Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 17 Juin 2014

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. Montrer que l'ensemble $A = \left\{x \in \Omega;\ \lim\limits_{n\to\infty} |f(x)| = \infty\right\}$ est mesurable.

(2) Déterminer (si elles existent) les limite quand $n \to \infty$ de

$$I_n = \int_1^\infty \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}}\, e^{-\frac{t^4}{n^3}}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\infty e^{-\left(t+\frac{\sqrt{t}}{n}\right)} \arctan(n^n t^3)\, dt\,.$$

(3) Pour $a, b, c, h > 0$, on pose

$$\mathcal{H}_{a,b,c,h} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ |z| \leq h \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

(a) Soit $h' > 0$. Déterminer l'aire de la coupe $(\mathcal{H}_{1,1,1,h'})^z$ pour tout $z \in [-h', h']$, puis calculer le volume de $\mathcal{H}_{1,1,1,h'}$.

(b) Calculer le volume de $\mathcal{H}_{a,b,c,h}$ pour tous a, b, c, h.

(4) Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-t(u+i\lambda)} du\right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\, e^{-i\lambda t}\, dt\,.$$

(5) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,, y > 0\,, x^2 + y^2 < 1\}$. En intégrant en coordonnées polaires, déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $(x,y) \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω.

(6) Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in I$, et soit φ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que la formule $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-\alpha(x)t}\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(7) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que si $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ et $g \in L^q(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, alors $fg \in L^r(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(8) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 0$, la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ est absolument convergente. On pose $\mathbb{C}_0 = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$ et on définit $f : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ par

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Soit également $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, et soit $\widehat{g}$ la transformée de Fourier de g. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}_0$, on a l'identité suivante (où "log" est synonyme de "ln") :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \widehat{g}\,(\log n) = \int_{\mathbb{R}} f(s+it) g(t)\, dt\,.$$

Exercice 1. On rappelle la définition de la fonction Γ : pour $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

(1) Soit $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,v) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ est un difféomorphisme de Ω sur Ω.

(2) En déduire que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{x}{y}\right)^{s} e^{-(x+y)}\, \frac{dxdy}{x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(3) Déduire de (2) que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer de 3 façons différentes l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt\,.$$

<u>1ère méthode</u>

(1) Pour tout $c > 0$, résoudre sur $]0, \infty[$ l'équation différentielle

$$(E_c) \qquad y'(x) - y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

(2) On définit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$.
   (a) Justifier la définition, et montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.
   (b) Calculer $f(0)$ et déterminer (si elle existe) la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

(3) Montrer que f est dérivable sur $]0, \infty[$ et vérifie l'équation différentielle (E_c) pour une certain $c > 0$ que l'on exprimera en fonction de I.

(4) Calculer I en utilisant les questions précédentes.

2ème méthode

Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide d'un changement de variable approprié. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant l'exercice 1, puis calculer I.

3ème méthode

Calculer l'intégrale $J = \int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires, et en déduire la valeur de I.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. On pose $L^1 = L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, et on identifie comme d'habitude les éléments de L^1 à des fonctions. Soit également $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée.

(1) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$, la fonction $\Phi \circ f$ appartient à L^1.

(2) On pose $M = \sup\{|\Phi(u)|;\ u \in \mathbb{C}\}$. Montrer que si $f, g \in L^1$, alors on a pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \|\Phi \circ g - \Phi \circ f\|_{L^1} \quad \leq \quad & \sup\left\{|\Phi(u) - \Phi(v)|;\ |u - v| < \delta\right\} \times \mu(\Omega) \\ & +2M \times \mu\left(\{t \in \Omega;\ |g(t) - f(t)| \geq \delta\}\right). \end{aligned}$$

(3) On suppose que la fonction Φ est uniformément continue. Montrer que l'application $f \mapsto \Phi \circ f$ est uniformément continue de L^1 dans L^1.

(4) On suppose seulement que la fonction Φ est continue.
   (a) Montrer que si $(g_k) \subset L^1$ est une suite convergeant presque partout vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, alors $\Phi \circ g_k$ tend vers $\Phi \circ f$ en norme L^1.
   (b) Montrer que l'application $f \mapsto \Phi \circ f$ est continue de L^1 dans L^1.