DS du 29/10/09

(durée : 3h)

Questions de cours

(1) On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $T : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $Tf(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$. Montrer que T est continue et calculer $\|T\|$.

(2) Soit (K,d) un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs complexes. Montrer que les fonctions lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.

(3) En considérant la fonction f définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(t) = t^2$, calculer la somme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot$$

Exercice 1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. On suppose que la fonction G définie par $G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact. Montrer que pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g(\lambda t)\,dt = -\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} G(\lambda t) f'(t)\,dt\,.$$

(2) Montrer que pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(\lambda t)\,dt = 0\,.$$

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel. On note $\mathcal{B}(H)$ l'espace des opérateurs bornés sur H.

(1) Montrer que pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}\,.$$

(2) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur *auto-adjoint*. On pose

$$M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| \leq 1\}\,.$$

(a) Montrer qu'on a $|\langle T(u), u\rangle| \leq M\,\|u\|^2$ pour tout $u \in H$.

(b) Exprimer $\langle T(x), y\rangle$ à l'aide de $\langle T(x+y), x+y\rangle$ et $\langle T(x-y), x-y\rangle$, pour tous $x, y \in H$. En déduire qu'on a $\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(c) En remplaçant x par tx et y par y/t dans l'inégalité précédente et en choisissant convenablement $t > 0$, montrer qu'on a $|\langle T(x), y\rangle| \leq M \|x\| \|y\|$ pour tous $x, y \in H$.

(d) Conclure que $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$, et la norme $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{B}(H)$ l'espace des opérateurs bornés sur H, et $\|\cdot\|$ la norme de $\mathcal{B}(H)$.

(1) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$.

(a) En utilisant (deux fois) l'identité de Parseval, montrer que si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux bases orthonormée de H, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|T^*(k_j)\|^2.$$

(b) En déduire que le "nombre" (fini ou infini) $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(e_i)\|^2$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dans la suite, on fixe une telle base orthonormée (e_i).

(2) On pose $\mathcal{S}_2(H) = \{T \in \mathcal{B}(H);\ \sum_0^{\infty} \|T(e_i)\|^2 < \infty\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_2(H)$ est un espace vectoriel.

(b) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_2(H)$, la série $\sum \langle A(e_i), B(e_i)\rangle$ est convergente, et qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_2(H)$ en posant

$$\langle A, B\rangle_{\mathcal{S}_2} = \sum_{i=0}^{\infty} \langle A(e_i), B(e_i)\rangle .$$

Dans la suite, on notera $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_2}$ la norme associée. On a donc

$$\|T\|_{\mathcal{S}_2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|T(e_i)\|^2\right)^2 .$$

(3) Montrer que si $x \in H$ et si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H telle que $\sum_0^{\infty} \|u_i\|^2 < \infty$, alors la série $\sum \langle x, e_i\rangle u_i$ converge normalement dans H, et

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle u_i \right\| \leq \|x\| \times \left(\sum \|u_i\|^2\right)^{1/2} .$$

En déduire qu'on a $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{S}_2}$ pour tout opérateur $T \in \mathcal{S}_2(H)$.

(4) Montrer que $(\mathcal{S}_2(H), \|\cdot\|_{\mathcal{S}_2})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On pose $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $\Delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\Delta_\varepsilon(t) = \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \cdot$$

(1) Montrer qu'on a $\Delta_\varepsilon = p_\varepsilon * f$, où $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[-\varepsilon,0]}$.
(2) En déduire que Δ_ε tend vers f en norme L^1 quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 5. Soient $p \in]1, \infty[$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)^p \leq \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\,,$$
(2) Montrer que la convolée $f * g$ est bien définie presque partout et appartient à $L^p(\mathbb{R})$, avec $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p$