DS n$^{\text{o}}$ 2

(durée : 2h30)

Questions de cours.

(1a) Énoncer le théorème de l'application ouverte.

(1b) Soient E, X, Y trois espaces de Banach et soient $R \in \mathcal{B}(E, X)$ et $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. On suppose que R est surjectif. Montrer que si $T \circ R$ est compact, alors T est compact.

(2a) Donner la définition du rayon spectral d'un opérateur, et énoncer la formule du rayon spectral.

(2b) Soit X un espace de Banach complexe, et soient $A, B \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $AB = BA$. Montrer qu'on a $r(AB) \leq r(A)r(B)$.

Exercice 1. Soient Xet Y deux espaces de Banach, et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X dans Y. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $T_n(x) \to 0$ pour tout $x \in X$;

(ii) La suite (T_n) est bornée dans $\mathcal{B}(X, Y)$ et il existe une partie dense $D \subset X$ telle que $T_n(z) \to 0$ pour tout $z \in D$.

Exercice 2. Soit $\theta : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. On définit une application linéaire $T : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1])$ en posant

$$Tf(x) = \int_0^{\theta(x)} f(t)\, dt\,.$$

(1) Montrer que T est un opérateur compact.

(2) On suppose qu'on a $\theta(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

  (a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, alors $|T^n f(x)| \leq \frac{x^n}{n!} \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$.

  (b) Déterminer le spectre de T.

  (c) Montrer que 0 est valeur propre de T si et seulement si $\theta([0, 1])$ est strictement contenu dans $[0, 1]$.

Exercice 3. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to X$ une application continue, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans un espace vectoriel normé réel X.

(1) Soit $x^* \in X^*$. Quelle est la dérivée de l'application $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$?

(2) Montrer qu'on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\, \|f'(c)\|$.

(3) Peut-on toujours trouver c tel que $\|f(b) - f(a)\| = (b - a)\, \|f'(c)\|$?

Exercice 4. Soit $w : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée telle que $w(t) \neq 0$ presque partout. Pour $r > 0$, on note ϕ_r la fonction définie sur $[0,1]$ par $\phi_r(t) = w(t)r^{-t}$.

(1) Soit $r \in]0, 1/e]$, et soit $g \in L^\infty([0,1])$. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 \phi_r(t)g(t)\,dt = \int_1^e x^{\beta_r}\,G(x)\,dx\,,$$

où $\beta_r \geq 0$ et la fonction G sont à préciser.

(2) Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $G \in L^2([a,b])$. Montrer que si on a $\int_a^b x^n G(x)\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $G = 0$ (presque partout).

(3) Montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions ϕ_r, $r \in]0, 1/e]$ est dense dans $L^1([0,1])$.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose qu'on a $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

(1) Soit (z_n) une suite de points de H vérifiant $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. On suppose que la suite $(T(z_n))$ converge vers un point $l \in H$.
   - (a) Montrer qu'on a $\langle l, h\rangle + \langle T(h), h\rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$. (*Poser* $x_n = z_n + h$).
   - (b) En déduire que $l = 0$. (*Remplacer* h *par* $\pm\varepsilon h$, *avec* $\varepsilon > 0$).

(2) Montrer que l'application linéaire T est continue.