Examen du 9 Mai 2017

Durée : 4h

Remarques. Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Si X est une va réelle, on note F_X sa fonction de répartition et φ_X sa fonction caractéristique.

Questions de cours.

(1) Soit $\alpha > 0$, et soit X une va uniformément distribuée sur $]0, \alpha[$. Déterminer la loi de $Y = \log(\frac{\alpha}{X})$.

(2) Soit X une va réelle. Calculer $F_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dans les deux cas suivants : (i) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$; (ii) X suit une loi de Cauchy, *i.e.* $\mathbb{P}_X = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$.

(3) Soit X une va réelle. On suppose qu'il existe deux constantes A et $c > 0$ telle que $\forall t > 0\ :\ \mathbb{P}(|X| > t) \leq Ae^{-ct}$. Montrer que $X \in L^p$ pour tout $p < \infty$.

(4) Soit X une va réelle. Calculer l'espérance et la variance de X dans les deux cas suivants : (i) X uniformément distribuée sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$; (ii) X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$.

(5) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va réelles. On suppose que les X_n sont dans L^p pour un certain $p > 1$, et que la suite (X_n) est bornée dans L^p. Pour $n \geq 1$ et $a > 0$, majorer $\mathbb{P}(|X_n| \geq a)$ à l'aide de $\|X_n\|_p$; puis montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0.

(6) Montrer que pour une suite de va réelles, la convergence en norme L^1 entraine la convergence en probabilité et la convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

(7) Soit $K \in \mathbb{N}^*$, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\{1, \dots, K\}$. Montrer que $G_n = (X_1 \cdots X_n)^{1/n}$ tend presque sûrement vers une constante C à déterminer.

(8) On joue une infinité de fois à pile ou face. Pour $n \geq 1$, on note S_n le nombre de "piles" obtenus après n lancers. En utilisant le Théorème Limite Central, montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n})$ admet une limite L à déterminer quand $n \to \infty$.

(9) Calculer la fonction caractéristique d'une va réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, puis montrer que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres à déterminer.

Exercice 1. Soit X une va réelle appartenant à L^2, centrée et de variance $\sigma^2 > 0$, et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^1. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^2.

(1) Justifier que $\|X\|_1 > 0$, puis montrer que a_k tend vers 0 quand $k \to \infty$.

(2) Soit S la limite (en norme L^1) de la suite $S_n = \sum_{k=0}^n a_k X_k$. Justifier qu'il existe $t > 0$ tel que $\varphi_S(t) \neq 0$.

(3) Exprimer $\varphi_{S_n}(t)$ à l'aide de φ_X, puis montrer que la série $\sum \log|\varphi_X(a_k t)|$ est convergente.

(4) Justifier que φ_X admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, et que ce développement est de la forme

$$\varphi_X(u) = 1 - c\,u^2 + o(u^2),$$

où $c > 0$ est à déterminer explicitement.

(5) En utilisant (1), (3) et (4), montrer que la série $\sum a_k^2$ est convergente.

(6) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Soit X une va réelle appartenant à L^1 et centrée, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 *en norme* L^1.

(1) Montrer que $\mathbb{E}\big(|X|\mathbf{1}_{[A,\infty[}(|X|)\big)$ tend vers 0 quand $A \to \infty$.

(2) Déduire de (1) que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver A_ε tel que

$$\forall A \geq A_\varepsilon\ \forall i \geq 1\ :\ \mathbb{E}\big(|X_i|\mathbf{1}_{[A,\infty[}(|X_i|)\big) \leq \varepsilon/2.$$

Montrer ensuite que pour tout ensemble $E \in \mathfrak{A}$ et pour tout $i \geq 1$, on a

$$\int_E |X_i|\, d\mathbb{P} \leq A_\varepsilon\, \mathbb{P}(E) + \varepsilon/2.$$

(3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu : pour tout $E \in \mathfrak{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(E) < \delta$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\int_E \left|\frac{S_n}{n}\right| d\mathbb{P} \leq \varepsilon.$$

(4) Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on pose $E_{n,\varepsilon} = \big\{\big|\frac{S_n}{n}\big| \geq \varepsilon\big\}$. Montrer que

$$\left\|\frac{S_n}{n}\right\|_1 \leq \varepsilon + \int_{E_{n,\varepsilon}} \left|\frac{S_n}{n}\right| d\mathbb{P}.$$

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 3. On dit qu'une va réelle X est **stable** si la propriété suivante a lieu pour tout $n \geq 1$: il existe des constantes a_n et b_n telles que, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des va indépendantes et de même loi que X, alors $X_1 + \cdots + X_n$ a la même loi que $a_n X + b_n$.

(1) Montrer que toute va suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est stable.

(2) Soit X une va stable. On suppose que X appartient à L^2, avec pour moyenne m et pour variance $\sigma^2 > 0$. Le but de la question est de montrer que X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

   (a) Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer explicitement les coefficients a_n et b_n tels que $X_1 + \cdots + X_n \sim a_n X + b_n$. (*Calculer de deux façons l'espérance et la variance de* $X_1 + \cdots + X_n$.)

   (b) Avec les notations de (a), on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la va $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}$ a la même loi que $X' = X - m$.

   (c) Démontrer le résultat souhaité.