Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Topologie*

# Examen du 9 Juin 2016

*Durée : 4h*

## Questions de cours.

(1) Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $(u, \lambda) \mapsto \lambda u$ est continue de $E \times \mathbb{K}$ dans $E$.

(2) Soit $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ e^{xy} \neq z^4 + y^6 \text{ et } x^8 + \cos(6 + x^4 + y^2 - \pi z^7) < 1321\}$. Montrer que $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer que si $A$ et $B$ sont des parties de $E$, alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer également qu'on peut avoir $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ (*Donner un exemple avec* $E = \mathbb{R}$.)

(4) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$, l'espace des fonction continues sur $[0, 1]$ (à valeurs complexes) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et soit $\Phi : E \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) = u(1/3) - 2u(1/2) - \int_0^{1/4} e^t u(t)\, dt$. Montrer que $\Phi$ est continue.

(5) Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, muni de sa norme naturelle. Montrer que si $F$ est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

(6) Énoncer et démontrer le théorème du point fixe.

(7) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

(8) Soient $K$ et $Y$ deux espaces métriques, avec $K$ compact. Soit également $C$ un fermé de $K \times Y$. On pose $F := \{y \in Y;\ \exists x \in K\ :\ (x, y) \in C\}$. Montrer que $F$ est un fermé de $Y$.

(9) Soit $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\ ,\ y > 0 \text{ et } xy > 6\}$. Montrer que si $K \subseteq \Omega$ est compact, alors il existe une constante $\alpha > 6$ telle que $\forall (x, y) \in K\ :\ y \geq \frac{\alpha}{x}\cdot$

(10) Montrer que $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ e^{|x|} + y^4 \leq 6\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Qu'en est-il de $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ e^x + y^4 \leq 6\}$?

(11) Montrer que si $E$ et $F$ sont deux espaces métriques connexes, alors $E \times F$ est connexe; et que si $E$ et $F$ sont connexes par arcs, alors $E \times F$ est connexe par arcs.

(12) Soit $E$ un espace métrique connexe, et soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ à coefficients complexes) tel que $\forall u \in E\ :\ P(f(u)) = 0$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 1.** Dans tout l'exercice, $(E,d)$ est un espace métrique et $f : E \to E$ est une application continue.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = f^n(E)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$. Montrer que la suite $(C_n)$ est décroissante.

(2) Dans cette question, on suppose que $E$ est compact, et on pose $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.
   (a) Montrer que $C$ est compact et non vide.
   (b) Montrer que si $x_0$ est un point quelconque de $E$, alors toutes les valeurs d'adhérences de la suite $(f^n(x_0))_{n\geq 1}$ appartiennent à $C$.
   (c) Montrer que $f(C) = C$. (*Pour l'inclusion $C \subseteq f(C)$, on pourra commencer par observer que si $x \in C$, alors on peut trouver une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ telle que $x_k \in C_k$ et $x = f(x_k)$ pour tout $k \geq 1$*).

(3) Dans cette question, on suppose que $E$ est compact et qu'on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.
   (a) On note $\operatorname{diam}(C)$ le diamètre de $C$ ($\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(u,v);\ u,v \in C\}$). Pourquoi peut-on trouver $u, v \in C$ tels que $d(u,v) = \operatorname{diam}(C)$?
   (b) Montrer à l'aide de (a) et de (2c) que $\operatorname{diam}(C) = 0$ (*et donc que $C$ est réduit à un point*).
   (c) Montrer que $f$ possède un unique point fixe, et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(f^n(x_0))_{n\geq 1}$ converge vers ce point fixe.

(4) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Montrer qu'on a $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ pour tous $x, y$ tels que $x \neq y$ (*penser au théorème des accroissements finis*), mais que $f$ ne possède pas de point fixe.

**Exercice 2.** Soient $(E,d)$ et $(F,d)$ deux espaces métriques, et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues, $T_n : E \to F$. On fait l'hypothèse suivante : pour tous ouverts non vides $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$, il existe un entier $n$ tel que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(1) Pour tout ouvert $V \subseteq F$, on pose $\mathcal{O}_V = \{x \in E;\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ T_n(x) \in V\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{O}_V$ est un ouvert de $E$
   (b) Montrer que $\mathcal{O}_V$ est dense dans $E$.

(2) Dans cette question, on suppose que $(E,d)$ est *complet*. Déduire de (1) que si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'ouverts non vides de $E$, alors l'ensemble $\mathcal{G} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_{V_i}$ est non vide.

(3) Dans cette question, on suppose que l'espace $F$ est *séparable*, et on fixe un ensemble $D \subseteq F$ dénombrable et dense dans $F$. Pour $z \in D$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_{z,k} = B(z, \frac{1}{k})$. Montrer que pour tout ouvert non vide $V \subseteq F$, on peut trouver $(z,k) \in D \times \mathbb{N}^*$ tel que $V_{z,k} \subseteq V$.

(4) On suppose que $F$ est séparable et que $(E,d)$ est complet. Déduire de (2) et (3) qu'il existe un point $x \in E$ tel que l'ensemble $\{T_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $E$.