Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Analyse 2*

Examen du 15 Juin 2015

Durée : 2h

Exercice 1. Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ sur $]-1, \infty[$.

Exercice 2. Calculer $I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\, dt$ en posant $x = \cos t$, et $J := \int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.

Exercice 3. Pour $\alpha \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale

$$I_n(\alpha) = \int_0^n t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt\,.$$

(On pourra commencer par poser $u = t/n$, puis intégrer par parties.)

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to \infty$ de

$$P_n = \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k\right]^{1/n^2}.$$

(On pourra commencer par passer au logarithme.)

Exercice 5. Montrer que la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$, et en déduire que

$$\forall t \in [0, \pi/2] \ : \ \sin t \geq \frac{2}{\pi} t\,.$$

Montrer ensuite que

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \sin t}\, dt \to 0 \qquad \text{quand } \lambda \to +\infty\,.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que toutes les dérivées de f sont positives sur $[0, \infty[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall u \geq 0 \ : \ f^{(k)}(u) \geq 0\,.$$

(1) Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, x]$, on a $f^{(N+1)}(t) \leq f^{(N+1)}(x)$.

(2) Soit $x > 0$. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre $N + 2$ entre x et $3x$, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} \leq \frac{f(3x)}{(2x)^{N+1}}\,.$$

(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $x \geq 0$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\,.$$