Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 19 Juin 2013

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Montrer que pour tout $\alpha > -1$, la fonction $t \mapsto \ln(t)\, t^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$. Calculer ensuite $I_\alpha = \int_0^1 \ln(t)\, t^\alpha \, dt$ en intégrant par parties.

(2) Déterminer $\lim_{n\to\infty} e^{-x^n}$ et $\sup\{e^{-x^n};\ n \geq 1\}$ selon les valeurs de $x \in]0,\infty[$; puis trouver la limite de $I_n = \int_0^\infty \arctan(nx)\, e^{-x^n} dx$ quand $n \to \infty$.

(3) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Exprimer la fonction indicatrice de $A = \bigcup_0^\infty A_n$ en fonction des indicatrices des A_n; puis montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, alors

$$\int_{\bigcup_0^\infty A_n} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu \,.$$

(4) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha > 2$. Montrer que la formule $f(x) = \int_1^\infty \frac{\sin(t\, u(x))^k}{t^\alpha} \, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(5) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 4 \text{ et } 0 < y < \min(x, \frac{1}{x})\}$. Dessiner $\mathcal{D}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_{\mathcal{D}} \frac{x}{\sqrt{y}} \, dxdy$.

(6) Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(7) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0 \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Calculer l'intégrale $J = \int_\Omega \frac{xy}{(x^2+y^2)^3} \, dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires.

(8) Soient $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0 \text{ et } x + y < 4\}$. En considérant $\Omega' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < v < 1 \text{ et } 0 < u < 4v\}$ et en utilisant le changement de variables $(u,v) = (x, \frac{x}{x+y})$, calculer l'intégrale $I = \int_\Omega \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, d est un entier strictement positif. On note $\| \ \|$ la norme *euclidienne* sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathbb{B}_d$ la "boule unité" de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq 1\}\,.$$

On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et V_d le volume d-dimensionnel de $\mathbb{B}_d$:

$$V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)\,.$$

Enfin, on pose pour $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\,.$$

Le but de l'exercice est de d'établir la formule suivante :

$$(*) \qquad V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\,.$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, \infty[$, et donc que $\Gamma(x)$ est un nombre réel bien défini. Justifier également que $\Gamma(x) > 0$.

(2) Dans cette question, on veut montrer que la formule $(*)$ est corecte pour $d = 1, 2$ et 3.

  (a) Montrer à l'aide d'une intégration parties que pour tout $x > 0$, on a
  $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$
  (b) Calculer $\Gamma(1)$.
  (c) Montrer que $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.
  (d) Déduire de (a), (b) et (c) que $(*)$ est bien correcte pour $d = 1, 2, 3$.

(3) Pour tout $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\|^2 \leq t\}$ et $V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t))$.

  (a) Vérifier que $V(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\|x\|^2,\infty[}(t)\,d\lambda_d(x)$ pour tout $t > 0$, et en déduire qu'on a
  $$\int_0^\infty e^{-t}\,V(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,d\lambda_d(x)\,.$$
  (b) En utilisant un changement de variables, montrer que $V(t) = t^{d/2}V_d$ pour tout $t > 0$.

(4) Déduire de (3) qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dx_1\cdots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)V_d\,.$$

(5) Démontrer la formule $(*)$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer la somme

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1) Dans cette question, on veut établir l'identité suivante :

$$(*) \qquad \forall x \in [0,1] \ : \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan\theta)\, d\theta = -\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt\,.$$

(a) Montrer qu'on définit une fonction f continue sur $[0,1]$ en posant

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan\theta)\, d\theta\,.$$

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et donner une formule pour $f'(x)$. Montrer ensuite à l'aide d'un changement de variable qu'on a

$$f'(x) = \int_0^{\infty} \frac{u}{1+x^2u^2} \frac{du}{1+u^2}\,.$$

(c) Pour $x < 1$ fixé, déterminer les primitives de la fonction $u \mapsto \frac{u}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

(d) Déduire de (b) et (c) que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{1-x^2}.$$

(e) Démontrer l'identité $(*)$.

(2) Montrer qu'on a

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-\ln(t))\, t^{2n}\, dt\,.$$

(3) Calculer la somme S en utilisant les questions précédentes et la "question de cours" (1).