Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence SM
Module MAT3

Examen du 24 Juin 2009

Durée : 2h

Sans documents

Exercice 1. Pour $s > 0$, on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt\,;$$

et pour $a, b > 0$, on pose

$$I(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$, et soient $a, b > 0$. En utilisant le changement de variables $(x,y) = (ut, (1-u)t)$, où $(u,t) \in]0,1[\times]0,\infty[$, montrer que pour toute fonction positive $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y) x^{a-1} y^{b-1} dxdy = I(a,b) \int_0^\infty t^{a+b-1} f(t)\, dt.$$

(2) En déduire l'identité

$$I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,\cdot$$

(3) En posant $u = \cos^2\theta$, montrer qu'on a

$$I(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2a-1} (\cos\theta)^{2b-1} d\theta\,.$$

En déduire la valeur de $I(1/2, 1/2)$. Calculer ensuite $\Gamma(1)$, puis utiliser (2) pour trouver $\Gamma(1/2)$.

(4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $s > 0$, on a

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\,.$$

Calculer ensuite $\Gamma(2)$, $\Gamma(3/2)$ et $\Gamma(5/2)$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, n est un entier strictement positif. On note $\mathbb{B}_n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}\,;$$

et V_n le volume n-dimensionnel de $\mathbb{B}_n$:

$$V_n = \int_{\mathbb{B}_n} dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Le but de l'exercice est d'établir la formule

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 1.

(1) Vérifier que la formule est correcte pour $n = 1, 2, 3$.

(2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t} dt$.

(3) Pour tout $t > 0$, on pose $\mathbb{B}_n(t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq t\}$ et $V_n(t) = \int_{\mathbb{B}_n(t)} dx_1 \cdots dx_n$.

   (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a
   $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n = \int_0^\infty e^{-t}\, V_n(t)\, dt.$$

   (b) En utilisant le changement de variables $(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_n}{t}\right)$, montrer que pour tout $t > 0$, on a
   $$V_n(t) = t^{n/2} V_n\,.$$

   (c) En déduire la formule
   $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) V_n\,.$$

(4) En utilisant la valeur de $\Gamma(1/2)$ et le changement de variable $t = x^2$ (ou toute autre méthode), montrer qu'on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.$$

(5) Démontrer la formule souhaitée.