Fourier et AC

Examen du 17 Juin 2024

Durée : 3h

Exercice 1. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$, calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = e^{iat}$ pour $t \in [0, 2\pi[$, montrer qu'on a

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2}.$$

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(1) Soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\overline{a}$, on pose $\varphi_a(z) := \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$.

(a) Calculer $|\varphi_a(\zeta)|$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, et en déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

(2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(a) Soit $b \in \mathbb{D}$. En utilisant le Lemme de Schwarz (et avec les notations de (1)), montrer qu'on a $|\varphi_{f(b)} \circ f \circ \varphi_b(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) Montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{D}$, on a l'inégalité

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{1 - \overline{f(b)}f(a)} \right| \leqslant \left| \frac{b - a}{1 - \overline{b}a} \right|.$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

(1) Justifier l'existence de I.

(2) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) := \alpha e^{it}$. En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}\, dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}\, dz = 4 \int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx\,.$$

(3) En déduire la valeur de I.

Exercice 5. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1 - n < \alpha < 1$. En considérant les domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,R} := \left\{ re^{i\theta};\ \varepsilon \leqslant r \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n} \right\},$$

où $0 < \varepsilon < 1 < R$, calculer l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (1 + x^n)}.$$

Exercice 6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa *transformée de Fourier* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{g}$ définie par $\mathbf{g}(t) := e^{-\frac{t^2}{2}}$.

(1) Montrer que la formule $\Phi(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t)\, e^{-itz}\, dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(2) Calculer $\Phi(iy)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

(3) Déduire de (1) et (2) qu'on a $\widehat{\mathbf{g}} = \sqrt{2\pi}\, \mathbf{g}$.

Exercice bonus. Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré $d \geqslant 1$. On écrit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$. Montrer que si $|z|$ est assez grand, alors $|P(z) - a_d z^d| < |a_d z^d|$, et *en déduire* que P admet au moins une racine complexe.