

Examen du 3 Juin 2009

Durée : 2h
Sans documents

Exercice 1. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

- (1) Soit $\alpha \in]0, 1[$, et soit $\mathcal{D} =]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. En utilisant le changement de variable $(x, y) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ (où $(u, v) \in \mathcal{D}$), montrer qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha e^{-(x+y)} \frac{dx dy}{x} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-\alpha}(1+u)}.$$

- (2) Dédire de (1) que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-\alpha}(1+u)}.$$

- (3) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (2).
 (4) Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$ en utilisant (3) et le changement de variable $x = t^2$.
 (5) En intégrant $x^{\alpha-1}e^{-x}$ par parties sur les intervalles $[1/n, n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

En déduire la valeur de $\Gamma(7/2)$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on fixe $R > 0$ et $\phi_0 \in [0, \pi/2[$.

- (1) Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par

$$\mathcal{D} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq y \leq z \tan(\phi_0)\}.$$

- (a) Dessiner $\mathcal{D}$, et donner la description de $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.
 (b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de son centre de gravité.

- (2) Soit maintenant $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ le domaine donné en coordonnées sphériques ($x = r \sin \phi \cos \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \phi$) par

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq \phi_0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

- (a) Calculer le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant les coordonnées sphériques.
- (b) Dessiner $\mathcal{B}$, et retrouver le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant le théorème de Pappus.