DS du 16/03/2010

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un disque de rayon R. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale $\int_{\partial D} xdy - ydx$.
(2) Soit $\mathbb{D}$ le disque unité $\{|z| < 1\}$. Calculer $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z-2}$.
(3) Déterminer les fonctions entières f vérifiant $f(2^{-n}) = 8^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Soit f une fonction entière telle que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En appliquant le théorème de Liouville à e^f, montrer que f est constante.

Exercice 1. Soit $P(z) = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes. On note α et β les racines complexes de P, et on pose $r = \min(|\alpha|, |\beta|)$. Enfin, on pose

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^2 + az + b} \cdot$$

(1) Pourquoi la fonction f est-elle développable en série entière dans le disque $D = D(0, r)$? Dans la suite, on notera c_n les coefficients du développement en série entière de f dans le disque D.
(2) On suppose que $\alpha \neq \beta$. Décomposer $f(z)$ en éléments simples, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} \right) \cdot$$

(3) Dans cette question, on prend $P(z) = z^2 - 2z + 2$. Calculer le coefficient c_3.
(4) On revient au cas général. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$c_n + ac_{n-1} + bc_{n-2} = 0\,.$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx\,.$$

(1) Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{e^{iz}-iz-1}{z^3}$. Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = re^{it}$. Montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors
$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz - \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = -2i \int_\varepsilon^R \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx\,.$$
(2) Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ vérifie $|z| \geq 1$ et $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, alors $|f(z)| \leq \frac{3}{|z|^2}$, et en déduire la limite de $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ quand $R \to \infty$.
(3) Montrer qu'il existe une constante C vérifiant la propriété suivante : pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| \leq 1$, on peut écrire
$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \phi(w)\,,$$
où $|\phi(w)| \leq C|w|^3$. En déduire la limite de $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$ quand $\varepsilon \to 0$.
(4) Calculer l'intégrale I.

Exercice 3. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité $\{|z| < 1\}$ et soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$.

(1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$et si $r \in [0, 1[$, alors $\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{it})} e^{-int} dt = 0$. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $r \in [0, 1[$, on a
$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\left[f(re^{it})\right] e^{-int} dt\,.$$
(2) Pour $r \in [0, 1[$, exprimer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{it})\right] dt$ en fonction de c_0.
(3) On suppose qu'on a $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
   (a) Déduire de (1) et (2) qu'on a $|c_n| \leq 2\mathrm{Re}(c_0)$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a
$$|f(z) - f(0)| \leq 2\mathrm{Re}(f(0)) \frac{|z|}{1 - |z|}\,.$$

Exercice 4. Dans tout l'exercice, on note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{U}$ et holomorphe dans U. On suppose que f est bornée sur la frontière de U (notée ∂U), et on pose $M = \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial U\}$. On suppose également qu'il existe un nombre $\alpha \in [0, 1[$ et une constante C tels que
$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}$$
pour tout $z \in U$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

(1) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le principe du maximum?

(2) Soit β vérifiant $\alpha < \beta < 1$. On définit z^β dans $\overline{U}$ en prenant l'argument de z dans $]-\pi, \pi]$ si $z \neq 0$, et en posant $0^\beta = 0$. Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\mathrm{Re}(z^\beta) \geq \delta |z|^\beta$$
pour tout $z \in \overline{U}$.

(3) Soit toujours β vérifiant $\alpha < \beta < 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : \overline{U} \to \mathbb{C}$ par
$$f_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon z^\beta} f(z)\,.$$

   (a) Montrer qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \overline{U}$, et déduire de (2) qu'on a aussi $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.

   (b) Montrer que si $z \in U$ et si $R > |z|$, alors $|f_\varepsilon(z)| \leq \max(M, M_\varepsilon(R))$, où $M_\varepsilon(R) = \sup\{|f_\varepsilon(\xi)|;\ \xi \in U \cap \partial D(0, R)\}$.

   (c) En déduire qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

(4) Démontrer le résultat souhaité.