L3 Probabilités

Examen du 17 Mai 2018

Durée : 3h

Remarques. Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Si X est une va réelle, on note F_X sa fonction de répartition et φ_X sa fonction caractéristique.

Questions de cours.

(1) Soit X une va uniformément distribuée sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$.

(2) Soit X une va réelle. Montrer que si F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors X est à densité. La réciproque est-elle vraie?

(3) Soient X et Y deux va indépendantes, strictement positives, et de même loi. Montrer que les va (X, Y) et (Y, X) ont la même loi, et en déduire que $\mathbb{E}(\frac{X}{X+Y}) = \mathbb{E}(\frac{Y}{X+Y}) = \frac{1}{2}\cdot$

(4) Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance d'une va suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, et la variance d'une va suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

(5) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va réelles appartenant à L^2. On suppose que la suite (X_n) est bornée dans L^2. Montrer que $\frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\text{ps}} 0$ pour tout $\alpha > 1/2$.

(6) Soit X une va réelle telle que $X \geq 1$ ps. On suppose qu'il existe une constante A telle que $\forall s \geq 1 \quad : \quad \mathbb{P}(X > s) \leq \frac{A}{s}\cdot$ Montrer que la va $Y = \log(X)$ appartient à L^p pour tout $p < \infty$.

(7) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, continue au point $m = \frac{a+b}{2}\cdot$ En appliquant convenablement la loi des grands nombres, montrer que $\frac{1}{(b-a)^n} \int_{[a,b]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$ tend vers $f(m)$ quand $n \to \infty$.

(8) On joue une infinité de fois à pile ou face. Pour $n \geq 1$, on note S_n le nombre de "piles" obtenus après n lancers. En utilisant le Théorème Limite Central, montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n})$ admet une limite L à déterminer quand $n \to \infty$.

(9) En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres à préciser.

Exercice 1. Soit X une va à valeurs dans $[-1,1]$ et telle que $\mathbb{E}(X)=0$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $r>0$, on a

$$\mathbb{P}(|X|\geq r)\leq 2e^{-r^2/2}.$$

(1) En utilisant par exemple la convexité de l'exponentielle, montrer que pour tout $x\in[-1,1]$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $e^{tx}\leq \frac{1-x}{2}\,e^{-t}+\frac{1+x}{2}\,e^{t}$.
(2) En déduire que pour tout $\lambda>0$, on a $\mathbb{E}(e^{\lambda X})\leq e^{\lambda^2/2}$ et $\mathbb{E}(e^{-\lambda X})\leq e^{\lambda^2/2}$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Cauchy $\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}$. Pour $n\geq 1$ on pose $M_n=\max(X_1,\dots,M_n)$. Calculer la fonction de répartition de M_n, puis montrer que la suite $(\frac{M_n}{n})$ converge en loi vers une va $Z>0$ telle que $\frac{1}{Z}$ suit une loi exponentielle de paramètre à déterminer. (*On pourra se souvenir que* $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$ *pour tout* $x>0$.)

Exercice 3. Soit X une va réelle appartenant à L^1, d'espérance $\mathbb{E}(X)=c\geq 0$, et soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1]$ telle que $p_n\to 0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on se donne une va N_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_j et suivant une loi géométrique de paramètre p_n, *i.e.* $\mathbb{P}(N_n=k)=(1-p_n)^{k-1}p_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_k=X_1+\cdots+X_k$, et pour $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$Z_n(\omega)=p_n\,S_{N_n(\omega)}(\omega)=p_n\big(X_1(\omega)+\cdots+X_{N_n(\omega)}(\omega)\big).$$

(1) Justifier que les Z_n sont des va.
(2) Soit $n\in\mathbb{N}$. En observant que $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_n=k\}$, montrer que pour toute fonction borélienne bornée $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, on peut écrire

$$\mathbb{E}\big(f(Z_n)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_n=k)\mathbb{E}(f(p_nS_k)).$$

(3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{Z_n}(t)=\frac{p_n\varphi_X(tp_n)}{1-(1-p_n)\varphi_X(tp_n)}.$$

(4) En utilisant le développement limité de φ_X à l'ordre 1 en 0, montrer que si $c=0$, alors la suite (Z_n) converge en loi vers 0, et que si $c>0$, alors (Z_n) converge en loi vers une va Z suivant la loi exponentielle de paramètre $1/c$.