Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

Examen du 17 Juin 2011

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = (2x+3)e^x$.

(2) Exprimer $\cos(2t)$ en fonction de $\cos^2 t$, puis calculer l'intégrale $\int_0^\pi \cos^2 t\, dt$.

(3) Calculer l'intégrale $I = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}$.

(4) Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2+y^2 < 1\}$. Dessiner Δ, puis calculer l'intégrale $I = \int_\Delta (x^2+y^2)^3 dxdy$ en intégrant en coordonnées polaires.

(5) Énoncer la formule de changement de variables en coordonnées sphériques, puis utiliser cette formule pour calculer le volume de la boule

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}\,.$$

(6) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq x^2\}$. Dessiner A et déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

(7) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la longueur du graphe de f est égale à $\int_0^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\, dt$.

(8) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma 3xdy + 2ydx$.

(9) Énoncer la formule de Green-Riemann.

(10) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω. Montrer que l'aire de Ω est égale à $\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$.

Exercice. Pour $s > 0$, on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx\,.$$

(1) Dans cette question, on note $\mathcal{D}$ le domaine $]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$.

(a) Soit $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ l'application définie par $\Phi(u,v) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})\cdot$ On note $J_\Phi(u,v)$ le déterminant Jacobien de Φ en un point $(u,v) \in \mathcal{D}$. Montrer qu'on a $J_\Phi(u,v) = \frac{v}{(1+u)^2}\cdot$

(b) En utilisant le changement de variables $(x,y) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ et le théorème de Fubini, montrer que pour tout $s > 0$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)}\, \frac{dxdy}{x} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(3) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (2).

(4) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ en posant $x = t^2$ et en utilisant (3).