Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 15 Juin 2015

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. Montrer que $B := \{x \in \Omega;\ |f_n(x)| \to \infty\}$ est un ensemble mesurable.

(2) Calculer $\int_0^1 (-\log x)\, x^n\, dx$ pour tout entier $n \geq 1$, et en déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{-\log x}{1-x}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot$$

(3) Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Soit également $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, avec $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_\Omega e^{-n\phi(x)} d\mu(x)$ quand $n \to \infty$. (Prendre garde au fait que ϕ n'est pas supposée *strictement* positive en tout point.)

(4) Soit $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y \leq x \text{ et } y \leq 1/x\}$. Calculer $I := \int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x}\, dxdy$.

(5) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer que $\widetilde{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ est bien défini pour presque tout $x \in [0, 1[$ et que la fonction $\widetilde{f}$ est intégrable sur $[0, 1[$.

(6) On *admet* que l'application $(u, v) \mapsto (u^2 + v^2, 2uv)$ est un difféomorphisme de $\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u > v > 0\}$ sur Ω. Utiliser ce fait pour calculer l'intégrale $I := \int_\Omega (u^4 - v^4) e^{-(u+v)^2} dudv$.

(7) Soit $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$. Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x}\, (x^2 + y^2)^2 dxdy$ en utilisant les coordonnés polaires.

(8) Montrer que la formule $f(x) := \int_0^1 \frac{\log(1-xt)}{\sqrt{t}}\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$. Déterminer ensuite (si elle existe) la limite de $f'(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω, à valeurs complexes.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{x \in \Omega;\ \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$.

   (a) Vérifier que la suite (A_n) est croissante, et déterminer $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

   (b) En déduire la limite de $\int_{\Omega \setminus A_n} |f|\, d\mu$ quand $n \to \infty$.

   (c) Montrer que pour tout ensemble mesurable $B \subseteq \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_B |f|\, d\mu \leq n\, \mu(B) + \int_{\Omega \setminus A_n} |f|\, d\mu\,.$$

(2) En utilisant (1), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall B \in \mathfrak{B}\ \ :\ \mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \varepsilon\,.$$

(3) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Montrer que la fonction F est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans cet exercice, Ω et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\Phi : \Omega \times J \to [0, \infty]$ est une fonction borélienne. Pour $(x, t) \in \Omega \times J$, on pose

$$\Phi_t(x) := \Phi(t, x)\,.$$

On définit $h : \Omega \to [0, \infty]$ par

$$h(x) := \int_J \Phi_t(x)\, dt = \int_J \Phi(x, t)\, dt\,.$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$(*) \qquad \|h\|_p \leq \int_J \|\Phi_t\|_p\, dt\,.$$

(Les "normes" $\|\cdot\|_p$ sont relatives à l'espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), \lambda_1)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue.)

(1) Démontrer le résultat pour $p = 1$.

(2) Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$, et de plus que $\|h\|_p < \infty$.

   (a) Montrer qu'on a

$$\|h\|_p^p = \int_J \left(\int_\Omega \Phi_t(x) h(x)^{p-1}\, dx \right) dt\,.$$

   (b) On note q l'exposant conjugué de p. Déduire de (a) l'inégalité

$$\|h\|_p \leq \int_J \|\Phi_t\|_p \left(\int_\Omega h(x)^p dx \right)^{1/q} dt\,.$$

   (c) Exprimer $\left(\int_\Omega h(x)^p dx\right)^{1/q}$ en fonction de $\|h\|_p$, et conclure que $(*)$ a bien lieu dans le cas considéré.

(3) Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$, que $\|h\|_p = \infty$ et que $h(x) < \infty$ presque partout. *Il s'agit alors de montrer que* $\int_J \|\Phi_t\|_p\, dt = \infty$.

(a) Soit (Ω_n) une suite croissante d'intervalles bornés telle que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$h_n := \mathbf{1}_{A_n}\, h\,, \qquad \text{où } A_n := \Omega_n \cap \{h \leq n\}\,.$$

Montrer que $h_n(x) \to h(x)$ presque partout, et en déduire que

$$\|h_n\|_p \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty\,.$$

(b) Avec les notations de (a), montrer que $\|h_n\|_p < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire, à l'aide de (2), que

$$\|h_n\|_p \leq \int_J \|\mathbf{1}_{A_n}\Phi_t\|_p\, dt\,.$$

(c) Conclure que $\int_J \|\Phi_t\|_p\, dt = \infty$.

(4) Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$, que $\|h\|_p = \infty$ et que l'ensemble $\{h = \infty\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. *Il s'agit à nouveau de montrer que* $\int_J \|\Phi_t\|_p\, dt = \infty$.

(a) Montrer qu'il existe un intervalle borné $\Omega' \subseteq \Omega$ tel que l'ensemble $E := \Omega' \cap \{h = \infty\}$ vérifie $\lambda_1(E) > 0$.

(b) Pourquoi a-t-on aussi $\lambda_1(E) < \infty$?

(c) On note q l'exposant conjugué de p. Montrer qu'on a

$$\int_E \Phi_t(x)\, dx \leq \lambda_1(E)^{1/q}\|\Phi_t\|_p \quad \text{pour tout } t \in J.$$

(d) Déduire de (c) que $\int_J \|\Phi_t\|_p\, dt = \infty$.

(5) Dans cette question, on suppose que $p = \infty$.

(a) On pose

$$B := \{(x,t) \in \Omega \times J;\ \Phi_t(x) > \|\Phi_t\|_\infty\} \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

Montrer que $\lambda_1(B^t) = 0$ pour tout $t \in J$, où $B^t := \{x \in \Omega; (x,t) \in B\}$.

(b) En déduire que $\lambda_2(B) = 0$.

(c) Déduire de (b) que $\lambda_1(B_x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

(d) En déduire que $h(x) \leq \int_J \|\Phi_t\|_\infty\, dt$ pour presque tout $x \in \Omega$, et conclure que $(*)$ est vraie dans le cas considéré.