Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Topologie*

Examen du 19 Décembre 2014

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit E un espace métrique, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. Soit également $a \in E$. On suppose que toute sous-suite de (u_k) possède une sous-suite qui converge vers a. Montrer que la suite (u_k) converge vers a.

(2) Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de $M_N(\mathbb{R})$, et que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé.

(3) Soit E un espace métrique séparable. Montrer que toute famille d'ouverts non vides de E deux à deux disjoints est dénombrable.

(4) Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit (u_k) une suite d'éléments de E. On suppose que la série $\sum d(u_k, u_{k+1})$ est convergente. Montrer que la suite (u_k) converge dans E.

(5) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de sa norme naturelle. Montrer que si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

(6) Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^4 + z^6 \leq 37\}$. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^3$.

(7) Montrer que le produit de deux espaces métriques compacts est compact (pour la distance produit).

(8) Soit (E, d) un espace métrique, et soient K, L deux parties compactes de E telles que $K \cap L = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u \in K\ \forall v \in L\ \ :\ \ d(u, v) \geq \alpha\,.$$

(9) Soient E et F deux espaces métriques et soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer *en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue* (recouvrements ouverts) que si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

(10) Montrer que $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ est connexe, et en déduire qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé, et soit K une partie *compacte convexe* de E, avec $K \neq \emptyset$. Soit également $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne.

(1) On fixe un point $x_0 \in K$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit une application $f_n : K \to E$ par
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\, x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)\,.$$
Montrer que f_n possède un unique point fixe dans K.

(2) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur K.

(3) Montrer que f possède un point fixe dans K.

Exercice 2. Dans cet exercice, on note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites de nombres réels $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum u(i)$ est *absolument* convergente. On munit $\ell^1(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par
$$\|u\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |u(i)|\,.$$
Enfin, on pose $K = \{u \in \ell^1(\mathbb{N});\ |u(i)| \leq 2^{-i} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}$. Le but de l'exercice est de montrer que K est un compact de $\ell^1(\mathbb{N})$.

(1) En observant que $K = \prod_{i\in\mathbb{N}} K_i$, où $K_i = [-2^{-i}, 2^{-i}]$, montrer que toute suite (u_k) d'éléments de K possède une sous-suite qui converge coordonnée par coordonnée vers un élément u de K.

(2) Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$. On suppose que (v_k) converge coordonnée par coordonnée vers un élément u de $\ell^1(\mathbb{N})$, et que de plus l'ensemble $\{v_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est **équisommable**, ce qui signifie que la propriété suivante a lieu :
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall k \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{i>N} |v_k(i)| \leq \varepsilon\,.$$
Montrer que (v_k) converge vers u *pour la norme* $\|\cdot\|_1$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 3. Soit (M, d) un espace métrique. On suppose que M est *dénombrable*. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une injection continue de M dans $\mathbb{R}$.

(1) On note $\ell^\infty(M)$ l'espace de toutes les fonctions bornées de M dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathcal{C}_b(M)$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(M)$ constitué par les fonctions *continues* bornées. Montrer que $\mathcal{C}_b(M)$ est fermé dans $\ell^\infty(M)$. Pourquoi peut-on en déduire que $\mathcal{C}_b(M)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(2) Soit E un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel de E, avec $F \neq E$. On pose $\mathcal{O} = E \setminus F$.

(a) On fixe $a \in E \setminus F$. Montrer que si $u \in E$ est quelconque, alors ou bien $u \in \mathcal{O}$, ou bien $u + 2^{-k}\, a \in \mathcal{O}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $\mathcal{O}$ est dense dans E.

(3) Pour $u, v \in M$, on pose
$$\mathcal{O}_{u,v} = \{f \in \mathcal{C}_b(M);\ f(u) \neq f(v)\}\,.$$
Déduire de (2b) que si $u \neq v$, alors $\mathcal{O}_{u,v}$ est dense dans $\mathcal{C}_b(M)$.

(4) On pose $\Lambda = \{(u,v) \in M \times M;\ u \neq v\}$. En utilisant le théorème de Baire (dont on vérifiera soigneusement toutes les hypothèses), montrer que l'ensemble $\mathcal{G} = \bigcap_{(u,v)\in\Lambda} \mathcal{O}_{u,v}$ est dense dans $\mathcal{C}_b(M)$.

(5) Conclure.

Exercice 4. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$ continue. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction *continue* $\delta : E\times\,]0,\infty[\to]0,\infty[$ telle que pour tout $(x,\varepsilon) \in E\times\,]0,\infty[$, le nombre $\delta(x,\varepsilon)$ est un "δ de continuité au point x associé à ε"; autrement dit :
$$\forall y \in E\ :\ d_E(x,y) < \delta(x,\varepsilon) \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

(1) Montrer que l'ensemble
$$C = \{(x,y,\varepsilon) \in E \times E\times]0,\infty[\ :\ d_F(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}\,.$$
est un fermé de $E \times E\times]0,\infty[$.

(2) On munit $E \times E\times]0,\infty[$ de la distance produit, que l'on note ρ, et on définit $\delta : E\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ par
$$\delta(x,\varepsilon) = \mathrm{dist}_\rho((x,x,\varepsilon), C)\,.$$
Montrer qu'on a $\delta(x,\varepsilon) > 0$ pour tout $(x,\varepsilon) \in E\times]0,\infty[$.

(3) Vérifier qu'on a $d_E(x,y) = \rho((x,x,\varepsilon),(x,y,\varepsilon))$ pour $x, y \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, puis montrer que la fonction δ convient.

(4) Utiliser le résultat obtenu (*i.e.* la fonction δ), pour montrer que si E est compact, alors f est uniformément continue.