DS n° 1

(durée : 1h30)

Questions de cours.

(1) Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on pose $\phi_\lambda(t) = \phi(\lambda t)$. Montrer que si $p \in \{1, 2\}$ et si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f_\lambda \in L^p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et

$$\widehat{f_\lambda} = \frac{1}{|\lambda|}\hat{f}_{1/\lambda}\,.$$

(2) Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, et soit $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in K \ : \ \left| f(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e^{\langle a_j, x\rangle} \right| < \varepsilon\,,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert réel, et $T : H \to H$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leq 1$.

(1) Montrer que pour tout $x \in H$, on a

$$||T^*(x) - x||^2 \leq 2\left(||x||^2 - \langle x, T(x)\rangle\right).$$

En déduire que $\operatorname{Ker}(I - T) = \operatorname{Ker}(I - T^*)$.

(2) Déduire de (1) qu'on a

$$H = \operatorname{Ker}(I - T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(I - T)}\,.$$

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})\,.$$

(a) Calculer $S_n(x)$ pour $x \in \operatorname{Ker}(I - T)$.
(b) Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pour $x \in \operatorname{Im}(I - T)$.
(c) Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $(S_n(x))$ converge vers $\pi(x)$, où π est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(I - T)$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on note P la fonction $t \mapsto e^{-2\pi|t|}$. D'autre part, pour $\lambda > 0$ on note p_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$p_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)} \cdot$$

(1) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction P, constater que $\widehat{P} \in L^1(\mathbb{R})$, et exprimer $p_\lambda(x)$ à l'aide de $\widehat{P}$.
(2) Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} \cdot$$
(3) Montrer qu'on a $p_\lambda * p_\mu = p_{\lambda+\mu}$ pour tous $\lambda, \mu > 0$.
(4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. On définit une fonction $F : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{C}$ par
$$F(x,\lambda) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \lambda = 0 \\ p_\lambda * f(x) & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.
   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times]0, \infty[$ et vérifie l'équation
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = 0\,.$$