Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 12 Mai 2014

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs réelles. Montrer que l'ensemble $A = \left\{x \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} f(x) = 0\right\}$ est mesurable.

(2) Déterminer (si elles existent) les limite quand $n \to \infty$ de

$$I_n = \int_0^\infty e^{-2^{-n}t^3}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_1^\infty \frac{1 + \sin\left(\frac{e^t}{\sqrt{n}}\right)}{t^{2+\frac{1}{n}}}\, dt\,.$$

(3) Montrer que pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1 + x^\alpha y^\beta} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(\alpha n + 1)(\beta n + 1)}\,.$$

(4) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\ ,\ 0 \le y \le x^2 \text{ et } xy \le 1\}$. Calculer l'intégrale $I = \int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x}\, dxdy$.

(5) Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \ge |x| \text{ et } x^2 + y^2 < 9\}$. Calculer l'intégrale $J = \int_\Omega (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires.

(6) Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in I$, et soit φ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que la formule $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{1+\alpha(x)t^2}\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $f' \in L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $p > 1$, alors f est uniformément continue.

(8) Montrer que si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, alors la convolée $f * g$ est bien définie presque partout et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(9) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-|t|}$, et en déduire la valeur de $g(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(10) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, et en déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω, à valeurs complexes.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{x \in \Omega;\ \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$.
  (a) Vérifier que la suite (A_n) est croissante, et déterminer $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
  (b) En déduire la limite de $\int_{\Omega \setminus A_n} |f|\, d\mu$ quand $n \to \infty$.
  (c) Montrer que pour tout ensemble mesurable $B \subset \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_B |f|\, d\mu \leq n\, \mu(B) + \int_{\Omega \setminus A_n} |f|\, d\mu\,.$$

(2) En utilisant (1), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \ : \ \mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \varepsilon\,.$$

(3) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Montrer que la fonction F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On rappelle la définition de la fonction Γ : pour $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

D'autre part, pour $a, b > 0$ on pose

$$J(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,t) = (ut, (1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$.

(2) En déduire que pour tous $a, b > 0$ et pour toute fonction borélienne positive $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y) x^{a-1} y^{b-1} dx dy = J(a,b) \int_0^{\infty} t^{a+b-1} f(t)\, dt.$$

(3) Déduire de (2) l'identité

$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

(4) Calculer $J(1/2, 1/2)$ en posant $u = \sin^2\theta$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Exercice 3. Soit $c > 0$, et soit $g : [0, c[\to \mathbb{C}$ une fonction borélienne borné, continue en 0, avec $g(0) \neq 0$.

(1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, les fonctions $u \mapsto e^{-\lambda u} g(u)$ et $u \mapsto e^{-\lambda u^2} g(u)$ sont intégrables sur $[0, c[$.

(2) En utilisant le changement de variable $x = \lambda u$, montrer que

$$\int_0^c e^{-\lambda u} g(u)\, du \sim \frac{g(0)}{\lambda} \quad \text{quand } \lambda \to \infty\,.$$

(3) Déterminer un équivalent de $\int_0^c e^{-\lambda u^2} g(u)\, du$ quand $\lambda \to \infty$.

Exercice 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'on a $\int_I f(t)\, dt = 0$ pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $k_n = n\, \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Montrer que $k_n * f = 0$.

(2) Montrer que f est presque partout égale à 0.