Bribes de correction du DS

Questions de cours

(1) Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, alors $|Tf(x) \leq 3|f(x)| + 2|f(x)| \leq 5\|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $\|Tf\|_\infty \leq 5\|f\|_\infty$. Par conséquent, T est continue et $\|T\| \leq 5$. Inversement, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = 1$, $f(4) = -1$ et $-1 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (faire un dessin!). Alors $\|f\|_\infty = 1$ et $Tf(0) = 3f(0) - 2f(4) = 5$, donc $\|Tf\|_\infty \geq 5$. On a donc $\|T\| \geq 5$ et au total $\|T\| = 5$.

(2) Vu en TD.

(3) Calcul des coefficients de Fourier de f (sans erreurs!) et formule de Parseval (cf l'exo 18 de la Feuille 2). On trouve $S = \pi^4/90$.

Exercice 1. (1) Intégration par parties en remarquant que $g(\lambda t)$ est la dérivée de $G(\lambda t)/\lambda$. Le "crochet" est nul car f est à support compact. (cf l'exo 5 de la Feuille 3).

(2) On commence par le montrer pour f de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact. Dans ce cas, le résultat découle de (1) et de l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} G(\lambda t) f'(t)\, dt \right| \leq \frac{C}{|\lambda|} \,,$$

où $c = \|G\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|\, dt < \infty$ (f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue à support compact). Pour le cas général, on utilise la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$ et le fait que $g \in L^\infty$ (cf l'exo 5 de la feuille 3, à nouveau).

Exercice 2. (1) Vu en TD.

(2) (a) C'est évident si $u = 0$. Si $u \neq 0$, on applique la définition de M en prenant $x = u/\|u\|$.

(b) Vu en TD. On trouve

$$\langle T(x), y \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \right).$$

Par (a), on en déduit qu'on a

$$|\langle T(x), y \rangle| \leq \frac{M}{4} \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \right) = \frac{M}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right),$$

où on a utilisé l'identité du parallèlogramme.

(c) On peut évidemment supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Par (2), on a

$$\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{2}\left(t^2\|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{t^2}\right)$$

pour tout $t > 0$. En posant $u = t^2$ et en étudiant la fonction de u apparaissant à droite (i.e. $f(u) = u\|x\|^2 + \|y\|^2/u$), on constate que cette fonction atteint son minimum pour $u = \|y\|/\|x\|$ et donc $t = \sqrt{\|y\|/\|x\|}$. En reportant cette valeur de t dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{2}\left(\|x\|\,\|y\| + \|x\|\,\|y\|\right) = M\,\|x\|\,\|y\|.$$

(d) Par (1), on a $M \leq \|T\|$, et par (4), on a $\|T\| \leq M$. Donc $\|T\| = M$.

Exercice 3. (1) (a) Par Parseval (2 fois), on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\|T(e_i)\|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\langle T(e_i), k_j\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\langle e_i, T^*(k_j)\rangle|^2\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\|T^*(k_j)\|^2.\end{aligned}$$

(b) Le deuxième membre de (1) ne dépend pas de (e_i).

(2) (a) Si $A, B \in \mathcal{S}_2(H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\|(\lambda A + \mu B)(e_i)\| \leq |\lambda|\,\|A(e_i)\| + |\mu|\,\|B(e_i)\|$, donc la suite $(\|(\lambda A+\mu B)(e_i)\|)_{i\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ puisque $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel.

(b) On a $|\langle A(e_i), B(e_i)\rangle| \leq \|A(e_i)\|\,\|B(e_i)\|$ pour tout i, donc, par Cauchy-Scwharz, la série$\sum\langle A(e_i), B(e_i)\rangle$ est absolument convergente.
Il est "clair" que $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{S}_2}$ est une forme hermitienne sur $\mathcal{S}_2(H)$, positive car $\langle A, A\rangle_{\mathcal{S}_2} = \sum_{i=0}^{\infty}\|A(e_i)\|^2 \geq 0$. Si $\langle A, A\rangle_{\mathcal{S}_2} = 0$, alors $A(e_i) = 0$ pour tout i (une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls). On a alors

$$A(x) = A\left(\sum_{i=0}^{\infty}\langle x, e_i\rangle\, e_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\langle x, e_i\rangle\, A(e_i) = 0$$

pour tout $x \in H$, i.e. $A = 0$. Donc $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{S}_2}$ est définie positive.

(3) Par Cauchy-Schwarz + Parseval, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle| \, \|u_i\| &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|u_i\|^2\right)^{1/2} \\ &= \|x\| \times \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|u_i\|^2\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Donc la série $\sum \langle x, e_i\rangle u_i$ converge normalement dans H, et

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle u_i\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle| \, \|u_i\| \leq \|x\| \times \left(\sum \|u_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Si $T \in \mathcal{S}_2(H)$, on applique cela avec $u_i = T(e_i)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \left\|T\left(\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle T(e_i)\right\| \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{S}_2} \times \|x\|\end{aligned}$$

pour tout $x \in H$. Donc$\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{S}_2}$.

(4) On sait déjà que $(\mathcal{S}_2(H), \|\cdot\|_{\mathcal{S}_2})$ est un espace préhilbertien; il reste à montrer qu'il est complet. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $(\mathcal{S}_2(H), \|\cdot\|_{\mathcal{S}_2})$. Par (3), on a $\|T_q - T_p\| \leq \|T_q - T_p\|_{\mathcal{S}_2}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, donc la suite (T_n) est de Cauchy pour la norme de $\mathcal{B}(H)$. Comme $\mathcal{B}(H)$ est complet, la suite (T_n) converge pour la norme $\|\cdot\|$ vers un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$. On a donc un “candidat limite”. Il reste à vérifier que $T \in \mathcal{S}_2(H)$, et que la suite (T_n) converge vers T pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_2}$. On a déjà fait plusieurs fois ce genre de choses en TD.

Exercice 4. (1) Un calcul qui se fait bien.

(2) Si on pose $p = \mathbf{1}_{[-1,0]}$, alors p est une densité de probabilité et $p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}p(t/\varepsilon)$. Un théorème du cours dit alors que la famille $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée pour la convolution, d'où le résultat.

Exercice 5. On a fait l'exercice en TD pour $p = 2$ (exo 2 de la Feuille 3). Ici, c'est pareil.

(1) On applique l'inégalité de Hölder en écrivant
$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{1/q} \times |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\,,$$
où q est l'exposant conjugué de p. À un moment, il faut utiliser le fait que $p/q = p-1$

(2) Voir l'exo 2 de la Feuille 3 et recopier la démonstration.