Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Topologie*

Examen du 5 Juin 2015

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit E un espace métrique, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On suppose que la suite (u_k) est de Cauchy. Montrer que si (u_k) possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

(2) On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites de nombres réels $x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_0^\infty |x(i)| < \infty$. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(3) Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de sa norme naturelle. Montrer que si $h \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|h\| < 1$, alors $Id - h$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$.

(4) Soit E un espace métrique, et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur E, à valeurs réelles. On suppose que les f_n sont toutes M-lipschitziennes, pour une certaine constante M indépendantes de n, et que $f_n(z) \to 0$ pour tout $z \in D$, où D est une partie dense de E. Montrer que $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$.

(5) Montrer que $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^8 + y^6 + z^2 \leq 600\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$. Qu'en est-il de $L := \{(x, y, z);\ x^2 + 3y^4 + 2z^3 \leq 1\}$?

(6) Soit E un espace vectoriel normé. Pour $A, B \subseteq E$, on pose

$$A + B := \{x + y;\ x \in A\,,\ y \in B\}\,.$$

Montrer que si A est compact et si B est fermé dans E, alors $A + B$ est un fermé de E.

(7) Soit E un espace vectoriel normé, et soit $Z \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que pour tout $a \in E$, on peut trouver $z \in Z$ tel que $\|z - a\| = d(a, Z)$.

(8) Soient E et F deux espaces métriques et soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que si $C \subseteq E$ est connexe, alors $f(C)$ est une partie connexe de F.

(9) Énoncer et démontrer le théorème du point fixe.

(10) Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, E et F sont deux espaces métriques. On suppose que E est *localement connexe*, ce qui signifie que tout point $a \in E$ possède une base de voisinages formée d'ensembles connexes. On se donne une application $f : E \to F$, et on suppose que f possède les propriétés suivantes :

- f change les compacts en compacts (pour tout compact $K \subseteq E$, l'ensemble $f(K)$ est compact);
- f change les connexes en connexes (pour tout ensemble connexe $C \subseteq E$, l'ensemble $f(C)$ est connexe).

Le but de l'exercice est de montrer que l'application f est continue.

(1) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E convergeant vers un point $a \in E$, alors l'ensemble $\{a\} \cup \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E.

(2) On suppose que f est discontinue en un certain point $a \in E$.

 (a) Montrer à l'aide de (1) qu'on peut trouver une suite (x_k) tendant vers a telle que $f(x_k)$ converge dans F vers un point $b \neq f(a)$.

 (b) On pose $\delta := d(f(a), b)$. Montrer que pour tout voisinage U de a, on a
$$\sup\{d(v, b);\ v \in f(U)\} \geq \delta \quad \text{et} \quad \inf\{d(v, b);\ v \in f(U)\} = 0\,.$$

 (c) En déduire que pour tout voisinage *connexe* U de a et pour tout $\varepsilon \in]0, \delta[$, on peut trouver un point $u \in U$ tel que $d(f(u), b) = \varepsilon$.

(3) On suppose toujours que f est discontinue en un certain point $a \in E$, et on garde les notations de (2).

 (a) Déduire de (2c) qu'on peut trouver une suite $(u_n) \subseteq E$ telle que $u_n \to a$ et $f(u_n) \to b$, avec de plus $f(u_n) \neq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 (b) En déduire une contradiction en considérant $K := \{a\} \cup \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, (E, d) est un espace métrique et Z est un fermé non vide de E. On se donne également une fonction $f : Z \to \mathbb{R}$ continue bornée. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue $\widetilde{f}$ définie sur E tout entier.

(1) Montrer que sans perte de généralité, on peut supposer qu'on a
$$f(z) \geq 1 \qquad \text{pour tout } z \in Z.$$

(2) Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $(\phi_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions M-lipschitziennes sur E, à valeurs réelles positives, alors la fonction $\phi := \inf_{i\in I} \phi_i$ est M-lipschitzienne. En déduire que la fonction $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(x) := \inf\{f(z)d(x, z);\ z \in Z\}$$
est lipschitzienne. Dans la suite, on notera $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :
$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Z \\ \frac{\Phi(x)}{d(x,Z)} & \text{si } x \notin Z \end{cases}$$

(3) Montrer que $\widetilde{f}$ est bien définie et continue en tout point de $E \setminus Z$.

(4) Soit $a \in Z$, et soit (x_n) une suite de points de $E \setminus Z$ convergeant vers a.

(a) Montrer qu'on peut trouver une suite (z_n) de points de Z telle que $\frac{d(x_n,z_n)}{d(x_n,Z)} \to 1$.

(b) Montrer que la suite (z_n) tend vers a.

(c) On pose $\varepsilon_n := 2^{-n} d(x_n, Z)$. Montrer qu'il existe une suite (z'_n) de points de Z telle que

$$f(z'_n) d(x_n, z'_n) \leq \Phi(x_n) + \varepsilon_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(d) En se souvenant que $f(z'_n) \geq 1$ et en observant que $\Phi(x_n) \leq f(a) d(x_n, a)$, montrer que la suite (z'_n) tend vers a.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{f}(x_n) \leq \frac{d(x_n, z_n)}{d(x_n, Z)} f(z_n) \qquad \text{et} \qquad f(z'_n) \leq \widetilde{f}(x_n) + 2^{-n}.$$

(f) Montrer que $\widetilde{f}(x_n)$ tend vers $f(a)$.

(5) Conclure.

Exercice 3. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une suite croisante (λ_n) de réels strictement positifs tendant vers l'infini et vérifiant $\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}/\lambda_n) = 1$, telle que l'ensemble $A = \{x \geq 0;\ \lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n x) = 0\}$ est d'intérieur non-vide.

(1) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $F_N := \{x \in [0, \infty[;\ \forall n \geq N\ :\ |f(\lambda_n x)| \leq \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que F_{N_0} contient un intervalle ouvert non trivial $I =]a, b[$.

(b) Montrer qu'il existe un entier $N \geq N_0$ tel que $\lambda_{n+1} a < \lambda_n b$ pour tout $n \geq N$, puis montrer que l'ensemble $\bigcup_{n \geq N}]\lambda_n a, \lambda_n b[$ contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$.

(2) Montrer qu'on a $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.