

**“TEST DE POSITIONNEMENT”**

Durée : 2h

*Calculatrices non autorisées*

- (1) Mettre  $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$  sous forme d'une fraction réduite.
- (2) Simplifier  $\frac{9^{31}}{3^{60}}$ .
- (3) Écrire  $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$  sans racines au dénominateur.
- (4) Trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels qu'on ait  $\frac{x+5}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  différent de 2 et  $-2$ .
- (5) Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- (6) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1) = \sin(2x)$ .
- (7) Tracer les droites d'équation  $3x+2y = 6$  et  $2x-y = 2$  dans un même repère orthonormé, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection
- (8) Résoudre l'équation  $x^2 + x - 3 = 0$ .
- (9) Mettre  $z = 1 + i\sqrt{3}$  sous la forme  $re^{i\theta}$ .
- (10) Tracer le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ .
- (11) Déterminer les domaines de définition des fonctions  $f(x) = \ln(x+3)$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$ .
- (12) Quelle est la limite de  $(3x^{45} + 56)e^{-x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ?
- (13) Déterminer la limite de  $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2x^3 - x - 6}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- (14) Calculer les dérivées des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies par  $f(x) = e^x + \ln(x)$ ,  $g(x) = x^5 \cos(x)$  et  $h(x) = \sin(3x)$ .
- (15) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, et soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Écrire l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$ .
- (16) Étudier les variations de la fonction  $x \mapsto \sin x - x$  et en déduire que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $\sin x \leq x$ .
- (17) Étudier la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-x^2}$ .
- (18) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle  $y'(x) = 5y(x)$ ?
- (19) Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1 - x + x^3) dx$ .
- (20) On munit le plan d'un repère orthonormé. Calculer la distance entre les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(2, 2)$  et  $(3, 4)$ . (*Ne pas faire de figure sur la copie*).
- (21) On munit le plan d'un repère orthonormé, et on note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points de coordonnées respectives  $(1, 2)$ ,  $(-1, 1)$  et  $(2, 5)$ . Déterminer l'équation de la droite passant par  $C$  et perpendiculaire à  $(AB)$ . (*Ne pas faire de figure sur la copie*).
- (22) Si on multiplie par 2 les dimensions d'une boîte cubique, par combien multiplie-t-on son volume? (*Justifier*).
- (23) Soit  $a \geq 0$ . Montrer par récurrence qu'on a  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (24) Montrer qu'on a  $1 \leq 2\sqrt{x} - 1 \leq x$  pour tout  $x \geq 1$ . En déduire que la suite définie par  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$  est convergente, puis déterminer sa limite.
- (25) En lançant 3 dés, quelle est la probabilité d'obtenir 3 chiffres qui se suivent? (*Justifier*).