Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 12 Mai 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors $\Delta u = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}\cdot$

(2) Soit $a > 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = a$. (*On pourra poser* $w = e^{iz}$.)

(3) Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} \binom{3n}{n} z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \cos(\dfrac{1}{n})^{n^2} z^n$.

(4) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_{\partial K} \frac{dz}{z-a}$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$.

(5) Déterminer les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ f(2^{-n}) = 4^{-n}$.

(6) Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0,R)$. On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in D(0,R)$. Pour $r < R$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. En appliquant le principe du maximum à $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$, montrer que si $|z_0| < r < R$, alors $|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r-|z_0|}\,|z_0|$.

(7) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-5}$ dans la couronne $\{2 < |z-1| < 4\}$.

(8) Soit $K = \overline{D}(0,3)$. Calculer l'intégrale $I = \int_{\partial K} \frac{z+1}{z^2+2z-8}\,dz$ en utilisant le théorème des résidus.

(9) Déterminer le nombre de zéros de $P(z) = z^5 + 15z^3 - 2z^2 + 31$ dans le disque $\overline{D}(0,2)$, puis dans la couronne $\{2 \leq |z| \leq 4\}$.

(10) Montrer qu'on a $|\sin u| \leq e^{|u|}$ pour tout $u \in \mathbb{C}$; puis montrer que la formule $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n^n}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(11) Soit P un polynôme (à coefficients complexes) et soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(z) = \int_0^\infty P(t) e^{-t^\alpha z} dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $U = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(12) Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, et soit (c_k) une suite bornée de nombres complexes. Montrer que la formule $f(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 + c_k z^{n_k})$ définit une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D} = D(0,1)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose qu'on a

$$f(z+1) = f(z) = f(z+i) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

(1) On note Q le carré de sommets, 0, 1, $1+i$, i. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver un point $w_z \in Q$ tel que $f(z) = f(w_z)$.
(2) Pourquoi la fonction f est-elle bornée sur le carré Q?
(3) Montrer que f est constante.

Exercice 2. On note $\mathbb{D}$ le disque $D(0,1)$ et U le demi-plan $\{u \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(u) > 0\}$.

(1) Soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \frac{1-z}{1+z}\cdot$
  (a) Montrer que $\phi(\mathbb{D}) \subseteq U$.
  (b) Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur U et déterminer sa réciproque.
(2) Soit f une fonction holomorphe sur U. On suppose qu'on a $f(U) \subseteq U$ et $f(1) = 1$. En appliquant le lemme de Schwarz à la fonction $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$, montrer que

$$\forall u \in U\ :\ \left|\frac{1-f(u)}{1+f(u)}\right| \leq \left|\frac{1-u}{1+u}\right|.$$

Exercice 3. Le but de l'exercice est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\infty \frac{\log(x)^2}{1+x^2}\, dx\,.$$

(1) On note L la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ obtenue en prenant l'argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, et on pose

$$f(z) = \frac{L(z)^2}{1+z^2}\cdot$$

  (a) Déterminer le résidu de f au point i.
  (b) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a

$$f(-x) = \frac{\log(x)^2}{1+x^2} - \frac{\pi^2}{1+x^2} + 2i\pi\, \frac{\log(x)}{1+x^2}\cdot$$

  (c) Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = re^{it}$. Montrer que $\int_{\gamma_r} f(z)\, dz$ tend vers 0 quand $r \to 0$ et quand $r \to \infty$.
(2) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner soigneusement le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ et } \varepsilon \leq |z| \leq R\}\,.$$

(3) Déterminer les valeurs de I et J en appliquant le théorème des résidus à f.
(4) *Bonus.* Retrouver la valeur de I en utilisant le changement de variable $u = 1/x$.