Calculus 2

Examen du 28 Avril 2022
Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit f la fonction définie par $f(t) := \ln(t) - \lambda \arctan(t)$. Montrer que si $\lambda \leqslant 2$, alors f est une bijection de $]0, \infty[$ sur un intervalle à déterminer.

(2) Donner la définition de la fonction arcsin, puis montrer que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ avec $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) Déterminer le développement limité de $f(x) := \dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4 en 0.

(4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(x) + \arctan(x)}{x^5}$.

(5) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x'(t) + t\cos(t)\, x(t) = 0$.

(6) Déterminer toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $3x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ après avoir précisé le domaine de définition de cette fonction, et en déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[: \ \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x).$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x+2+\sqrt{x^2+1}}$.

(1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Vérifier que

$$\forall x > 0 \ : \ f(x) = x\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

puis montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position du graphe par rapport à cette asymptote.

(3) Montrer que $\frac{f(x)}{x^2}$ admet une limite quand $x \to -\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 3. Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}\cdot$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

(2) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2\pi n$.

(3) Justifier que $x_n = 2\pi n + \arcsin\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

(4) Déduire de (2) et (3) que $x_n \underset{n\to\infty}{=} 2\pi n + \frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(5) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{=} 2\pi n + \frac{1}{2\pi n} + \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour une certaine constante a à déterminer.

Exercice 4. Dans cet exercice, on considère l'équation différentielle

$$t(1+t)x'(t) - (t+2)x(t) = 2t. \tag{E}$$

(1) Trouver deux constantes a et b telles que $\frac{t+2}{t(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$, puis résoudre (E) sur l'intervalle $]-1, 0[$.

(2) Existe-t-il une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice bonus. Déterminer $\ell := \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x$.