EVNT

Examen du 6 Juin 2024

Durée : 3h

Exercice 1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note Ω l'ensemble de toutes les suites $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\|u(i)\| \leqslant 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour $u, v \in \Omega$, on pose

$$d(u,v) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \, \|v(i) - u(i)\|.$$

(1) Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur Ω.

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω, et soit $u \in \Omega$. Montrer que $u_k \to u$ pour la distance d si et seulement si $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que si X est un espace de Banach, alors (Ω, d) est complet.

Exercice 2. Soit $E := \mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et soient $\alpha, \beta > 0$. On note $\Phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi(u) := \alpha \int_0^{1/2} u(t)\, dt - \beta \int_{1/2}^{1} u(t)\, dt.$$

(1) Montrer que Φ est continue et qu'on a $\|\Phi\| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(2) Dans cette question, on veut montrer qu'en fait $\|\Phi\| = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

  (a) Pour ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on note u_ε la fonction continue sur $[0,1]$ valant 1 sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, valant -1 sur $[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$. Calculer $\|u_\varepsilon\|_\infty$ et $\Phi(u_\varepsilon)$.

  (b) Démontrer le résultat annoncé.

(3) Peut-on trouver $u \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $\|u\|_\infty = 1$ et $\Phi(u) = \frac{\alpha+\beta}{2}$?

Exercice 3. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$.

(1) Montrer que si f est continue, alors le graphe de f est une partie fermée de $E \times F$.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R} = F$. Montrer que la réciproque de (1) n'est pas vraie.

(3) Montrer que si E et F sont compacts, alors la réciproque de (1) est vraie.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F. Soit également $f : E \to F$. On suppose qu'il existe un ensemble dense $D \subset E$ tel que $f_n(z) \to f(z)$ quand $n \to \infty$ pour tout $z \in D$. On suppose également qu'il existe une constante C telle que f et les f_n sont C-lipschitziennes.

(1) Montrer que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.

(2) Dans cette question, on suppose que E est compact.

  (a) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, montrer qu'il existe $z_1, \dots, z_N \in D$ tels que $E = B(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(z_N, \varepsilon)$.

  (b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément.

Exercice 5. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet. Soit également $f : E \to F$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\forall u, v \in E \ : \ \|f(u+v) - f(u) - f(v)\| \leqslant C.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que $\forall u \in E \ : \ \|L(u) - f(u)\| \leqslant C$.

(1) Soit $u \in E$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\| \frac{f(2^k u)}{2^k} - \frac{f(2^{k-1}u)}{2^{k-1}} \right\| \leqslant \frac{C}{2^k}\cdot$

(2) Déduire de (1) que pour tout $u \in E$, la suite $\left(\frac{f(2^k u)}{2^k}\right)_{k\geqslant 1}$ converge dans F, et que la convergence est uniforme par rapport à u.

(3) On définit une application $L : E \to F$ en posant $L(u) := \lim\limits_{k\to\infty} \frac{f(2^k u)}{2^k}\cdot$ Montrer qu'on a $L(u+v) - L(u) - L(v) = 0$ pour tous $u, v \in E$.

(4) Montrer que L convient.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $K \subseteq E$ un ensemble compact et convexe, $K \neq \emptyset$. Soit également $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne.

(1) Soit $a \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : K \to E$ par

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\, a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x).$$

Montrer que f_n possède un unique point fixe $x_n \in K$.

(2) Montrer que f possède un point fixe.

Exercice bonus. Soit $c > 0$, et soit $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x, y \geqslant 0 \text{ et } x + y = c\}$. Soient également $\alpha, \beta > 0$. Montrer sans calcul que la fonction f définie par $f(x, y) := x^\alpha y^\beta$ possède un maximum sur K ; puis déterminer ce maximum.