Examen du 16 Décembre 2021
Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 6574$. Montrer que si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que $\int_0^1 |P_k(t)|\,dt \to 0$ quand $k\to\infty$, alors $\int_{1000}^{6000} |P_k(t)|\,dt \to 0$ quand $k\to\infty$.

(2) Soit $E := \mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\alpha : [0,1]\to\mathbb{K}$ une fonction continue vérifiant $|\alpha(t)|\leqslant 1$ pour tout $t\in[0,1]$, et soit $\Phi : E\to\mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) := \int_0^1 (3t^2+1)\alpha(t)\,u(t)\,dt$. Montrer que Φ est continue et qu'on a $\|\Phi\|\leqslant 2$.

(3) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que si $A\in\mathcal{L}(E)$, alors la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{A^k}{k^k}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

(4) Montrer que si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'application $(u,v)\mapsto u+v$ est continue de $E\times E$ dans E, et l'application $(\lambda,u)\mapsto\lambda u$ est continue de $\mathbb{K}\times E$ dans E.

(5) Montrer que si (E,d) est un espace métrique, alors toute boule ouverte de E est un ensemble ouvert, et toute boule fermée de E est un ensemble fermé.

(6) Montrer que $A := \left\{x\in\mathbb{R}^N;\ x_j+x_j^3 < 5 \text{ pour tout } j\in[\![1,N]\!] \text{ et } \sum_{j=1}^N x_j^5 > \pi\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

(7) Soit $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+e^{|y|}+z^4\leqslant 6\}$ et soit $f : K\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) := \sqrt{2^{x^4}+5^{z+y^3}}$. Montrer que f admet un maximum.

(8) Montrer que $C := \{z\in\mathbb{C};\ |z|=6\}$ est une partie connexe de $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer qu'on définit une distance δ sur E en posant $\delta(u,v) := \ln(1+d(u,v))$. (On pourra commencer par montrer que $\forall s,t\geqslant 0\ :\ \ln(1+s+t)\leqslant \ln(1+s)+\ln(1+t)$.)

Exercice 2. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $u=(u(i))_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On munit $c_0(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u\in c_0(\mathbb{N})$. Montrer que si $u_k\to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors $u_k(i)\to u(i)$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.

(2) La réciproque de (1) est-elle vraie ? (Justifier la réponse.)

(3) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On fait les hypothèses suivantes :

- $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;
- Il existe $g \in c_0(\mathbb{N})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i\ :\ |u_k(i)| \leqslant |g(i)|$.

Montrer que $u \in c_0(\mathbb{N})$ et que $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \to E$. On suppose que f est *dilatante*, ce qui signifie que $\forall x, y \in E\ :\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une isométrie bijective.

(1) Soient $x, y \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n := f^n(x)$ et $y_n := f^n(y)$, où $f^0 := id_E$ et $f^n = f \circ \cdots \circ f$ pour $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que si $n, n' \in \mathbb{N}$ et $n < n'$, alors $d(x_n, x_{n'}) \geqslant d(x, x_{n'-n})$ et $d(y_n, y_{n'}) \geqslant d(y, y_{n'-n})$.

(b) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $x_{n_{k+1}-n_k} \to x$ et $y_{n_{k+1}-n_k} \to y$.

(c) Montrer que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

(2) Soit $y \in E$ quelconque. En considérant à nouveau la suite $(y_n) = (f^n(y))$, montrer que $y \in \overline{f(E)}$; puis montrer que $y \in f(E)$.

(3) Conclure.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces métriques.

(1) Montrer que si $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de F convergeant vers un point $y \in F$, alors l'ensemble $K := \{y_k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact de F.

(2) Soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose que pour tout compact $K \subseteq F$, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que $f(E)$ est un fermé de F.