Corrig succint du DS du 17/2/09

Questions de cours

(1) Voir le cours.

(2a) $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$.

(2b) *Première possibilité.* On part de la formule de Cauchy (dérivée n fois), qui s'écrit
$$n! c_n = f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$
En paramétrant le cercle, $z = re^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta} d\theta$, on obtient la formule voulue (refaire le détail du calcul, cf cours).

Deuxième possibilité. On part de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$. D'après (2a), on a
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^\infty c_k r^k e^{ik\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta\,.$$
Comme la série converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut permuter la somme et l'intégrale, ce qui donne
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=0}^\infty c_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta\,.$$
Comme l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta$ vaut 0 si $k \neq n$ et 2π si $k = n$, on en déduit $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 2\pi c_n r^n$.

(3) Comme $1/n \to 0$, le point 0 est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de f. Donc $f = 0$, d'après le principe des zéros isolés.

Exercice 1.

(1) D'après la question de cours (2b), on a
$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta\,,$$
et donc
$$\begin{aligned} |c_n r^n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A e^{cr} d\theta = A e^{cr}. \end{aligned}$$

(2) Par (1), on a $|c_n| \leq Ar^{-n}e^{Cr} = A\phi(r)$, et la majoration est la meilleure possible si $\phi(r)$ est le plus petit possible. La fonction ϕ est dérivable sur $]0,\infty[$, avec $\phi'(r) = Ce^{Cr}r^{-n} - nr^{-n-1}e^{Cr} = e^{Cr}r^{-n}(C - n/r)$. On a donc $\phi'(r) = 0$ pour $r = n/C$, et il s'agit bien d'un minimum (*vérifier*). En reportant la valeur $r = n/C$ dans l'inégalité $|c_n| \leq Ar^{-n}e^{Cr}$, on obtient $|c_n| \leq A(C/n)^n e^n = A(Ce/n)^n$.

(3) On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$. Comme $\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$, on en déduit $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = e$.

(4) Comme $|c_n| \leq A(Ce/n)^n$ par (2), le rayon de convergence de la série entière $\sum n!c_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum n!A(Ce/n)^n z^n$ (*plus les coefficients sont petits, plus le rayon de convergence de la série est grand*). Si on pose $a_n = n!A(Ce/n)^n$, alors $a_n = A(ce)^n n!/n^n = A(Ce)^n/u_n$, où u_n été défini dans (3). On a donc $a_{n+1}/a_n = Ceu_n/u_{n+1}$, et donc $a_{n+1}/a_n \to C$ d'après (3). On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est égal à $1/C$, et donc que celui de la série $\sum c_n z^n$ est supérieur ou égal à $1/C$.

(5) Si $|w| > C$, alors $|1/w| < 1/C$, donc la série $\sum n!c_n(1/w)^n$ converge, et donc $g(w) = \frac{1}{w}\sum_0^\infty \frac{n!c_n}{w^n}$ est bien défini. De plus, la série définissant g converge normalement sur tout ensemble du type $\{|w| \geq r\}$, $r > C$, car la série entière $\sum n!c_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0,\rho)$, $\rho < 1/C$. Si h est une fonction entière et si $r > 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\partial D(0,r)} g(w)h(w)\,dw &= \int_{\partial D(0,r)} h(w)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!c_n}{w^{n+1}}\right)dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!c_n \int_{\partial D(0,r)} \frac{h(w)}{w^{n+1}}\,dw\,,\end{aligned}$$

où l'interversion de la somme et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de la série sur $\partial D(0,r)$. Comme de plus $n!\int_{\partial D(0,r)}\frac{h(w)}{w^{n+1}}\,dw = 2i\pi h^{(n)}(0)$ d'après la formule de Cauchy, on obtient bien la résultat souhaitée.

Exercice 2.

(1) La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, donc holomorphe au voisinage de la demi-couronne $K_{\varepsilon,R} = \{\varepsilon \leq |z| \leq R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ (*faire le dessin!!*). D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} g(z)\,dz = 0$. Autrement dit :

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz - \int_{\gamma_R} g(z)\,dz &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{-2ix}-1}{x^2}\,dx \\
&= 2\int_\varepsilon^R \frac{\cos(2x)-1}{x^2}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième identité, il suffit de se souvenir de la formule $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$.

(2) On a $|e^{2iRe^it}| = e^{\mathrm{Re}(2iRe^it)} = e^{-2R\sin t} \leq 1$ car $\sin t \geq 0$ sur $[0,\pi]$. Par conséquent, $|e^{2iRe^it}-1| \leq |e^{2iRe^it}|+1 \leq 2$.

Comme $\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{2iRe^it}}{R^2e^{2it}}\,iRe^{it}dt$, on en déduit

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{2}{R^2}\,R\,dt = \frac{2\pi}{R}\,,$$

et donc $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0$.

(3) Comme la fonction exponentielle est holomorphe et que sa dérivée en 0 vaut 1, on a $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$. Donc $\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w} = 2i\,\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{2i\varepsilon w} \to 2i$ quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, comme $e^{2i\pi w} = \sum_0^\infty \frac{(2i\pi w)^n}{n!}$, on a

$$\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(2i)^n(\varepsilon w)^{n-1}}{n!}\,,$$

et donc, si $\varepsilon \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w}\right| &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n(\varepsilon|w|)^{n-1}}{n!} \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n|w|^{n-1}}{n!} \\
&= \frac{1}{|w|}\sum_{n=0}^\infty \frac{2^n|w|^n}{n!} = \frac{1}{|w|}\,e^{2|w|}\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a $\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{2i\varepsilon e^{it}}-1}{\varepsilon^2e^{2it}}\,i\varepsilon e^{it}\,dt = i\int_0^\pi \frac{e^{2i\varepsilon e^{it}}-1}{\varepsilon e^{it}}\,dt$. D'après ce qui précède appliqué à $w = e^{it}$, le terme sous l'intégrale tend vers $2i$ quand $\varepsilon \to 0$, et il est majoré en module par e, constante (donc intégrable sur $[0,\pi]$) indépendante de ε. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = i\times\int_0^\pi 2idt = -2\pi\,.$$

(4) En faisant tendre ε vers 0 et R vers l'infini dans l'identité

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz - \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = -4\int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,,$$

on obtient, grâce à (2) et (3) :

$$-2\pi - 0 = -4I\,,$$

et donc $I = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.

(1) Fait en TD.

(2) Par définition de la multiplicité d'un zéro, il existe une fonction h_1 holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $f(z) = (z-a_1)^{m_1} h_1(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, comme $a_1 \notin \partial\mathbb{D}$ et comme f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on peut prolonger g_1 en une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ en posant $h_1(\xi) = f(\xi)/(z-a_1)^{m_1}$ pour $\xi \in \partial\mathbb{D}$. La fonction h_1 a un zéro d'ordre m_2 en a_2 donc, de la même façon, on peut écrire $h_1(z) = (z-a_2)^{m_2} h_2(z)$, où h_2 est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. Alors $f(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2} h_2(z)$. En répétant N fois ce raisonnement, on obtient une fonction $h = h_N$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $f(z) = (z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_N)^{m_N} h(z)$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Il suffit alors de poser $g(z) = h(z) \times (1-\overline{a_1}\,z)\cdots(1-\overline{a_N}\,z)$.

(3) Si $\xi \in \partial\mathbb{D}$, alors $|g(\xi)| = |f(\xi)|$ d'après (1), et donc $|g(\xi)| \leq \|f\|_\infty$. D'après le principe du maximum, on a $|g(0)| \leq \sup_{\xi\in\partial\mathbb{D}} |g(\xi)| \leq \|f\|_\infty$, et comme $f(0) = g(0) \times \varphi_{a_1}(0)\cdots\varphi_{a_N}(0) = g(0) \times (-a_1)\cdots(-a_N)$, on en déduit

$$|f(0)| \leq |a_1|^{m_1}\cdots|a_N|^{m_N}\|f\|_\infty\,.$$