

Corrigé succinct du DS

Questions de cours.

- (1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|c_k A^k\| \leq CR^k \|A^k\| \leq CR^k \|A\|^k = C(R\|A\|)^k$. Comme $R\|A\| < 1$, la série $\sum \|c_k A^k\|$ est donc convergente, et par conséquent la série $\sum c_k A^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.
- (2) D'après le "théorème fondamental de l'analyse", on a $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt$, et donc

$$\begin{aligned} \|\varphi(b) - \varphi(a)\| &\leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \\ &\leq \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a). \end{aligned}$$

- (3) Les composantes de $f(x, y, z)$ possèdent des dérivées partielles continues dans l'ouvert $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > x^2\}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω . Pour écrire la matrice Jacobienne, ne pas se tromper entre les lignes et les colonnes.
- (4) Posons $\gamma(t) : th$. D'après le théorème des fonctions composées, on a $\varphi'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = Df(th)h$, autrement dit

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(th) \times h_j.$$

Exercice 1. (1) Pour tout $x > 0$, on a $f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\log}(2x^2)2x^2 = \frac{x^{\alpha+\beta-2}}{2} \log(2x^2)$.

Si $\alpha + \beta \leq 2$, cette expression ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$ et donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. Inversement, si on pose $h = (x, y)$, on a $|x| \leq \|u\|$, $|y| \leq \|u\|$ et $x^2 + y^2 = \|u\|^2$; donc

$$|f(h)| \leq \|h\|^{\alpha+\beta-2} \log(\|h\|^2) = 2\|h\|^{\alpha+\beta-2} \log(\|h\|),$$

ce qui prouve que $f(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 si $\alpha + \beta > 2$.

- (2) On a $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \neq 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- (3) D'après (2), le seul candidat possible pour $Df(0, 0)$ est $L = 0$. Il s'agit donc de voir si on $f(h) = o(\|h\|)$ quand h tend vers 0. En raisonnant exactement comme dans (1), on trouve que cela est vrai si et seulement si $\alpha + \beta > 3$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

- (1) Montrer que l'application bilinéaire $B : E \times E \rightarrow E$ définie par $B(u, v) = uv$ est continue.
- (2) Soit $f : E \rightarrow E$ l'application définie par $f(u) = u^3$.
 - (a) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer $Df(u)$ pour toute $u \in E$.
 - (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$(E) \quad a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On pose $\Delta = a^2 + b^2$ et on définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(u, v) = f\left(\frac{au - bv}{\Delta}, \frac{bu + av}{\Delta}\right).$$

- (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide de g .
 - (b) Calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ en fonction des dérivées partielles de f .
- (2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme

$$f(x, y) = \varphi(-bx + ay),$$

où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Dans tout l'exercice, on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

- (1) Montrer que la fonction r définie par $r(x) = \|x\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer ses dérivées partielles.
- (2) Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose

$$f_j(x) = \frac{x_j}{\|x\|}.$$

Montrer que f_j est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\|x\|^2 - x_j^2}{\|x\|^3}.$$

- (3) Soit $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$V(x) = \varphi(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}.$$

- (a) Pourquoi la fonction V est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
 (b) On pose $\nabla \cdot V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$, où $v_1, \dots, v_n$ sont les composantes de V , i.e. $V(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\nabla \cdot V(x) = \varphi'(r) + \frac{n-1}{r} \varphi(r).$$

Exercice 5. Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose qu'on a $\Phi(0) = I$ et

$$(*) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} : \Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t).$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que l'exponentielle d'une matrice M est définie par $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$, et que la dérivée de e^{tA} (par rapport à t) est Ae^{tA} .

- (1) On suppose que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
 (a) En utilisant l'identité (*), montrer qu'il existe une matrice A telle que
- $$\forall t \in \mathbb{R} : \Phi'(t) = A\Phi(t).$$
- (b) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 (2) On suppose seulement que l'application Φ est continue.
 (a) Pour $h > 0$, on pose $M(h) = \int_0^h \Phi(s) ds$. Déterminer la limite de $\frac{M(h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Les questions qui suivent sont hors-barème

- (b) Dédire de (a) qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que la matrice $M(\delta)$ est inversible.
 (c) En utilisant un changement de variable, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_t^{t+\delta} \Phi(u) du = M(\delta)\Phi(t).$$

- (d) En déduire que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 (e) Conclure.