Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 13 Mai 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs réelles. Montrer que $B = \{x \in \Omega;\ f_n(x) \text{ tend vers } +\infty\}$ est un ensemble mesurable.

(2) Énoncer et démontrer le lemme de Fatou.

(3) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Montrer qu'on définit une mesure ν sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ en posant $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

(4) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose qu'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |f_n|\, d\mu < \infty$. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ est presque partout convergente.

(5) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan\left(e^{n^3 t}\right)}{e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} + t^{2+\frac{|\cos n|}{n}}}\, dt$ quand $n \to \infty$.

(6) Soient α, β tels que $\alpha > 0$ et $\beta > \alpha + 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha \log(t)}{1+t^\beta}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

(7) Soit $\phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Montrer que la formule $f(x) = \int_0^\infty \frac{\phi(t)}{1+t^x}\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]1, \infty[$.

(8) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < x\ ,\ xy < 9 \text{ et } 3x + 4y < 24\}$. Dessiner soigneusement $\mathcal{D}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_{\mathcal{D}} x\, dxdy$.

(9) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |x| \leq y \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calculer l'intégrale $I = \int_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires.

(10) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, soit p tel que $1 < p < \infty$, et soient $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. En utilisant l'inégalité de Hölder montrer que la fonction $f\, |g|^{p-1}$ est intégrable sur Ω.

Exercice 1. Le but de l'exercice est démontrer la **formule de Stirling** :
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad \text{quand } n \to \infty\,.$$

(1) Soit $\lambda > 0$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ik\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda e^{i\theta}-\lambda-in\theta} d\theta = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\,.$$

(2) Montrer à l'aide de (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{i\theta}-1-i\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} e^{n\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}}-1-i\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\, dt\,.\end{aligned}$$

(3) Pour $\alpha > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, exprimer $\left|e^{\alpha(e^{iu}-1)}\right|$ en fonction de α et de $\sin^2(u/2)$, et en déduire que si $u \in [-\pi, \pi]$, alors
$$\left|e^{\alpha(e^{iu}-1)}\right| \leq e^{-2\alpha u^2/\pi^2}\,.$$

(*On rappelle l'inégalité* $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi}|t|$, *valable pour* $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.)

(4) Démontrer la formule de Stirling.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

(1) Soit $\Omega' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\ ,\ y > 0 \text{ et } e^{-x} + e^{-y} > 1\}$. Montrer qu'on a
$$\lambda_2(\Omega') = \int_0^{\infty} -\log(1-e^{-x})\, dx\,.$$

(2) Soit $\Omega := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\ ,\ v > 0\ ,\ 2u + v < \pi \text{ et } 2v + u < \pi\}$.
   (a) Dessiner Ω et calculer l'aire de Ω.
   (b) On note $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$\Phi(u,v) := \left(\log\left[\frac{\sin(u+v)}{\sin u}\right],\ \log\left[\frac{\sin(u+v)}{\sin v}\right]\right).$$
      (i) Montrer que $\Phi(\Omega) \subseteq \Omega'$.
      (ii) On *admet* que Φ est en fait une bijection de Ω sur Ω'. En déduire que
$$\lambda_2(\Omega') = \lambda_2(\Omega).$$

(3) Rappeler le développement en série entière de $\log(1-z)$ pour $|z| < 1$, puis montrer qu'on a
$$\int_0^{\infty} -\log(1-e^{-x})\, dx = S\,.$$

(4) Déterminer la valeur de S à l'aide des questions précédentes.