Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 16 Juin 2015

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Montrer que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$.

(2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on pose $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot$ Montrer qu'on a $\Delta u = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar z} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z \partial z}$ pour toute $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, et en déduire que si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors $\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2$.

(3) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3} z^n\,.$$

(4) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Calculer $I(a) := \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a}$ pour $a \in \mathring{K}$ et pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$.

(5) Déterminer le domaine de définition de $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+2z-3}$, puis le développement de Laurent de f dans la couronne $\{1 < |z| < 3\}$.

(6) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1/\sqrt{|z|}$ pour z vérifiant $0 < |z| \leq 1$. Montrer que si on note c_n les coefficients de Laurent de f, alors $\forall r \in]0,1]\ \forall n \in \mathbb{Z}\ :\ |c_n| \leq C\,r^{-n-\frac{1}{2}}$. En déduire que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(7) En utilisant le principe des zéros isolés, trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $f(1/\sqrt{k}) = \frac{e^{1/k}}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(8) Soit f une fonction entière. On suppose qu'on a $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En considérant $g = e^{-f}$, montrer que f est constante.

(9) Pour $a > 1$, on pose $J(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}\cdot$ Écrire $J(a)$ sous la forme d'une intégrale curviligne $\int_{\partial\mathbb{D}} f_a(z)\,dz$ (où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et la fonction f_a est à déterminer), puis calculer $J(a)$.

(10) Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3 = 0$ dans la couronne $C := \{1 < |z| < 2\} = D(0,2) \setminus \overline{D}(0,1)$.

Exercice 1. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1-n<\alpha<1$.

(1) Pour $0<\varepsilon<1<R$, dessiner le domaine élémentaire
$$K_{\varepsilon,R}=\left\{re^{i\theta};\ \varepsilon\le r\le R\,,\ 0\le\theta\le\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

(2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1+x^n)}$.

Exercice 2. Soit $U:=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)>0\}$. On rappelle que la fonction $\Gamma:U\to\mathbb{C}$ est définie par la formule
$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\,.$$

(1) Montrer que pour tout $z\in U$, on a
$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{z+n}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\,.$$

(2) Montrer que la formule $\Phi(z)=\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Déduire de (1) et (2) que la fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

Exercice 3. On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$. Soit $f:\overline{U}\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{U}$ et holomorphe dans U. On suppose que f est bornée sur ∂U, et on pose $M=\sup\{|f(\xi)|;\ \xi\in\partial U\}$.

(1) Dans cette question, on prend $f(z)=e^z$. Vérifier que f est effectivement bornée sur ∂U et déterminer la valeur de M. Montrer cependant qu'*on n'a pas* $\forall z\in U\ :\ |f(z)|\le M$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le principe du maximum?

Dans toute la suite de l'exercice, on fait l'hypothèse suivante sur f : il existe un nombre $\alpha\in[0,1[$ et une constante C tels que $|f(z)|\le Ce^{|z|^\alpha}$ pour tout $z\in U$. Le but des questions suivantes est de montrer qu'on a $|f(z)|\le M$ pour tout $z\in U$.

(2) Pour tout $\beta>0$, on définit z^β dans $\overline{U}\setminus\{0\}$ en prenant l'argument dans $]-\pi,\pi[$, et on pose aussi $0^\beta=0$. Montrer que la fonction $z\mapsto z^\beta$ est continue sur $\overline{U}$.

(3) Soit β vérifiant $\alpha<\beta<1$. Montrer qu'il existe une constante $\delta>0$ telle que $\mathrm{Re}(z^\beta)\ge\delta|z|^\beta$ pour tout $z\in\overline{U}$.

(4) Soit toujours β vérifiant $\alpha<\beta<1$. Pour $\varepsilon>0$, on définit $f_\varepsilon:\overline{U}\to\mathbb{C}$ par
$$f_\varepsilon(z)=e^{-\varepsilon z^\beta}f(z)\,.$$

(a) Montrer qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \overline{U}$, et déduire de (3) qu'on a aussi $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.
(b) Montrer que si $z \in U$ et si $R > |z|$, alors $|f_\varepsilon(z)| \leq \max(M, M_\varepsilon(R))$, où $M_\varepsilon(R) = \sup\{|f_\varepsilon(\xi)|;\ \xi \in U \cap \partial D(0,R)\}$.
(c) Déduire de (a) et (b) qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.