5,3)$.

(10) Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, on a $|c_n| = o(n^\alpha)$ quand $n \to \infty$. Montrer que la formule $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $U = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

(11) Soit P un polynôme (à coefficients complexes) et soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(z) = \int_0^\infty P(t) e^{-t^\alpha z} dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(12) Justifier qu'il existe une fonction $h \in H(\mathbb{C})$ telle que $\forall u \in \mathbb{C} \ : \ \cos(u) = 1 + u^2 h(u)$, puis montrer que la formule $f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(z^k)$ définit une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D} = D(0,1)$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on notera log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ (obtenue en prenant l'argument dans $]-\pi,\pi]$).

(1) Montrer que $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1]$

(2) Montrer que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\log\big(1+e^{i\theta}\big) = \log\big(2\cos(\theta/2)\big) + i\,\theta/2,$$

et que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\log(1+iy) = \frac{1}{2}\,\log(1+y^2) + i\,\arctan(y)\,.$$

(3) Vérifier qu'on a $\int_0^1 \frac{\log(1+y^2)}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx$.

(4) Dessiner le domaine élémentaire $K = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) \geq 0\ ,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq 1\}$.

(5) À l'aide des questions précédentes et du théorème de Cauchy, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx\,,$$

et montrer qu'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2\cos(\theta/2))\,d\theta = \int_0^1 \frac{\arctan(y)}{y}\,dy\,.$$

Exercice 2. Soit g une fonction holomorphe *injective* dans le disque $\mathbb{D} = D(0,1)$.

(1) Expliquer, en énonçant précisément les théorèmes utilisés, pourquoi $U := g(\mathbb{D})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et pourquoi la fonction $g^{-1} : U \to \mathbb{D}$ est holomorphe.

(2) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'on a $f(0) = g(0)$ et $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$.

(a) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que

(i) $\forall z \in \mathbb{D}\ :\ |g^{-1}(f(z))| \leq |z|$ et (ii) $|f'(0)| \leq |g'(0)|$.

(b) Montrer à l'aide de (i) que pour tout $r < 1$, on a $f\big(\overline{D}(0,r)\big) \subseteq g\big(\overline{D}(0,r)\big)$.

(3) Dans cette question, on prend pour g la fonction définie par $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

(a) Montrer que g envoie $\mathbb{D}$ dans le demi-plan $U := \{u \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(u) > 0\}$; puis montrer que g est en fait une bijection de $\mathbb{D}$ sur U et déterminer sa réciproque.

(b) Vérifier que si $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ et $|z| \leq r < 1$, alors $g(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} = \frac{2r}{1-r^2}\,\frac{\frac{z}{r}-r}{1-z}$; et en déduire que pour tout $r < 1$, on a $g\big(\overline{D}(0,r)\big) \subseteq \overline{D}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}, \frac{2r}{1-r^2}\big)$.

(4) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(a) Montrer que $\left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|f'(0)| \leq 2$.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\left|f(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2}.$$

(c) Déduire de (b) que $\forall z \in \mathbb{D}\ :\ \mathrm{Re}(f(z)) \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}$.