Fourier et AC

Examen du 18 Avril 2024
Durée : 3h

Questions de cours

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la définition du noyau de Dirichlet D_n et montrer qu'on a

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\cdot$$

(2) Calculer $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ en considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$.

(3) Calculer l'intégrale $I := \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}$ en appliquant le théorème de Cauchy à $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}\cdot$

(4) Montrer *en utilisant la formule de Cauchy* que toute fonction holomorphe dans un disque $D(0, R)$ est développable en série entière dans ce disque.

(5) Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}\cdot$

(6) Déterminer le nombre de zéros de $P(z) := z^5 - 5z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 8z + 3$ dans le disque $\overline{D}(0, 3)$.

(7) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $|\varphi(t)| = O(|t|^N)$ quand $t \to \pm\infty$, pour un certain entier N. Montrer que la formule $f(z) := \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{tz}dt$ définit une fonction holomorphe sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

(8) Montrer que la formule $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ définit une fonction entière, et déterminer les zéros de la fonction f.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$. Soit également $\alpha > 0$. On suppose que

$$\forall z \in \mathbb{D}\ :\ |f(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}}\cdot$$

Montrer qu'on a $|c_n| \leqslant \frac{1}{r^n(1-r)^{\alpha}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, 1[$, et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ |c_n| \leqslant e \times (n+1)^{\alpha}.$$

Exercice 2. Montrer que si f est une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy \, .$$

Exercice 3. Pour $r \in [0, 1[$, calculer $I(r) := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \cdot$

Exercice 4. On rappelle la définition de la fonction ζ : si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction ζ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash \{1\}$, où $\Omega := \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

(1) Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \, .$$

(2) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la formule $\varphi_n(s) := \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Soit $n \geqslant 1$, et soit $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) \geqslant -1$.

 (a) En considérant la fonction ψ définie par $\psi(t) := \frac{1}{t^s}$, montrer que

$$\forall t \in [n, n+1] \ : \ \left| \frac{1}{t^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leqslant \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \, .$$

 (b) En déduire une majoration pour $|\varphi_n(s)|$.

(4) Démontrer le résultat annoncé.