# Examen du 19 Mai 2021

*Durée : 3h*

*Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

## Questions de cours

(1) Un paquet de dragibus contient 20% de dragibus rouges, 30% de dragibus noirs et 50% de dragibus bleus. On sait que 70% des dragibus rouges, 40% des dragibus noirs et 15% des dragibus bleus sont empoisonnés. Déterminer la probabilité qu'un dragibus soit bleu sachant qu'il est empoisonné.

(2) Soit $X$ une variable aléatoire réelle uniformément distribuée sur l'intervalle $]0,1[$. Déterminer la loi de $Y := -\ln(X)$.

(3) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

(4) Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On suppose que $\forall t \geqslant 1 \ : \ \mathbb{P}(|X| > t) \leqslant 1/t^3$. Montrer que $X \in L^2$.

(5) Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(6) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que les $X_n$ sont dans $L^p$ pour un certain $p > 1$, et que la suite $(X_n)$ est bornée dans $L^p$. Pour $a > 0$, majorer $\mathbb{P}(|X_n| > a)$ en fonction de $\|X_n\|_p$ ; puis montrer que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{ps}} 0$.

(7) Montrer que la convergence en norme $L^1$ entraine la convergence en probabilité, et que la convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

(8) Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n$ une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Montrer que $(Z_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

(9) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. En déduire que si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m = m_X + m_Y$ et $\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

**Exercice 1.** Le but de l'exercice est de donner une preuve "probabiliste" de la formule
$$\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u^2}\,du = \frac{\pi^2}{8}\cdot$$

(1) Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\rho(t) := \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(t)$. Vérifier que $\rho$ est une densité lebesguienne.

(2) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, strictement positives, et suivant toutes les deux la loi $\rho(t)dt$. Montrer que $U := X/Y$ suit la loi $q(u)du$, où $q(u) := \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\ln(u)}{u^2-1}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(u)$. (*L'identité* $\frac{1}{(1+y^2)(1+u^2y^2)} = \frac{1}{1-u^2}\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{u^2}{1+u^2y^2}\right)$ *pourra être utile.*)

(3) Montrer qu'on a $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ ; en déduire que $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2}$ ; puis démontrer la formule souhaitée.

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle, et soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires ayant toutes la même loi que $X$. Soit également $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, on note $Z$ la variable aléatoire définie par
$$Z(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1 + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

(1) Justifier l'identité
$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=n\}} S_n.$$

(2) On suppose que $N$ est indépendante des $X_i$. Montrer que si $X$ et $N$ sont dans $L^1$, alors $Z \in L^1$ et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$.

**Exercice 3.** Soit $\theta > 0$, et soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires réelles indépendantes et uniformément distribuées sur $]0,\theta[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Déterminer la fonction de répartition de $M_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Justifier que $\mathbb{P}(M_n < x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x)$ et $\mathbb{P}(M_n > x) = \mathbb{P}(M_n \geqslant x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que $M_n \xrightarrow{\text{ps}} \theta$. (*Il sera utile d'observer que* $|M_n - \theta| = \theta - M_n$ *ps.*)

(4) Montrer que $Z_n := \frac{n(\theta - M_n)}{M_n}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ dont on déterminera la loi.