Corrigé succint du DS

Questions de cours.

(1) Par Green-Riemann, on a $\int_{\partial D} xdy - ydx = \int_{\overline{D}}(1-(-1))dxdy = 2\int_{\overline{D}} dxdy = 2\pi R^2$.

(2) En paramétrant le cercle, on trouve $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi$ (calcul fait 10 fois en cours et en TD). Pour la deuxième intégrale, on applique le théorème de Cauchy : la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-2}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ puisque $2 \notin \overline{\mathbb{D}}$, donc $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z-2} = 0$.

(3) On a $f(2^{-n}) = 8^{-n} = (2^{-n})^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les fonctions entières f et $z \mapsto z^3$ coïncident sur l'ensemble $A = \{2^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, qui admet $z = 0$ comme point d'accumulation. Par le "principe d'identité", on a donc $f(z) = z^3$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(4) On a $|e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ puisque $\mathrm{Re}(f) \leq 0$, donc la fonction entière e^f est bornée. Par Liouville, e^f est constante. Comme $(e^f)' = f'e^f$, on en déduit que $f' = 0$, donc f est constante également.

Exercice 1. (1) Le polynôme P ne s'annule pas dans le disque D. Donc f est (bien définie et) holomorphe dans D, et par conséquent développable en série entière dans D.

(2) On trouve sans difficulté

$$f(z) = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{z-\beta} - \frac{1}{z-\alpha}\right).$$

Ensuite, on écrit $\frac{1}{z-\beta} = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{1-(z/\beta)} = -\sum_0^\infty \frac{z^n}{\beta^{n+1}}$, et de même $\frac{1}{z-\alpha} = -\sum_0^\infty \frac{z^n}{\alpha^{n+1}}$. On en déduit

$$f(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right) z^n,$$

d'où la formule souhaitée pour les c_n.

(3) Les racines de P sont (après calcul) $\alpha = 1 + i$ et $\beta = 1 - i$. On trouve $\alpha^4 = -4 = \beta^4$, donc $c_3 = 0$.

(4) On écrit $(z^2+az+b)\sum_0^\infty c_n z^n = 1$, puis on développe et on identifie les coefficients (cf TD).

Exercice 2. (1) Par le théorème de Cauchy, on a $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 0$, où $K_{\varepsilon,R}$ est le domaine élémentaire “évident”. Cela s'écrit

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz - + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^R f(x)\,dx = 0\,,$$

ou encore $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz - \int_{\gamma_R} f(z)dz = -\int_\varepsilon^R (f(x)+f(-x))\,dx$. En calculant soigneusement $f(x)+f(-x)$ (faire attention au $(-x)^3$!), on obtient la formule souhaitée.

(2) On a $|f(z)| \le \frac{|e^{iz}|+1+|z|}{|z|^3}$. De plus, $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im}(z)} \le 1$ car $\mathrm{Im}(z)\ge 0$, donc $|f(z)| \le \frac{2+|z|}{|z|^3} \le \frac{3}{|z|^2}$ puisque $2 \le 2|z|$. On en déduit

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{3}{|z|^2}\,|dz| = \frac{3}{R^2}\times \pi R = \frac{3\pi}{R}\,,$$

donc $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ tend vers 0 quand $R\to\infty$.

(3) On a

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \sum_{n=3}^\infty \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \phi(w)\,;$$

et si $|w|\le 1$, alors $|\phi(w)| = \left|w^3\sum_3^\infty \frac{w^{n-3}}{n!}\right| \le C|w|^3$, où $C = \sum_3^\infty \frac{1}{n!}$ (la série est convergente!).

(4) Pour $\varepsilon \le 1$, la question précédente permet d'écrire (en posant $w = iz$)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(iz)^2/2 + \phi(iz)}{z^3}\,dz \\
&= \int_0^\pi \frac{-(\varepsilon e^{it})^2/2 + \phi(i\varepsilon e^{it})}{(\varepsilon e^{it})^3}\, i\varepsilon e^{it}dt \\
&= -i\frac{\pi}{2} + i\int_0^\pi \frac{\phi(i\varepsilon e^{it})}{(\varepsilon e^{it})^2}\,dt \\
&= -i\frac{\pi}{2} + J_\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Comme $|\phi(i\varepsilon e^{it})| \le \varepsilon^3$, on a $|J_\varepsilon| \le \int_0^\pi \varepsilon\,dt = \pi\varepsilon$, et donc $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = 0$. Ainsi, $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$ tend vers $-i\pi$ quand $\varepsilon\to 0$.

(5) En faisant tendre R vers l'infini et ε vers 0 dans (1), on obtient $-i\frac{\pi}{2} - 0 = -2i\,I$ d'où $I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. (1) On a fait plusieurs fois ce genre de calcul en cours et en TD :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{it})} e^{-int} dt &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ikt} \right) e^{-int} dt \\
&= \sum \int \quad \text{par convergence normale de la série} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k \int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)t} dt \,.
\end{aligned}$$

Tous les termes de la somme sont nuls car $n+k$ est un entier *non nul* pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on suppose $n \geq 1$), d'où $\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{it})} e^{-int} dt = 0$. Comme d'autre part on sait (par le cours) que $c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$, on en déduit

$$\begin{aligned}
c_n r^n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})} \right] e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re} \left[f(re^{it}) \right] e^{-int} dt \,.
\end{aligned}$$

(2) Par la formule de la moyenne, on sait que $c_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt$. On a donc $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left[f(re^{it}) \right] dt = \mathrm{Re} \left(\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt \right) = 2\pi \mathrm{Re}(c_0)$.

(3) (a) Par (1) et (2), on a pour $n \geq 1$ et pour tout $r < 1$:

$$\begin{aligned}
|c_n r^n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 2\mathrm{Re} \left[f(re^{it}) \right] \right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re} \left[f(re^{it}) \right] dt \qquad \text{car } \mathrm{Re}(f) \geq 0 \\
&= 2\mathrm{Re}(c_0) \,.
\end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 1, on en déduit $|c_n| \leq 2\mathrm{Re}(c_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Par (3), on a

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(0)| &= |f(z) - c_0| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_0)\, |z|^n \\
&= 2\mathrm{Re}(c_0)\, \frac{|z|}{1 - |z|} \,.
\end{aligned}$$

Exercice 4. (1) L'ouvert U n'est pas borné.

(2) Si $z \in \overline{U}$, alors $z = re^{it}$ avec $r \geq 0$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a donc $z^\beta = r^\beta e^{i\beta t}$, d'où $|z^\beta| = r^\beta \cos(\beta t)$. Comme $\beta t \in [-\beta\pi/2, \beta\pi/2]$ et $\beta < 1$, on a $\cos(\beta t) \geq \delta$, où $\delta := \cos(\beta\pi/2)$ est *strictement* positif et indépendant de z. Au total, $\mathrm{Re} z^\beta \geq \delta r^\beta = \delta |z|^\beta$.

(3) (a) On a $|f_\varepsilon(z)| = |f(z)|\,|e^{-\varepsilon z^\beta}| = |f(z)|e^{-\varepsilon \mathrm{Re}(z^\beta)}$. Comme $\mathrm{Re}(z^\beta) \geq 0$ (par (1)), on a donc $|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|$. D'autre part, en utilisant (1) et l'hypothèse sur f, on obtient

$$|f_\varepsilon(z)| \leq e^{-\varepsilon\delta|z|^\beta}|f(z)| \leq Ce^{-\varepsilon\delta|z|^\beta + |z|^\alpha}.$$

Comme $\beta > \alpha$, on en déduit qu'on a $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.

(b) On sait que la fonction $z \mapsto z^\beta$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$. De plus, comme $|z^\beta| = |z|^\beta$ tend vers 0 quand $z \to 0$, la fonction z^β est également continue en 0. Par conséquent, la fonction f_ε est *continue sur* $\overline{U}$ et holomorphe sur U. En appliquant le principe du maximum avec $\Omega = U \cap D(0, R)$, dont la frontière est $[-iR, iR] \cup (U \cap \partial D(0, R))$, on en déduit $|f(z)| \leq \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in [-iR, iR] \cup (U \cap \partial D(0, R))\} \leq \max(M, M_\varepsilon(R))$

(c) Par (b), on a $\lim_{R\to\infty} M_\varepsilon(R) = 0$. En faisant tendre R vers l'infini dans (b), on obtient donc $|f_\varepsilon(z)| \leq \max(M, 0) = M$ pour tout $z \in U$.

(4) Comme $f_\varepsilon(z) \to f(z)$ quand $\varepsilon \to 0$, il suffit d'appliquer (3c) pour obtenir $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.