Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence-Master Maths
Module *Variable complexe*

Examen du 6 Juin 2009

Durée : 4h
Sans documents

Questions de cours

(1) Énoncer le théorème des résidus.
(2) Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$, et soient f et g deux fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{D}$. Le théorème de Rouché donne une condition suffisante permettant d'affirmer que f et g ont le même nombre de zéros dans le disque ouvert D. Quelle est cette condition?
(3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Rappeler les hypothèses vues en cours permettant d'affirmer que la formule

$$f(z) = \int_I F(t,z)\,dt$$

définit une fonction holomorphe sur Ω.
(4) Montrer que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $F = P/Q$ est une fraction rationnelle à coefficients réels, sans pôles réels, avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. D'autre part, on note log la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ ($\log(z)$ est calculé en prenant l'argument dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$).

(1) Montrer que la fonction $x \mapsto F(x)\log|x|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
(2) pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = re^{it}$. Montrer qu'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\log(z)\,dz = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} F(z)\log(z)\,dz\,.$$

(3) On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de F à partie imaginaire strictement positive. Établir la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\log|x|\,dx = -2\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\,(F(z)\log(z), a)\right).$$

(4) Calculer l'intégrale
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|x|}{x^2-2x+2}\,dx\,.$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2\,.$$

(1) Montrer que la formule
$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$
définit une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

(2) Montrer que si $w=a+ib\in\mathbb{C}$ (où a et b sont réels), alors
$$\begin{aligned}|\sin w|^2 &= \sin^2 a\,\mathrm{ch}^2\, b+\cos^2 a\,\mathrm{sh}^2\, b\\ &\geq \mathrm{sh}^2\, b\,.\end{aligned}$$

(3) On définit $\Phi:\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ par
$$\Phi(z)=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2-g(z)\,.$$

(a) Montrer que la fonction Φ est 1-périodique (i.e. $\Phi(z+1)=\Phi(z)$).

(b) Montrer à l'aide d'un développement limité que $(\pi/\sin(\pi z))^2-1/z^2$ admet une limite en 0.

(c) En déduire que la fonction Φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique. Dans la suite, on note encore Φ cette fonction.

(d) Montrer que si $z=x+iy$ avec $|y|>1$ et $-1/2\leq x\leq 1/2$, alors
$$|\Phi(z)|\leq\left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}\,\pi}\right)^2+1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1/2)^2}\,.$$
En déduire que Φ est bornée sur la bande $\{-1/2\leq \mathrm{Re}(z)\leq 1/2\}$.

(e) Montrer que la fonction Φ est constante.

(4) Montrer qu'on a $\lim_{y\to+\infty} g(iy)=0$ et $\lim_{y\to+\infty}|\sin(\pi iy)|=+\infty$.

(5) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$. Pour $r\in[0,1[$, on pose
$$I(r)=\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\,.$$

(1) Montrer que pour tout $r \in [0,1[$, il existe une fonction mesurable $\varphi_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ telle que $|\varphi_r(\theta)| = 1$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \varphi_r(\theta) f(re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

(2) Soit $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée.

(a) Montrer que la fonction h_φ définie par $h_\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) f(ze^{i\theta})\, d\theta$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

(b) Montrer que pour tout $\xi = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$, on a $|h_\varphi(\xi)| \leq \|\varphi\|_\infty\, I(r)$, où on a posé $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(\theta)|;\ \theta \in [0,2\pi]\}$.

(c) En déduire que pour tout $r \in [0,1[$ et pour tout $z \in D(0,r)$, on a

$$|h_\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_\infty\, I(r)\,.$$

(3) Montrer que I est une fonction croissante de r : si $0 \leq r_1 < r_2 < 1$, alors $I(r_1) \leq I(r_2)$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $a > e$. Montrer que l'équation $e^z = az^n$ possède exactement n solutions dans le disque unité $\mathbb{D}$.