Examen du 19/12/2023

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soient E et F deux espaces métriques, soit $f : E \to F$, et soit $a \in E$. Montrer que f est continue au point a si et seulement si : pour toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant vers a, la suite $(f(u_k))$ converge vers $f(a)$.

(2) Énoncer et démontrer le critère de continuité pour les applications linéaires.

(3) Soit E un espace métrique. Montrer que si $O_1, \dots, O_N$ sont des ouverts de E, alors $O_1 \cap \dots \cap O_N$ est ouvert.

(4) Soit E un espace métrique. Montrer que si $K_1, \dots, K_N$ sont des compacts de E, alors $K_1 \cup \dots \cup K_N$ est compact.

(5) Montrer que toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé est bornée.

(6) Montrer que si E sont des espaces vectoriels normés et si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

(7) Montrer que dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.

(8) Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$ continue. Montrer que si $C \subseteq E$ est connexe, alors $f(C)$ est connexe.

(9) Montrer que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

(10) Soit E un espace métrique. Montrer que si A et B sont des parties connexes de E telles que $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cup B$ est connexe.

Exercice 1. Soient Λ et E deux espaces métriques, avec E compact, et soit $\Phi : \Lambda \times E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un et un seul point $x \in E$ tel que $\Phi(\lambda, x) = 0$, et on note ce point $x(\lambda)$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|T\| \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n := \frac{1}{n}(I + T + \dots + T^{n-1}).$$

Le but de l'exercice est de montrer la chose suivante : pour tout $x \in E$, la suite $(A_n(x))$ converge vers un point $y \in E$ tel que $T(y) = y$.

(1) Montrer qu'on a $\|A_n\| \leqslant 1$ pour tout n.

(2) Vérifier que $A_n(I-T)(x) = \frac{1}{n}(x - T^n(x))$ pour tout $x \in E$.

(3) Déduire de (2) que $A_n(u) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $u \in \mathrm{Im}(I-T)$; puis montrer à l'aide de (1) que $A_n(z) \to 0$ pour tout $z \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

(4) Soit $x \in E$ fixé.

(a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que la suite $(A_{n_k}(x))$ converge vers un point $y \in E$.

(b) En observant que $A_n T = T A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer à l'aide de (2) que $T(y) = y$.

(c) Montrer que $x - A_n(x) \in \mathrm{Im}(I-T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et en déduire que $x - y \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

(d) Justifier qu'on a $A_n(x) - y = A_n(x-y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $A_n(x) \to y$.

Exercice 3. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $\theta : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue vérifiant $\theta(t) \leqslant t$ pour tout $t \in [a,b]$. Soient également $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = \alpha$ et $f'(x) = k\, f(\theta(x))$ pour tout $x \in [a,b]$. Dans ce qui suit, on notera $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(1) Soit $M > 0$. Pour $u \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose $\|u\|_M := \sup\{|u(t)|e^{-Mt};\ t \in [a,b]\}$. Montrer que $\|\cdot\|_M$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$, et que $\|\cdot\|_M$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(2) Soit $\Phi : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ l'application définie par

$$\Phi(u)(x) := \alpha + \int_a^x k\, u(\theta(t))\, dt.$$

(a) Montrer que si $u, v \in \mathcal{C}([a,b])$ et si $M > 0$, alors

$$\forall x \in [a,b] \ : \ |\Phi(v)(x) - \Phi(u)(x)| \leqslant \frac{k}{M}\, \|v-u\|_M\, e^{Mx}.$$

(b) En déduire que $\forall u, v \in \mathcal{C}([a,b]) \ : \ \|\Phi(v) - \Phi(u)\|_M \leqslant \frac{k}{M}\, \|v-u\|_M$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.