L3-M1 Variable complexe

DS du 17/2/09

Duree : 3h

Questions de cours

(1) Énoncer le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy.

(2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

(a) Donner l'expression de $f(z)$ à l'aide des coefficients c_n.

(b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, on a

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \,.$$

(3) Que peut-on dire d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(1/n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'il existe deux constantes (positives) A et C telles que

$$(*) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \ : \ |f(z)| \le A\, e^{C|z|}.$$

(1) Montrer qu'on a $|c_n| r^n \le A e^{Cr}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.

(2) En déduire qu'on a $|c_n| \le A(\frac{Ce}{n})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (*On pourra étudier la fonction* $r \mapsto r^{-n} e^{Cr}$.)

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n^n}{n!}$. Déterminer la limite de u_{n+1}/u_n quand $n \to \infty$.

(4) Déduire de (2) et (3) que la série entière $\sum n! c_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$.

(5) Pour $|w| > C$, on pose

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{w^{n+1}} \,.$$

Justifier la définition, puis montrer que pour toute fonction entière h et pour tout $r > C$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n h^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} g(w) h(w)\, dw \,.$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

(1) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) = \alpha e^{it}$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz - \int_{\gamma_R} g(z)\,dz &= 2\int_\varepsilon^R \frac{\cos(2x)-1}{x^2}\,dx \\ &= -4\int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,.\end{aligned}$$

(2) Montrer que si $R > 0$ et $t \in [0,\pi]$, alors $|e^{2iRe^{it}} - 1| \leq 2$. En déduire qu'on a $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0$.

(3) Pour $w \in \mathbb{C}^*$ fixé, déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w}\right)$, et montrer également que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a

$$\left|\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(\varepsilon|w|)^{n-1}}{n!} \leq \frac{1}{|w|}\,e^{2|w|}\,.$$

En déduire la limite de l'intégrale $\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz$ quand $\varepsilon \to 0$.

(4) Calculer l'intégrale I.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. On suppose que f s'annule en des points $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$, avec multiplicités $m_1, \ldots, m_N$. Enfin, on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial\mathbb{D}\}$.

(1) Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit $\varphi_a : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ par $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Justifier la définition et montrer qu'on a $|\varphi_a(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in \partial\mathbb{D}$.

(2) Montrer qu'il existe une fonction $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que

$$\forall z \in \overline{\mathbb{D}}\ :\ f(z) = \varphi_{a_1}(z)^{m_1} \cdots \varphi_{a_N}(z)^{m_N} g(z)\,.$$

(3) Majorer $|g(\xi)|$ en fonction de $\|f\|_\infty$ pour $\xi \in \partial\mathbb{D}$, et en déduire l'inégalité

$$|f(0)| \leq |a_1|^{m_1} \cdots |a_N|^{m_N} \|f\|_\infty\,.$$