Calculus 2

Examen du 12 Avril 2023

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Soit f la fonction définie par $f(x) := \ln(4x+3) - \arctan(x)$. Déterminer l'intervalle de définition de f (qu'on notera I), puis montrer que f est une bijection de I sur un intervalle à déterminer.

(2) Donner la définition de la fonction arcsin, puis montrer que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$

(3) Déterminer le développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

(4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}{x^3}\cdot$

(5) Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(x+3)(x^2+3x+5)}$ sur $]-3,\infty[$.

(6) Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{5+\cos(x)}$ sur $]-\pi,\pi[$.

(7) Énoncer et démontrer le théorème sur les solutions d'une équation différentielle de la forme $x'(t) = a(t)x(t)$.

(8) Déterminer toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $x''(t) = 3x'(t) - 5x(t)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x^6+x^4+1}}{x+1+\sqrt{x^2+1}}\cdot$

(1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Vérifier que

$$\forall x > 0 \ : \ f(x) = x\, \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

puis montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Exercice 2. Résoudre sur $]0, \infty[$ l'équation différentielle

$$t(t+3)x'(t) + (5t-6)x(t) = \frac{t^4}{(t+3)^6}\sin(t).$$

Exercice 3. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) + t \\ y'(t) & = & -8x(t) - y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

(1) Montrer que la fonction x est solution de l'équation différentielle

$$x''(t) = 4x'(t) - 3x(t) + 1 + t + e^{2t}.$$

(2) Déterminer des constantes a, b, c telles que $z(t) := at + b + ce^{2t}$ soit solution de l'équation différentielle de la question (1).

(3) On suppose que $x(0) = 1$ et $y(0) = -4$. Déterminer les fonctions x et y.