Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence-Master Maths
Module *Variable complexe*

Examen du 26 Juin 2009

Durée : 4h
Sans documents

Exercice 1. Soient r_0, r_1 vérifiant $0 \le r_0 < r_1 \le \infty$ et soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant la couronne

$$V = \{z \in \mathbb{C};\ r_0 < |z| < r_1\}.$$

(1) On note $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c^n z^n$ le développement de f en série de Laurent dans la couronne V.
  (a) Exprimer le coefficient c_{-1} par une formule intégrale.
  (b) Montrer que la série $\sum_{n\neq -1} \frac{c_n}{n+1}\, z^{n+1}$ converge normalement sur les compacts de V.

(2) Déduire de (1) que la fonction f possède une primitive (holomorphe) dans la couronne V si et seulement si

$$\int_{\partial D(0,r)} f(z)\, dz = 0$$

pour tout $r \in]r_0, r_1[$.

(3) Dans cette question, on suppose que f est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont dans le disque ouvert $D(0, r_0)$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f. Montrer que f possède une primitive dans V si et seulement si

$$\sum_{a\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, a) = 0\,.$$

(4) Déterminer si les fonctions $f_1(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ et $f_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ possèdent des primitives dans la couronne $\{|z| > 4\}$.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe non constante dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| \le |c_1|\,.$$

(1) Montrer que $c_1 \neq 0$.
(2) On pose $h(z) = f(z) - c_1 z$. Exprimer $h'(z)$ à l'aide des coefficients c_n, et en déduire que pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$\sup_{z \in \overline{D}(0,r)} |h'(z)| \leq |c_1|\, r\,.$$

(3) En utilisant (2), montrer que si z_0 est un point quelconque de $\mathbb{D}$ et si r vérifie $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(\xi) - f(z_0) - c_1(\xi - z_0)| < |c_1(\xi - z_0)|$$

pour tout $\xi \in \partial D(0, r)$. Que peut-on en déduire sur le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ dans le disque $D(0, r)$?
(4) Montrer que la fonction f est injective.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on fixe $s = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $0 < x < 1$. On rappelle la définition de $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

(1) Pour $z = re^{it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$, où log est la détermination principale du logarithme. Exprimer $|z^\lambda|$ en fonction de r, t, a et b.
(2) pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = re^{it}$, et on pose

$$I(r) = \int_{\gamma_r} z^{s-1} e^{-z} dz\,.$$

  (a) Montrer qu'on a $|I(r)| \leq e^{\frac{\pi}{2}|y|}\, r^x \int_0^{\pi/2} e^{-r\cos t} dt$.
  (b) Comparer $\cos t$ et $1 - \frac{2}{\pi}\, t$ pour $t \in [0, \pi/2]$.
  (c) Montrer qu'on a $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = 0 = \lim_{R \to \infty} I(R)$.

(3) En utilisant (2c) et le théorème de Cauchy, établir la formule

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-it} dt = e^{-i\pi s/2}\, \Gamma(s)\,.$$

Exercice 4. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$, et soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On écrit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$.
(1) Combien vaut c_0?
(2) Pourquoi a-t-on $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$?

(3) Pour $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on pose
$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2z} \, .$$
Montrer que la fonction g se prolonge en une fonction $\widetilde{g}$ holomorphe sur $\mathbb{D}$, et déterminer le développement de $\widetilde{g}$ en série entière.

(4) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer qu'on a
$$\forall z \in \mathbb{D} \, : \, |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2.$$

(5) Soit h une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant $\lim_{|z| \to 1} h(z) = 0$. En utilisant le principe du maximum, montrer que $h = 0$.

(6) Dans cette question, on suppose qu'il existe un point $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(a) + f(-a)| = 2|a|^2$.
  (a) Justifier l'existence d'une constante λ de module 1 telle que $g(z) \equiv \lambda z$.
  (b) Montrer à l'aide de (2) qu'il existe une fonction $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe et impaire telle que
$$\forall z \in \mathbb{D} \, : \, f(z) = \lambda z^2 + h(z) \, .$$
  (c) Montrer qu'on a $|\lambda z^2 + h(z)|^2 \leq 1$ et $|\lambda z^2 - h(z)|^2 \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et en déduire l'inégalité $|h(z)|^2 \leq 1 - |z|^4$.
  (d) Montrer qu'on a $f(z) = \lambda z^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions entières. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante c telle que $f = cg$.

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions entières f vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, : \, f'(1/n) = 1/n^2.$$