Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

DS du 8 Mars 2011

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Déterminer la différentielle de la fonction $z \mapsto \log|z|$.

(2) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On pose $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot$ Montrer qu'on a

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z} \partial z} \cdot$$

(3) Soit $\alpha \in]1, \infty[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = \alpha$.

(4) Énoncer la formule de Green-Riemann, et démontrer cette formule dans le cas d'un rectangle.

(5) Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire, et soit $a \in \mathbb{C} \setminus \partial K$. Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a} \cdot$$

Exercice 1. Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \log(x)}{x^2 - 1}\, dx\,.$$

Dans toute la suite, on notera log la détermination holomorphe du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ obtenue en prenant l'argument dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$; et pour $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$, on posera $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. Enfin, pour $z \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^- \cup \{-1, 1\})$, on pose

$$f(z) = \frac{z^\alpha \log(z)}{z^2 - 1} \cdot$$

(1) Justifier l'existence de I_α.

(2) Pour $\varepsilon \in]0,1/2]$, on note γ_ε^+, et γ_ε^- les chemins définis sur $[0,\pi]$ par

$$\gamma_\varepsilon^-(t) = -1 + \varepsilon e^{it} \text{ et } \gamma_\varepsilon^+(t) = 1 + \varepsilon e^{it}\,.$$

Le but de cette question est de montrer qu'on a

$$(\pm) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz = \frac{\pi^2}{2}\, e^{i\pi\alpha} \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)\,dz = 0\,.$$

(a) Calculer $\log(-1)$ et $(-1)^\alpha$, puis déterminer la limite de $\varepsilon e^{it} f(-1+\varepsilon e^{it})$ quand ε tend vers 0^+.

(b) Déterminer la limite de $\varepsilon e^{it} f(1+\varepsilon e^{it})$ quand ε tend vers 0^+.

(c) Montrer que la fonction $z \mapsto z^\alpha \log(z)$ est bornée sur $\overline{D}(-1,1/2) \cup \overline{D}(1,1/2)$, et en déduire qu'il existe une constante C telle que

$$|f(1+\varepsilon e^{it})| \le C/\varepsilon \text{ et } |f(-1+\varepsilon e^{it})| \le C/\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1/2]$ et pour tout $t \in [0,\pi]$.

(d) Démontrer $(\pm)$.

(3) Pour $r > 0$ et $r \neq 1$, on note $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = re^{it}$.

(a) Montrer que si $0 < \varepsilon < 1$, alors $|f(\varepsilon e^{it})| \le \frac{\varepsilon^\alpha(|\log(\varepsilon)|+\pi)}{1-\varepsilon^2}$ pour tout $t \in [0,\pi]$, et en déduire qu'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0\,.$$

(b) Déterminer la limite de $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ quand $R \to \infty$.

(4) Pour $0 < \varepsilon < 1/2 < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(z) \ge 0\,,\ \varepsilon \le |z| \le R\ ,\ |z-1| \ge \varepsilon\,,\ |z+1| \ge \varepsilon\}\,.$$

(5) Montrer qu'on a $f(-x) = e^{i\pi\alpha} f(x) + i\pi \frac{e^{i\pi\alpha} x^\alpha}{x^2-1}$ pour tout $x > 0$, $x \neq 1$.

(6) Déduire des questions précédentes qu'il existe un nombre réel A tel que

$$(*) \qquad (1+e^{i\pi\alpha}) I_\alpha + i e^{i\pi\alpha} A = \frac{\pi^2}{2}\, e^{i\pi\alpha}\,.$$

(7) Multiplier $(*)$ par $e^{-i\pi\alpha}$, puis déterminer la valeur de I_α.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, et on suppose que la série $\sum c_n$ est convergente. D'autre part, on note $\mathbb{D}$ le disque unité,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}\,.$$

(1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est au moins égal à 1.

(2) Soit $(a_n)_{n\ge1}$ une suite de nombres complexes, et soit $(g_n)_{n\ge1}$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble $\mathbb{S} \subset \mathbb{D}$ tel que $1 \in \overline{\mathbb{S}}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite (a_n) tend vers 0;
- $\lim_{z\to 1} g_n(z) = 0$ pour tout $n \geq 1$;
- il existe une constante C telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n(z)| \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{S}$.

Montrer que la série $\sum a_n g_n(z)$ converge pour tout $z \in \mathbb{S}$ et qu'on a

$$\lim_{z\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(z) = 0\,.$$

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k$. Exprimer c_n à l'aide de R_n et R_{n+1}, puis montrer que

$$\forall z \in \mathbb{D} \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_n (z^n - z^{n-1})\,.$$

(4) Quelle est la limite de R_n quand $n \to \infty$?

(5) Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$. On note $\mathbb{S}(\alpha)$ l'ensemble de tous les nombres complexes $z \in \mathbb{D}$ s'écrivant sous la forme $z = 1 - re^{i\theta}$, où $0 < r \leq \cos\alpha$ et $|\theta| \leq \alpha$.

  (a) Dessiner $\mathbb{S}(\alpha)$.

  (b) On *admet* qu'il existe une constante C_α telle que $|z-1| \leq C_\alpha\,(1-|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\alpha)$. Montrer qu'on a $|z^n - z^{n-1}| \leq C_\alpha\,(|z|^{n-1} - |z|^n)$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\alpha)$, puis que

$$\forall z \in \mathbb{S}(\alpha) \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |z^n - z^{n-1}| \leq C_\alpha\,.$$

(6) Déduire des questions précédentes que pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, on a

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\mathbb{S}(\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,.$$

(7) Dans cette question, on prend $c_0 = 0$ et $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$. Justifier la convergence de la série $\sum c_n$, et calculer sa somme.

(8) *Question hors-barème.* Soit $\alpha \in [0, \pi/2[$.

  (a) Montrer que si $z = 1 - re^{i\theta} \in \mathbb{S}(\alpha)$, alors

$$2(1-|z|) \geq 1 - |z|^2 \geq 2r\cos\alpha - r^2 \geq r\cos\alpha.$$

  (b) Justifier l'existence de la constante C_α introduite en (5b).